УДК 519.872

И.С. Шмырин

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ПОТОКА СОБЫТИЙ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Рассматривается задача об оценке параметров потока событий с переключениями. Предлагается рекуррентный алгоритм расчета оценок параметров потока событий. Реализуется имитационная модель потока, приводятся результаты численных расчетов.

Случайные потоки событий являются широко применяемой моделью для описания процессов в реальных физических, экономических, технических и других системах. Характеристики потоков событий, описывающих эти процессы, как правило, имеют случайную природу. Одной из распространенных моделей таких процессов являются МС-потоки событий – потоки, интенсивность которых является кусочно-постоянным марковским процессом с конечным числом состояний (такие потоки иначе называют потоками с переключениями [1]). Режимы функционирования реальных физических и технических систем обычно зависят от текущей интенсивности потоков событий, циркулирующих в системе; с другой стороны, параметры потоков, как правило, являются ненаблюдаемыми величинами. Вследствие этого важной является задача оценки параметров потока событий в произвольный момент времени по наблюдениям за этим потоком.

Постановка задачи

Рассматривается дважды стохастический пуассоновский поток событий, интенсивность которого есть кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: λ_1 и λ_2, $\lambda_1 > \lambda_2$. На участках стационарности (когда $\lambda(t) = \lambda_1$ либо $\lambda(t) = \lambda_2$) имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_1 и λ_2 соответственно. Длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии λ_i распределены по экспоненциальному закону $F_i(t) = 1 - \exp(-\alpha_i t)$, $i = 1,2$, где α_1 – интенсивность смены первого состояния процесса $\lambda(t)$ на второе, α_2 – интенсивность смены второго состояния на первое. Процесс $\lambda(t)$ ненаблюдаем, параметры λ_1, λ_2, α_1, α_2 неизвестны. Результатом наблюдения за потоком событий являются моменты времени t_i наступления событий, $i = 1,2,\ldots$. По этим наблюдениям необходимо в любой момент времени t сделать оценку $\hat{\theta}(t)$ вектора $\theta = (\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2)$ параметров процесса $\lambda(t)$.

В [2] рассматривалась задача оценки аналогичного потока событий при условии, что моменты наступления событий потока измеряются с ошибками, т.е. $t_i = t_i^0 + \tau_i$, где t_i – наблюдаемые моменты наступления событий, t_i^0 – истинные моменты наступления событий, τ_i – ошибки измерения. Предполагалось, что ошибки измерений независимы и нормально распределены с нулевым средним и дисперсией σ^2. В [2] предложен оптимальный алгоритм оценивания параметров λ_1, λ_2, α_1, α_2 с использованием апостериорной плотности распределения вектора параметров $\theta = (\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2)$. В связи со сложностью расчетных формул алгоритм [2] сложно реализуем даже на современных ЭВМ. В данной работе будем рассматривать случай, когда ошибки в измерениях моментов наступления событий отсутствуют: $t_i = t_i^0$, $i = 1,2,\ldots$, т.е. дисперсия ошибки измерений $\sigma^2 = 0$. Кроме того, предположим наличие дополнительной информации о параметрах процесса $\lambda(t)$, а именно – ограничение на интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, α – неизвестный параметр. Данные предположения делаются с целью показать, что оптимальный алгоритм оценки параметров является работоспособным.

Алгоритм расчета оценок вектора параметров

В [2] в качестве оптимальной оценки $m(t)$ вектора параметров $\theta = (\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2)$ МС-потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов наступления событий использовалось апостериорное среднее вектора θ как оценка, обеспечивающая минимум среднеквадратического отклонения ошибки оценивания: $m(t) = \int_{\Theta} \theta p(\theta \mid t) d\theta$, где $p(\theta|t)$ – апостериорная плотность распределения вектора θ в момент времени t, Θ – область значений вектора θ ($\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$). Для $p(\theta|t)$ в [2] выведены формула расчета $p(\theta \mid t)$ в интервалах времени между моментами наблюдения

$$p(\theta|t) = \frac{\exp\left(-\int_{t_i}^{t} a(\tau,\theta)d\tau\right) p(\theta|t_i + 0)}{\int_{\Theta} \exp\left(-\int_{t_i}^{t} a(\tau,\theta)d\tau\right) p(\theta|t_i + 0)d\theta}, \quad (1)$$

$$i = 0,1,2,\ldots,\ t_0 = 0,$$

и формула пересчета $p(\theta|t)$ в момент наблюдения события

$$p(\theta \mid t_{i+1} + 0) = \frac{a(t_{i+1} - 0, \theta) p(\theta \mid t_{i+1} - 0)}{\int_{\Theta} a(t_{i+1} - 0, \theta) p(\theta \mid t_{i+1} - 0) d\theta}, \quad (2)$$

$$i = 0,1,2,\ldots$$

В (1), (2): t_i – моменты наблюдения событий,

$$a(t, \theta) = (\Lambda_1(t) - \Lambda_2(t)) w(\lambda_1 | t) + \Lambda_2(t), \quad (3)$$

$w(\lambda_1|t)$ – апостериорная вероятность, что в момент t процесс $\lambda(t)$ принял значение λ_1 и, согласно [3], на

участках между наблюдавшимися событиями удовлетворяет интегродифференциальному уравнению

$$\frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{dt} = \alpha_2 - \alpha w(\lambda_1 \mid t) + (\lambda_1 - \lambda_2) w(\lambda_1 \mid t) \times$$
$$\times (1 - w(\lambda_1 \mid t)) \left\{ C + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left[w(\lambda_1 \mid t - \sigma z) \times \right.\right.$$
$$\left. \times (1 - w(\lambda_1 \mid t - \sigma z)) \exp\left(-\frac{z^2}{2} - \alpha\sigma z \right) \right] \times$$
$$\times \left[\{\pi_1 - (\pi_1 - w(\lambda_1 \mid t - \sigma z)) \exp(-\alpha\sigma z)\} \times \right.$$
$$\left.\left. \times \{\pi_2 + (\pi_1 - w(\lambda_1 \mid t - \sigma z)) \exp(-\alpha\sigma z)\} \right]^{-1} dz \right\}, \quad (4)$$
$$t_i \le t \le t_{i+1}, i = 0,1,2,...,$$

а в момент времени t_{i+1} наблюдения события для $w(\lambda_1 | t)$ имеет место формула

$$w(\lambda_1 | t_{i+1} + 0) =$$
$$= \frac{\Lambda_1(t_{i+1}) w(\lambda_1 | t_{i+1} - 0)}{(\Lambda_1(t_{i+1}) - \Lambda_2(t_{i+1})) w(\lambda_1 | t_{i+1} - 0) + \Lambda_2(t_{i+1})}, \quad (5)$$
$$i = 0,1,2,\dots,$$

при этом в (4), (5)

$$\Lambda_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left[\lambda_1 (\pi_1 + \pi_2 \exp(-\alpha\sigma z)) \times \right.$$
$$\times w(\lambda_1 \mid t - \sigma z) + \lambda_2 (\pi_1 - \pi_1 \exp(-\alpha\sigma z)) \times$$
$$\left. \times (1 - w(\lambda_1 \mid t - \sigma z)) \exp\left(-\frac{z^2}{2} \right) \right] \left[\pi_1 - (\pi_1 - \right.$$
$$\left. - w(\lambda_1 \mid t - \sigma z)) \exp(-\alpha\sigma z) \right]^{-1} dz + \frac{1}{2} (\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2) +$$
$$+ \frac{1}{2} \pi_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \exp\left(\frac{(a\sigma)^2}{2} \right) \left[1 - \Phi\left(\frac{a\sigma}{\sqrt{2}} \right) \right],$$

$$\Lambda_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left[\lambda_1 (\pi_2 - \pi_2 \exp(-\alpha\sigma z)) \times \right.$$
$$\times w(\lambda_1 \mid t - \sigma z) + \lambda_2 (\pi_2 + \pi_1 \exp(-\alpha\sigma z)) \times$$
$$\left. \times (1 - w(\lambda_1 \mid t - \sigma z)) \exp\left(-\frac{z^2}{2} \right) \right] \left[\pi_2 + (\pi_1 - \right.$$
$$\left. - w(\lambda_1 \mid t - \sigma z)) \exp(-\alpha\sigma z) \right]^{-1} dz + \frac{1}{2} (\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2) -$$
$$- \frac{1}{2} \pi_1 (\lambda_1 - \lambda_2) \exp\left(\frac{(a\sigma)^2}{2} \right) \left[1 - \Phi\left(\frac{a\sigma}{\sqrt{2}} \right) \right],$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \ \pi_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha}, \ \pi_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha},$$

$$C = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{(\alpha\sigma)^2}{2} \right) \left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha\sigma}{\sqrt{2}} \right) \right],$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du, \ w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1.$$

Рассмотрим случай отсутствия ошибок измерений ($\sigma = 0$) с ограничением $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Для безошибочных наблюдений оптимальный алгоритм расчета вероятности $w(\lambda_1 | t)$ в (3) рассмотрен в [4]. Для $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$:

$$w(\lambda_1 \mid t) = \left[w_1 (w_2 - w(\lambda_1 \mid t_i + 0)) - w_2 (w_1 - \right.$$
$$\left. - w(\lambda_1 \mid t_i + 0)) \exp\{-(\lambda_1 - \lambda_2)(w_2 - w_1)(t - t_i)\} \right] \times$$
$$\times \left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_i + 0) - (w_1 - w(\lambda_1 \mid t_i + 0)) \times \right.$$
$$\left. \times \exp\{-(\lambda_1 - \lambda_2)(w_2 - w_1)(t - t_i)\} \right]^{-1}, \quad (6)$$
$$t_i \le t \le t_{i+1}, i = 0,1,2,...,$$

$$w(\lambda_1 \mid t_{i+1} + 0) = \frac{\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t_{i+1} - 0)}{(\lambda_1 - \lambda_2) w(\lambda_1 \mid t_{i+1} - 0) + \lambda_2}, \quad (7)$$
$$i = 0,1,2,...$$

$$w_1 = \frac{2\alpha + \lambda_1 - \lambda_2 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\alpha^2}}{2(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

$$w_2 = \frac{2\alpha + \lambda_1 - \lambda_2 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\alpha^2}}{2(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

$$w(\lambda_1 \mid t_0 + 0) = 0{,}5.$$

Кроме этого, для $\Lambda_1(t)$, $\Lambda_2(t)$, входящих в (3), при $\sigma = 0$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ имеем $\Lambda_1(t) = \lambda_1$, $\Lambda_2(t) = \lambda_2$, так что

$$a(t, \theta) = (\lambda_1 - \lambda_2) w(\lambda_1 | t) + \lambda_2. \quad (8)$$

При (6), (8) в выражении (1) для $p(t|\theta)$

$$f(t, t_i, \theta) = \exp\left(-\int_{t_i}^t a(\tau, \theta) d\tau \right) =$$
$$= \left[(w_2 - w(\lambda_1 \mid t_i + 0)) \exp\left\{ -((\lambda_1 - \lambda_2) w_1 + \lambda_2) \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times (t - t_i) \right\} - (w_1 - w(\lambda_1 \mid t_i + 0)) \exp\left\{ -((\lambda_1 - \lambda_2) w_2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \lambda_2)(t - t_i) \right\} \right] \left[w_2 - w_1 \right]^{-1}, \quad (9)$$

так что (1) принимает вид

$$p(\theta | t) = \frac{f(t, t_i, \theta) p(\theta | t_i + 0)}{\int_\Theta f(t, t_i, \theta) p(\theta | t_i + 0) d\theta}.$$

Из-за сложности вычисления плотности $p(\theta|t)$ – рекуррентность в расчете $w(\lambda_1|t)$, сложные интегралы в (1) – в [2] предложен рекуррентный метод расчета вектора оценок $m(t)$ и матрицы ковариаций оценок параметров $c(t)$, основанный на приближенных формулах. Для безошибочных наблюдений и условия $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ рекуррентный алгоритм расчета $m(t)$, $c(t)$ принимает вид:

1) в момент начала наблюдений $t_0 = 0$ для вектора оценок $m(t)$ и матрицы ковариаций оценок $c(t)$ в [2] задаются начальные (априорные) значения $m(0)$, $c(0)$:

$$m(0) = \left[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right], \ c(0) = \begin{bmatrix} 5/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (10)$$

2) полагая $i = 0$, для любого момента времени t, $t_i \le t \le t_{i+1}$ (t_{i+1} – момент наступления $(i+1)$-го события), рассчитываем $m_k(t)$, $c_{jl}(t)$, ($k, j, l = \overline{1,3}$):

$$m_k(t)=\Big[f_k(t,t_i,m(t_i+0))+\frac{1}{2}\times$$
$$\times\sum_{j,l=1}^{3}\frac{\partial^2 f_k(t,t_i,m(t_i+0))}{\partial\theta_j\partial\theta_l}c_{jl}(t_i+0)\Big]\times$$
$$\times\Big[f(t,t_i,m(t_i+0))+\frac{1}{2}\times$$
$$\times\sum_{j,l=1}^{3}\frac{\partial^2 f(t,t_i,m(t_i+0))}{\partial\theta_j\partial\theta_l}c_{jl}(t_i+0)\Big]^{-1},\ k=\overline{1,3};\quad(11)$$

$$c_{jl}(t)=\Big[F_{jl}(t,t_i,m(t_i+0))+\frac{1}{2}\times$$
$$\times\sum_{n,s=1}^{3}\frac{\partial^2 F_{jl}(t,t_i,m(t_i+0))}{\partial\theta_n\partial\theta_s}c_{ns}(t_i+0)\Big]\times$$
$$\times\Big[f(t,t_i,m(t_i+0))+\frac{1}{2}\times$$
$$\times\sum_{n,s=1}^{3}\frac{\partial^2 f(t,t_i,m(t_i+0))}{\partial\theta_n\partial\theta_s}c_{ns}(t_i+0)\Big]^{-1},\ j,l=\overline{1,3};$$

здесь $f(t,t_i,\theta)$ определена в (9):

$$f_k(t,t_i,\theta)=\theta_k f(t,t_i,\theta),k=\overline{1,3};$$
$$F_{jl}(t,t_i,\theta)=(\theta_j-m_j(t_i+0))\times$$
$$\times(\theta_l-m_l(t_i+0))f(t,t_i,\theta),j,l=\overline{1,3};\qquad(12)$$

вероятность $w(\lambda_1|t_i+0)$ для (9) определена в (6), (7);

3) в момент t_{i+1} наступления первого события определяются величины $m_k(t_{i+1}-0)$, $c_{jl}(t_{i+1}-0)$ по формулам (11), (12);

4) пересчитываются оценки $m_k(t_{i+1}+0), c_{jl}(t_{i+1}+0)$:

$$m_k(t_{i+1}+0)=\Big[a_k(t_{i+1}-0,m(t_{i+1}-0))+\frac{1}{2}\times$$
$$\times\sum_{j,l=1}^{3}\frac{\partial^2 a_k(t_{i+1}-0,m(t_{i+1}-0))}{\partial\theta_j\partial\theta_l}c_{jl}(t_{i+1}-0)\Big]\times$$
$$\times\Big[a(t_{i+1}-0,m(t_{i+1}-0))+\frac{1}{2}\times$$
$$\times\sum_{j,l=1}^{3}\frac{\partial^2 a(t_{i+1}-0,m(t_{i+1}-0))}{\partial\theta_j\partial\theta_l}c_{jl}(t_{i+1}-0)\Big]^{-1},\quad(13)$$
$$k=\overline{1,3},$$

$$c_{jl}(t)=\Big[A_{jl}(t_{i+1}-0,m(t_{i+1}-0))+\frac{1}{2}\times$$
$$\times\sum_{n,s=1}^{3}\frac{\partial^2 A_{jl}(t_{i+1}-0,m(t_{i+1}-0))}{\partial\theta_n\partial\theta_s}c_{ns}(t_{i+1}-0)\Big]\times$$
$$\times\Big[a(t,t_i,m(t_i+0))+\frac{1}{2}\times$$
$$\times\sum_{n,s=1}^{3}\frac{\partial^2 a(t_{i+1}-0,m(t_{i+1}-0))}{\partial\theta_n\partial\theta_s}c_{ns}(t_{i+1}-0)\Big]^{-1},$$
$$j,l=\overline{1,3};$$

здесь $a(t,\theta)$ определена в (8),

$$a_k(t_{i+1}-0,\theta)=\theta_k a(t_{i+1}-0,\theta),k=\overline{1,3},$$
$$A_{jl}(t_{i+1}-0,\theta)=(\theta_j-m_j(t_{i+1}-0))\times$$
$$\times(\theta_l-m_l(t_{i+1}-0))a(t_{i+1}-0,\theta),j,l=\overline{1,3},\qquad(14)$$

расчет вероятности $w(\lambda_1|t)$ для (8) определен формулами (6), (7);

5) повторяются пункты 2–4 алгоритма для $i=1,2,\ldots$.

Заметим, что в силу рекуррентности расчета $w(\lambda_1|t)$, определенной в (6), (7) и входящей в состав (11) – (14), получить аналитический вид производных не представляется возможным (для реализации алгоритма необходимо численное их нахождение).

Результаты имитационного моделирования

Методом имитационного моделирования на ЭВМ для нескольких значений параметров λ_1, λ_2, α_1, α_2 процесса $\lambda(t)$ был реализован рассматриваемый поток событий. По полученным моментам наступления событий с помощью описанного выше алгоритма были получены оценки $\hat\lambda_1$, $\hat\lambda_2$, $\hat\alpha_1=\hat\alpha_1=\hat\alpha$ параметров потока. Данные эксперимента представлены в табл. 1.

Таблица 1

Оценки параметров для некоторых значений $\theta=(\lambda_1,\lambda_2,\alpha_1,\alpha_2)$

	T	$m_1(0)$	$\hat\lambda_1(T)$	$m_2(0)$	$\hat\lambda_2(T)$	$m_3(0)$	$\hat\alpha(T)$	$\Delta(0)$	$\Delta(T)$
$\lambda_1=2,\ \lambda_2=1,$ $\alpha_1=\alpha_2=0{,}8$	70,06	1,5	1,901	0,5	0,93277	1,0	0,83229	1,2	0,19852
$\lambda_1=5,\ \lambda_2=3,$ $\alpha_1=\alpha_2=0{,}8$	21,62	1,5	4,81752	0,5	2,54420	1,0	1,46254	6,2	1,30081
$\lambda_1=6,\ \lambda_2=2,$ $\alpha_1=\alpha_2=0{,}5$	19,66	1,5	6,27892	0,5	2,19260	1,0	1,52191	6,5	1,49343
$\lambda_1=10,\ \lambda_2=1,$ $\alpha_1=\alpha_2=1$	31,63	1,5	7,0774	0,5	1,03231	1,0	1,29644	9,0	2,72101

Здесь T – время наблюдения, $m_1(0)$, $m_2(0)$, $m_3(0)$, согласно (10), – начальные значения для оценок $\hat\lambda_1(t)$, $\hat\lambda_2(t)$, $\hat\alpha(t)$ соответственно, $\Delta(t)$ – величина, характеризующая качество оценок и рассчитывающаяся как

$$\Delta(t)=\big|\lambda_1-\hat\lambda_1(t)\big|+\big|\lambda_2-\hat\lambda_2(t)\big|+\big|\alpha-\hat\alpha(t)\big|,$$

при этом $\Delta(0)$ характеризует различие параметров потока и априорных (начальных) оценок, $\Delta(T)$ – качество оценок в момент окончания наблюдения.

Анализ данных таблицы показывает, что оценки параметров тем лучше, чем ближе истинные значения параметров к априорным (10). По мере удаления истинных параметров исследуемого потока событий от априорных значений оценок качество оценок ухудшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горцев А.М., Нежельская Л.А., Шевченко Т.И.* Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений // Изв. вузов. Физика. 1993. № 12. С. 67–85.
2. *Горцев А.М., Шмырин И.С.* Оптимальная оценка параметров дважды стохастического пуассоновского потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов наступления событий // Изв. вузов. Физика. 1999. № 4. С. 19–27.
3. *Горцев А.М., Шмырин И.С.* Оптимальная оценка состояний дважды стохастического пуассоновского потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов наступления событий // Автоматика и телемеханика. 1999. № 1. С. 52–66.
4. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Оптимальная нелинейная фильтрация марковского потока событий с переключениями // Техника средств связи. Серия: Системы связи. 1999. Вып. 7. С. 46–54.

Статья представлена кафедрой исследования операций факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 15 апреля 2000 г.