УДК 62-50:519.2

Н.С. Демин, С.В. Рожкова, О.В. Рожкова

ФИЛЬТРАЦИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПО НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ С ПАМЯТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ АНОМАЛЬНЫХ ПОМЕХ. I. НЕПРЕРЫВНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ

В данной работе результаты [1, 2] обобщаются с использованием результатов [3] на случай памяти произвольной кратности N. Для случая только непрерывных наблюдений решается задача синтеза фильтра, исследуется вопрос о чувствительности фильтра к неточному знанию матрицы интенсивности аномальных помех и доказывается свойство оптимальности процедуры исключения аномальных компонент вектора наблюдений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Система описывается уравнением (точка сверху далее всюду означает производную по t)

$$\dot{x}(t)=F(t)x(t)+\omega(t),\ t\geq 0, \tag{1}$$

где $x(t)$ – n-мерный вектор состояния, $\omega(t)$ – белый гауссовский процесс с $M\{\omega(t)\}=0$, $M\left\{\omega(t)\omega^T(s)\right\}=Q(t)\delta(t-s)$. Выходом непрерывного и дискретного во времени каналов наблюдения являются $l-$ и $q-$мерные процессы $z(t)$ и $\eta(t_m)$ вида

$$z(t)=H_0(t)x(t)+\sum_{k=1}^{N}H_k(t)x(\tau_k)+\nu(t)+B\varphi(t); \tag{2}$$

$$\eta(t_m)=G_0(t_m)x(t_m)+\sum_{k=1}^{N}G_k(t_m)x(\tau_k)+\xi(t_m)+Cf(t_m), \tag{3}$$

где: $m=0,1,...;\quad 0\leq t_0<\tau_N<\tau_{N-1}<...<\tau_1<t,\quad \tau_k=\mathrm{const}$; $\nu(t)$ – белый гауссовский процесс, а $\xi(t_m)$ – белая гауссовская последовательность, которые являются регулярными помехами, причем $\mathrm{M}\{\nu(t)\}=0$, $\mathrm{M}\left\{\nu(t)\nu^T(s)\right\}=R(t)\delta(t-s)$, $\mathrm{M}\{\xi(t_m)\}=0$, $\mathrm{M}\left\{\xi(t_m)\xi^T(t_k)\right\}=V(t_m)\delta_{mk}$; $\varphi(t)$ – s-мерный $(s\leq l)$ белый гауссовский процесс, а $f(t_m)-$ r-мерная $(r\leq q)$ белая гауссовская последовательность, которые являются аномальными помехами, причем $\mathrm{M}\{\varphi(t)\}=\varphi_0(t)$, $\mathrm{M}\left\{[\varphi(t)-\varphi_0(t)][\varphi(s)-\varphi_0(s)]^T\right\}=\Phi(t)\times\delta(t-s)$, $\mathrm{M}\{f(t_m)\}=f_0(t_m)$, $\mathrm{M}\left\{[f(t_m)-f_0(t_m)][f(t_k)-f_0(t_k)]^T\right\}=\Theta(t_m)\delta_{mk}$. Матрицы B размера $(l\times s)$ и C размера $(q\times r)$, определяющие структуру действия компонент векторов аномальных помех $\varphi(t)$ и $f(t_m)$ на компоненты векторов наблюдений $z(t)$ и $\eta(t_m)$ соответственно, являются булевыми следующего вида: если $j_1,j_2,\cdots,j_s-$номера компонент вектора $z(t)$ и $i_1,i_2,\cdots,i_s-$номера компонент вектора $\eta(t_m)$, по которым действуют аномальные помехи, тогда в столбцах матриц B и C с номерами соответственно α и β единица стоит на j_α-м месте $(1\leq\alpha\leq s;1\leq j_\alpha\leq l)$ и i_β-м месте $(1\leq\beta\leq r;\ \ 1\leq i_\beta\leq q)$. Предполагается: 1^0) $x(0)=x_0-$имеет нормальное распределение с параметрами μ_0 и Γ_0; 2^0) x_0, $\omega(t)$, $\nu(t)$, $\xi(t_m)$, $\varphi(t)$, $f(t_m)-$независимы; 3^0) матрицы Γ_0, $Q(t)$, $R(t)$, $V(t_m)$, $\Phi(t)$, $\Theta(t_m)-$положительно определенные; 4^0) $\varphi_0(t)$, $f_0(t_m)$ – неизвестны. С т а в и т с я з а д а ч а: по совокупности наблюдений $z_0^t=\{z(s):0\leq s\leq t\}$ и $\eta_0^m=\{\eta(t_0),\eta(t_1),\cdots,\eta(t_m)\}$ найти оптимальные в среднеквадратическом смысле несмещенные оценки фильтрации $\mu(t)$ и интерполяции $\mu(\tau_k,t)$ соответственно для $x(t)$ и $x(\tau_k)$, $k=\overline{1;N}$.

Используемые обозначения: $\mathrm{M}\{\}$ – математическое ожидание; $\mathrm{tr}[\cdot]$ – след матрицы; "T" и "+" – транспонирование и псевдообращение, если стоят как правые верхние индексы; $\delta(\cdot)$ – функция Дирака; $\delta_{kl}-$ символ Кронекера; $0-$ нулевой вектор соответствующего размера; O и I_k- нулевая матрица соответствующего размера и единичная $(k\times k)$-матрица; $A>0\ \ (\geq 0)-$ положительно (неотрицательно) определенная матрица.

В первой части работы рассматривается решение задачи только по наблюдениям за процессом $z(t)$.

2. СИНТЕЗ ФИЛЬТРА

Класс фильтров, на котором будет решаться поставленная задача, выберем на основе решения соответствующей задачи в байесовском случае [3].

Утверждение 1. Пусть $\varphi_0(t)=0$. Тогда оптимальный в среднеквадратическом смысле байесовский фильтр определяется уравнениями

$$\dot{\mu}(t)=F(t)\mu(t)+L_0(t)\tilde{z}(t); \tag{4}$$

$$\dot{\mu}(\tau_k,t)=L_k(t)\tilde{z}(t),\ k=\overline{1;N}; \tag{5}$$

$$\dot{\Gamma}(t)=F(t)\Gamma(t)+\Gamma(t)F^T(t)+Q(t)-L_0(t)\tilde{H}_0(t); \tag{6}$$

$$\dot{\Gamma}_{kk}(\tau_k,t)=-L_k(t)\tilde{H}_k(t),\ k=\overline{1;N}; \tag{7}$$

$$\dot{\Gamma}_{0k}(\tau_k,t)=F(t)\Gamma_{0k}(\tau_k,t)-L_0(t)\tilde{H}_k(t),\ k=\overline{1;N}; \tag{8}$$

$$\dot{\Gamma}_{kl}(\tau_l,\tau_k,t)=-L_k(t)\tilde{H}_l(t),\ k=\overline{1;N-1},\ l=\overline{2;N},\ l>k; \tag{9}$$

$$\tilde{z}(t)=z(t)-H_0(t)\mu(t)-\sum_{j=1}^{N}H_j(t)\mu(\tau_j,t); \tag{10}$$

$$\tilde{H}_0(t)=H_0(t)\Gamma(t)+\sum_{j=1}^{N}H_j(t)\Gamma_{0j}^T(\tau_j,t); \tag{11}$$

$$\tilde{H}_k(t)=H_k(t)\Gamma_{kk}(\tau_k,t)+\sum_{j\neq k}^{N}H_j(t)\Gamma_{kj}^T(\tau_j,\tau_k,t); \tag{12}$$

$$L_0(t)=\tilde{H}_0^T(t)\tilde{R}^{-1}(t),\ L_k(t)=\tilde{H}_k^T(t)\tilde{R}^{-1}(t); \tag{13}$$

$$\tilde{R}(t)=R(t)+B\Phi(t)B^T. \tag{14}$$

Поскольку в данной работе рассматривается случай фиксированной памяти $\left(\tau_k = \text{const}, k=\overline{1;N}\right)$, то данное утверждение следует как частный случай теоремы 1 из [3] с учетом независимости $\nu(t)$ и $\varphi(t)$, где дано решение задачи в случае скользящей памяти $\left(\tau_k = t - t_k^*,\ t_k^* = \text{const}\right)$.

Введем в рассмотрение процессы ($\tilde{\tau}_N = [\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_N]$) $\tilde{\omega}(t)$, $\tilde{x}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t)$, $\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t)$, $\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t)$ размеров $(N+1)n$ вида

$$\tilde{\omega}(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ 0 \end{bmatrix},\ \tilde{x}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(\tau_k) \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) = \begin{bmatrix} \mu(t) \\ \mu(\tau_k, t) \end{bmatrix},\ k=\overline{1;N}, \tag{15}$$

где $\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) = \tilde{x}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) - \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t)$, и матрицы

$$\tilde{F}(t) = \begin{bmatrix} F(t) & O \\ O & O \end{bmatrix},\quad \tilde{Q}(t) = \begin{bmatrix} Q(t) & O \\ O & O \end{bmatrix},$$

$$L(t) = \begin{bmatrix} L_0(t) \\ L_k(t) \end{bmatrix},\ H(t) = [H_0(t)\, H_k(t)],\ k=\overline{1;N}, \tag{16}$$

размеров соответственно

$$[(N+1)n]\times[(N+1)n],\ [(N+1)n]\times[(N+1)n],$$
$$([(N+1)n]\times l),\ (l\times[(N+1)n]).$$

Тогда из (2), (10), (15), (16)

$$\tilde{z}(t) = H(t)\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) + \nu(t), \tag{17}$$

где $\tilde{\nu}(t) = \nu(t) + B\varphi(t)$, а из (4), (5), (15)-(17) следует уравнение

$$\dot{\tilde{\mu}}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) = \tilde{F}(t)\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) + L(t)\tilde{z}(t). \tag{18}$$

Используя в (18) вместо неизвестного $\varphi_0(t)$ оценку $\hat{\varphi}(t) = S(t)\tilde{z}(t)$ в виде линейного преобразования процесса $\tilde{z}(t)$, приходим к уравнению

$$\dot{\tilde{\mu}}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) = \tilde{F}(t)\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) + \tilde{L}(t)\tilde{z}(t); \tag{19}$$

$$\tilde{L}(t) = L(t)\tilde{S}(t),\ \tilde{S}(t) = I_l - BS(t), \tag{20}$$

с условиями несмещенности

$$\tilde{S}(t)B = O,\quad S(t)B = I_s. \tag{21}$$

Учитывая условия постановки задачи с использованием стандартных вычислений [4], получаем, что матрица $\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) = M\left\{\tilde{\mu}^0_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t)\tilde{\mu}^{0T}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t)\right\}$ вторых моментов ошибки оценки $\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t)$ определяется уравнением

$$\dot{\tilde{\Gamma}}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) = F_0(t)\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) + \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t)F_0^T(t) +$$
$$+ L(t)\tilde{S}(t)\tilde{R}(t)\tilde{S}^T(t)L^T(t) + \tilde{Q}(t), \tag{22}$$

где $F_0(t) = \tilde{F}(t) - L(t)\tilde{S}(t)H(t)$. Следуя [5], в качестве критерия оптимальности выбираем функционал $J = \text{tr}\left[\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t_1)\right]$, где t_1 – некоторый конечный момент времени $(\tau_1 < t \le t_1)$. Итак, пришли к следующей задаче: в классе фильтров (19) найти $([(N+1)n]\times l)$-матрицу $L(t)$, доставляющую на траекториях $[(N+1)n]\times[(N+1)n]$-мерного матричного дифференциального уравнения (22) минимум функционалу J при выполнении условий несмещенности (21).

Формально получили задачу оптимального управления с матричным состоянием $\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t)$, матричным управлением $L(t)$, фиксированным временем управления, фиксированным левым концом траектории, свободным правым концом траектории и терминальным критерием качества. Для решения подобных задач используется матричный вариант принципа максимума Понтрягина, на основе которого в [5] был осуществлен синтез фильтра Калмана.

Теорема 1. Оптимальный в среднеквадратическом смысле несмещенный фильтр (ОСКСНФ) в классе линейных фильтров вида (19) определяется уравнениями

$$\dot{\mu}(t) = F(t)\mu(t) + \tilde{L}_0(t)\tilde{z}(t),$$
$$\dot{\mu}(\tau_k, t) = \tilde{L}_k(t)\tilde{z}(t),\ k=\overline{1;N}; \tag{23}$$

$$\dot{\Gamma}(t) = F(t)\Gamma(t) + \Gamma(t)F^T(t) + Q(t) - \tilde{L}_0(t)\tilde{H}_0(t); \tag{24}$$

$$\dot{\Gamma}_{kk}(\tau_k, t) = -\tilde{L}_k(t)\tilde{H}_k(t),\ k=\overline{1;N}; \tag{25}$$

$$\dot{\Gamma}_{0k}(\tau_k, t) = F(t)\Gamma_{0k}(\tau_k, t) - \tilde{L}_0(t)\tilde{H}_k(t),\ k=\overline{1;N}; \tag{26}$$

$$\dot{\Gamma}_{kl}(\tau_l, \tau_k, t) = -\tilde{L}_k(t)\tilde{H}_l(t),\ k=\overline{1;N-1},\ l=\overline{2;N},\ l>k; \tag{27}$$

$$\tilde{L}_0(t) = L_0(t)[I_l - BS(t)],\ \tilde{L}_k(t) = L_k(t)[I_l - BS(t)]; \tag{28}$$

$$S(t) = \left[B^T\tilde{R}^{-1}(t)B\right]^{-1}B^T\tilde{R}^{-1}(t), \tag{29}$$

а $\tilde{z}(t)$, $\tilde{H}_0(t)$, $\tilde{H}_k(t)$, $L_0(t)$, $L_k(t)$ и $\tilde{R}(t)$ имеют вид (10) – (14).

Доказательство. В соответствии с матричным вариантом принципа максимума Понтрягина [5] функция Гамильтона $\boldsymbol{H}(t) = \boldsymbol{H}\left(\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t), L(t), \Lambda(t)\right)$, согласно (22), определяется выражением

$$\boldsymbol{H}(t) = \text{tr}\left[F_0(t)\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t)\Lambda^T(t)\right] +$$
$$+ \text{tr}\left[\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t)F_0^T(t)\Lambda^T(t)\right] +$$
$$+ \text{tr}\left[L(t)\tilde{S}(t)\tilde{R}(t)\tilde{S}^T(t)L^T(t)\Lambda^T(t)\right] + tr\left[\tilde{Q}(t)\Lambda^T(t)\right], \tag{30}$$

где $\Lambda(t)$ $[(N+1)n]\times[(N+1)n]$ – матрица сопряженных переменных, уравнение для которой и граничное условие имеют вид

$$\dot{\Lambda}(t) = -\partial\boldsymbol{H}(t)/\partial\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t),\quad \Lambda(t_1) = -\partial J/\partial\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t_1).$$

Непосредственные вычисления дают, что

$$\dot{\Lambda}(t) = -\Lambda(t)F_0(t) - F_0^T(t)\Lambda(t),\ \Lambda(t_1) = I_{[(N+1)n]}. \tag{31}$$

Необходимое условие оптимальности $\partial\boldsymbol{H}/\partial L = O$ с использованием (30), симметричности $\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t)$ и правил векторно-матричного дифференцирования [5] приводит к выражению

$$-\Lambda(t)\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t)H^T(t)\tilde{S}^T(t) -$$
$$-\Lambda^T(t)\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t)H^T(t)\tilde{S}^T(t) + \Lambda(t)L(t)\tilde{S}(t)\tilde{R}(t)\tilde{S}^T(t) +$$
$$+\Lambda^T(t)L(t)\tilde{S}(t)\tilde{R}(t)\tilde{S}^T(t) = \boldsymbol{O}. \tag{32}$$

Так как $\Lambda(t)$, удовлетворяющая краевой задаче (31), является симметричной положительно определенной матрицей [4, 5], то из (32) следует окончательный вид соотношения для нахождения $L(t)$:

$$L(t)\tilde{S}(t)\tilde{R}(t)\tilde{S}^T(t) = \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t)H^T(t)\tilde{S}^T(t). \tag{33}$$

Решение (33) существует, если и только если [6]

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{S}^T(t)\left[\tilde{S}(t)\tilde{R}(t)\tilde{S}^T(t)\right]^+\times$$
$$\times\left[\tilde{S}(t)\tilde{R}(t)\tilde{S}^T(t)\right]=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{S}^T(t). \quad (34)$$

Докажем справедливость соотношения (34). Так как $\tilde{R}(t)>0$, то $\tilde{R}(t)=A(t)A^T(t)$, где $A(t)$ – невырожденная нижняя треугольная матрица [7]. Обозначив левую часть (34) через $G(t)$, получим

$$G(t)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{S}^T(t)\left[D^T(t)D(t)\right]^+D^T(t)D(t),$$

где $$D(t)=A^T(t)\tilde{S}^T(t).$$

Так как $\left[D^T(t)D(t)\right]^+D^T(t)=D^+(t)$ [6], то

$$G(t)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{S}^T(t)\times$$
$$\times\left[A^T(t)\tilde{S}^T(t)\right]^+\left[A^T(t)\tilde{S}^T(t)\right]. \quad (35)$$

Невырожденность матрицы $A^T(t)$ дает, что [6]

$$\left[A^T(t)\tilde{S}^T(t)\right]^+\left[A^T(t)\tilde{S}^T(t)\right]=\left[\tilde{S}^T(t)\right]^+\tilde{S}^T(t).$$

Так как $\tilde{S}^T(t)\left[\tilde{S}^T(t)\right]^+\tilde{S}^T(t)=\tilde{S}^T(t)$ [6], то окончательно получаем $G(t)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{S}^T(t)$, что доказывает справедливость (34). Тогда общее решение уравнения (33) имеет вид [6]

$$L(t)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{S}^T(t)\left[\tilde{S}(t)\tilde{R}(t)\tilde{S}^T(t)\right]^+-$$
$$-B(t)\left[\tilde{S}(t)\tilde{R}(t)\tilde{S}^T(t)\right]\left[\tilde{S}(t)\tilde{R}(t)\tilde{S}^T(t)\right]^++P(t), \quad (36)$$

где $P(t)$ – произвольная $[(N+1)n]\times l$-матрица. Найдем матрицу $S(t)$, которая удовлетворяет условиям несмещенности (21) и приводит к выражению для $\tilde{L}(t)$, не зависящему от $P(t)$, для чего потребуем выполнение условия

$$B\tilde{S}(t)\tilde{R}(t)\tilde{S}^T(t)=O. \quad (37)$$

Умножая левую часть (37) слева на B^+, справа на $\tilde{R}^{-1}(t)B$, а затем учитывая (20), (21) и свойство матрицы с линейно независимыми столбцами $B^+B=I_r$ [6], получаем, что

$$I_r-S(t)\tilde{R}(t)S^T(t)B^T\tilde{R}^{-1}(t)B=O.$$

Умножая левую часть последнего выражения справа на $\left[B^T\tilde{R}^{-1}(t)B\right]^{-1}$ и учитывая, согласно (21), что $B^TS^T(t)=I_r$, получаем выражение

$$\left\{\left[B^T\tilde{R}^{-1}(t)B\right]^{-1}B^T-S(t)\tilde{R}(t)\right\}S^T(t)=O,$$

которое является уравнением для нахождения $S(t)$. Как противоречащее (21), тривиальное решение отбрасывается, а второе решение дает (29). Использование (37) в (36) приводит общее решение уравнения (33) к виду

$$L(t)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{S}^T(t)\left[\tilde{R}(t)\tilde{S}^T(t)\right]^+-$$
$$-P(t)\tilde{R}(t)\tilde{S}^T(t)\left[\tilde{R}(t)\tilde{S}^T(t)\right]^T+P(t). \quad (38)$$

Произвольную матрицу $P(t)$ выберем из условия $\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)=P(t)\tilde{R}^{-1}(t)$, использование которого в (38) приводит к формуле

$$L(t)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{R}^{-1}(t). \quad (39)$$

Расписывание (19), (22) с учетом блочной структуры $\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)$ и (11), (12), (15), (16), (20), (39) приводит к (23) – (29). Тем самым все соотношения теоремы получены и доказательство завершается установлением того факта, что матрица передачи $\tilde{L}(t)=L(t)\tilde{S}(t)$ фильтра (19) не зависит от произвольной матрицы $P(t)$, присутствующей в представлении (36) общего решения уравнения (33). Из (36) получаем

$$\tilde{L}(t)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{S}^T(t)\left[\tilde{S}(t)\tilde{R}(t)\tilde{S}^T(t)\right]^+\tilde{S}(t)-$$
$$-P(t)\left[\tilde{S}(t)\tilde{R}(t)\tilde{S}^T(t)\right]\left[\tilde{S}(t)\tilde{R}(t)\tilde{S}^T(t)\right]^+\tilde{S}(t)+$$
$$+P(t)\tilde{S}(t). \quad (40)$$

Обозначив через $\Psi(t)$ второе слагаемое в правой части (40), аналогично выводу (34) получим

$$\Psi(t)=P(t)\left[\tilde{S}(t)A(t)\right]\left[\tilde{S}(t)A(t)\right]^+\tilde{S}(t).$$

Поскольку $A(t)$ невырожденная, то $\left[\tilde{S}(t)A(t)\right]\times\left[\tilde{S}(t)A(t)\right]^+=\tilde{S}(t)\tilde{S}^+(t)$, а $\tilde{S}(t)\tilde{S}^+(t)\tilde{S}(t)=\tilde{S}(t)$ [6]. Учет этих свойств дает, что $\Psi(t)=P(t)\tilde{S}(t)$. Использование этой формулы в (40) приводит к представлению $\tilde{L}(t)$ в виде

$$\tilde{L}(t)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{S}^T(t)\left[\tilde{S}(t)\tilde{R}(t)\tilde{S}^T(t)\right]^+\tilde{S}(t),$$

что и требовалось доказать.

3. АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Чувствительность фильтра, определяемого теоремой 1, к неточному знанию матрицы интенсивности аномальной помехи исследуем по методике [8]. Пусть $\Phi^*(t)$ – истинная, $\Phi(t)$ – используемая в фильтре матрица интенсивности помехи, а $\tilde{\mu}_r^0(\tilde{\tau}_N,t)$ – истинная ошибка реальной оценки $\tilde{\mu}_r(\tilde{\tau}_N,t)$. Из (10), (19) следует для $\dot{\tilde{\mu}}_r(\tilde{\tau}_N,t)$ уравнение

$$\dot{\tilde{\mu}}_r(\tilde{\tau}_N,t)=\tilde{F}(t)\tilde{\mu}_r(\tilde{\tau}_N,t)+$$
$$+\tilde{L}(t)[z_r(t)-H(t)\tilde{\mu}_r(\tilde{\tau}_N,t)], \quad (41)$$

где z_r – реальные наблюдения с реальной матрицей интенсивности $\Phi^*(t)$ для $f(t)$. Процесс $\tilde{x}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)$, как это следует из (1), (15), (16), определяется уравнением

$$\dot{\tilde{x}}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)=\tilde{F}(t)\tilde{x}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)+\tilde{\omega}(t). \quad (42)$$

Так как

$$z_r(t)=H(t)\tilde{x}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)+\tilde{v}(t),$$

то из (41), (42) ошибка $\tilde{\mu}_r^0(\tilde{\tau}_N,t)$ реальной оценки

$\tilde{\mu}^r_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)$ определяется уравнением

$$\dot{\tilde{\mu}}^0_r(\tilde{\tau}_N,t)=\bar{F}_0(t)\tilde{\mu}^0_r(\tilde{\tau}_N,t)+\tilde{\omega}(t)-\tilde{L}(t)\tilde{\nu}(t), \qquad (43)$$

где $\bar{F}_0(t)=\tilde{F}(t)-\tilde{L}(t)H(t)$. Учитывая условия постановки задачи с использованием стандартных вычислений [4], получаем из (43), что матрица вторых моментов ошибки реальной оценки $\tilde{\Gamma}^r_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)=$ $=\mathrm{M}\left\{\tilde{\mu}^0_r(\tilde{\tau}_N,t)\left(\tilde{\mu}^0_r(\tilde{\tau}_N,t)\right)^T\right\}$ определяется уравнением

$$\dot{\tilde{\Gamma}}^r_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)=\bar{F}_0(t)\tilde{\Gamma}^r_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)+\tilde{\Gamma}^r_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)\bar{F}_0(t)+$$
$$+\tilde{L}(t)R^*(t)\tilde{L}^T(t)+\tilde{Q}(t). \qquad (44)$$

Введем в рассмотрение функцию чувствительности

$$\Pi_{ij}(t)=\partial\tilde{\Gamma}^r_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)\big/\partial\Phi^*_{ij}\Big|_{\Phi^*_{ij}=\Phi_{ij}}$$

матрицы вторых моментов $\tilde{\Gamma}^r_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)$ ошибки реальной оценки к (i,j)-му элементу матрицы интенсивности аномальной помехи. Тогда из (44) следует уравнение для $\Pi_{ij}(t)$ вида

$$\dot{\Pi}_{ij}(t)=\tilde{L}(t)BI_{ij}B^T\tilde{L}^T(t), \quad \Pi_{ij}(\tau_1)=\boldsymbol{O},$$

где I_{ij} – булева $(s\times s)$-матрица, у которой единица стоит на (i,j)-м месте, а остальные элементы нули. Так как $\tilde{L}(t)=L(t)\tilde{S}(t)$, то с учетом (21) получаем $\Pi_{ij}(t)=\boldsymbol{O}$ для всех $i=\overline{1;s}$, $j=\overline{1;s}$. Таким образом, получили следующее утверждение.

Теорема 2. ОСКСНФ, синтезированный в п.2, является нечувствительным к неточному знанию матрицы интенсивности аномальной помехи.

4. ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПРОЦЕДУРЫ ИСКЛЮЧЕНИЯ АНОМАЛЬНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Пусть вектор наблюдений $\bar{z}(t)$ размера $(l-s)$ получается из вектора наблюдений $z(t)$ путем исключения компонент с номерами $j_1,j_2,\cdots,j_s$, по которым действуют аномальные помехи. Пусть $\bar{H}_0(t)$, $\bar{H}_k(t)$, $k=\overline{1;N}$, – матрицы размера $[(l-s)\times N]$, а $\bar{R}(t)$ – матрица размера $[(l-s)\times(l-s)]$, которые получаются из матриц $H_0(t)$, $H_k(t)$, $R(t)$ исключением строк и соответственно строк и столбцов с номерами $j_1,j_2,\cdots,j_s$. Тогда оптимальный в среднеквадратическом смысле фильтр, в котором используется вектор наблюдений $\bar{z}(t)$, будем называть усеченным.

Утверждение 2. Усеченный фильтр определяется для $\bar{\mu}(t)$, $\bar{\mu}(\tau_k,t)$, $\bar{\Gamma}(t)$, $\bar{\Gamma}_{kk}(\tau_k,t)$, $\bar{\Gamma}_{0k}(\tau_k,t)$, $\bar{\Gamma}_{kl}(\tau_l,\tau_k,t)$ уравнениями (4) – (9), в которых $z(t)$, $\tilde{z}(t)$, $L_0(t)$, $L_k(t)$, $H_0(t)$, $H_k(t)$, $\tilde{H}_0(t)$, $\tilde{H}_k(t)$, $\tilde{R}(t)$ заменяются соответственно на $\bar{z}(t)$, $\bar{\tilde{z}}(t)$, $L_0(t)$, $\bar{L}_k(t)$, $H_0(t)$, $\bar{H}_k(t)$, $\bar{\tilde{H}}_0(t)$, $\bar{\tilde{H}}_k(t)$, $\bar{R}(t)$.

Данное утверждение непосредственно следует из Утверждения 1.

Теорема 3. Фильтр, определенный Теоремой 1, и усеченный фильтр эквиваленты.

Доказательство. Очевидно, что уравнения, определяющие усеченный фильтр, согласно Утверждению 2, в блочном представлении имеют вид

$$\dot{\bar{\tilde{\mu}}}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)=\tilde{F}(t)\bar{\tilde{\mu}}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)+\bar{L}(t)\bar{\tilde{z}}(t); \qquad (45)$$

$$\dot{\bar{\tilde{\Gamma}}}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)=\tilde{F}(t)\bar{\tilde{\Gamma}}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)+\bar{\tilde{\Gamma}}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)\tilde{F}^T(t)-$$
$$-\bar{\tilde{\Gamma}}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)\bar{H}^T(t)\bar{R}^{-1}(t)\bar{H}(t)\bar{\tilde{\Gamma}}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)+\tilde{Q}(t). \qquad (46)$$

Аналогично уравнения, определяющие ОСКСНФ, согласно Теореме 1, в блочном представлении имеют вид

$$\dot{\tilde{\mu}}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)=\tilde{F}(t)\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)+\tilde{L}(t)\tilde{\tilde{z}}(t); \qquad (47)$$

$$\dot{\tilde{\Gamma}}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)=\tilde{F}(t)\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)+\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)\tilde{F}^T(t)-$$
$$-\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{R}^{-1}(t)\tilde{S}(t)H(t)\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)+\tilde{Q}(t), \qquad (48)$$

где $\bar{L}(t)=\bar{\tilde{\Gamma}}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)\bar{H}^T(t)\bar{R}^{-1}(t)$, $\tilde{L}(t)=L(t)\tilde{S}(t)$, $L(t)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)H^T(t)\tilde{R}^{-1}(t)$. Из (45) – (48) следует, что доказательство теоремы сводится к доказательству соотношений

$$\bar{L}(t)\bar{\tilde{z}}(t)=\tilde{L}(t)\tilde{z}(t), \qquad (49)$$

$$\bar{H}^T(t)\bar{R}^{-1}(t)\bar{H}(t)=H^T(t)\tilde{R}^{-1}(t)\tilde{S}(t)H(t). \qquad (50)$$

Докажем сначала (50). Введем в рассмотрение булеву $[(l-s)\times l]-$ матрицу E, которая получается из единичной матрицы размера $(l\times l)$ исключением строк с номерами $j_1,j_2,\cdots,j_s$. Так как $\bar{H}(t)=EH(t)$, $\bar{R}(t)=ER(t)E^T$, то доказательство (50) сводится к доказательству соотношения

$$E^T\left[ER(t)E^T\right]^{-1}E=\tilde{R}^{-1}(t)\tilde{S}(t). \qquad (51)$$

Из (14) с использованием матричного тождества [7]

$$\left[A+BCB^T\right]^{-1}=A^{-1}-$$
$$-A^{-1}B\left[C^{-1}+B^TA^{-1}B\right]^{-1}B^TA^{-1} \qquad (52)$$

следует

$$\tilde{R}^{-1}(t)=R^{-1}(t)-R^{-1}(t)B\left[\Phi^{-1}(t)+\right.$$
$$\left.+B^TR^{-1}(t)B\right]^{-1}B^TR^{-1}(t). \qquad (53)$$

Умножая обе части (53) слева на B^T и справа на B, а затем сворачивая правую часть по матричному тождеству (52), получаем

$$B^T\tilde{R}^{-1}(t)B=\left[\quad\Phi(t)+\left[B^TR^{-1}(t)B\right]^{-1}\right]^{-1},$$

откуда следует

$$\Phi(t)=\left[B^T\tilde{R}^{-1}(t)B\right]^{-1}-\left[B^TR^{-1}(t)B\right]^{-1}. \qquad (54)$$

Умножение обеих частей (54) слева на B и справа на B^T с учетом (14) приводит к формуле

$$\tilde R(t)-B\left[B^T\tilde R^{-1}(t)B\right]^{-1}B^T=$$

$$=R(t)-B\left[B^T R^{-1}(t)B\right]^{-1}B^T. \qquad (55)$$

Из (55) следует, что

$$\tilde R(t)\left[\tilde R^{-1}(t)-\tilde R^{-1}(t)B\left[B^T\tilde R^{-1}(t)B\right]^{-1}B^T\tilde R^{-1}(t)\right]\tilde R(t)=$$

$$=R(t)\left[R^{-1}(t)-R^{-1}(t)B\left[B^T R^{-1}(t)B\right]^{-1}B^T R^{-1}(t)\right]R(t). \qquad (56)$$

Пусть $\Psi(t)$ – левая часть (56). Используя для $\tilde R(t)$, которые стоят в качестве сомножителей при внешней квадратной скобке в левой части формулы (56) и представление (14) для $\tilde R(t)$, получаем, что

$$\Psi(t)=R(t)\left[\tilde R^{-1}(t)-\tilde R^{-1}(t)B\left[B^T\tilde R^{-1}(t)B\right]^{-1}B^T\tilde R^{-1}(t)\right]R(t).$$

Таким образом из (14) следует

$$\tilde R^{-1}(t)-\tilde R^{-1}(t)B\left[B^T\tilde R^{-1}(t)B\right]^{-1}B^T\tilde R^{-1}(t)=$$

$$=R^{-1}(t)-R^{-1}(t)B\left[B^T R^{-1}(t)B\right]^{-1}B^T R^{-1}(t). \qquad (57)$$

Используя (57) в (51), с учетом (56), (20) получаем, что доказательство (50) свелось к доказательству тождества

$$R(t)E^T\left[ER(t)E^T\right]^{-1}E+$$

$$+B\left[B^T R^{-1}(t)B\right]^{-1}B^T R^{-1}(t)=I_l. \qquad (58)$$

Обозначим

$$R(t)E^T\left[ER(t)E^T\right]^{-1}E=A_1,$$

$$B\left[B^T R^{-1}(t)B\right]^{-1}B^T R^{-1}(t)=A_2. \qquad (59)$$

По построению матриц B и E следует $EB=O$. Использование этого свойства приводит к тому, что $A_1A_2=O$, $A_2A_1=O$. Для рангов произвольных матриц A и B справедливы свойства [6]

$$rk[AB]=rk\left[A^+AB\right]=rk\left[ABB^+\right]. \qquad (60)$$

Учитывая, что для обратимой матрицы $D^+=D^{-1}$, получаем в результате последовательного применения (60) к A_1 и A_2

$$rk[A_1]=rk\left[E^T\left[ER(t)E^T\right]^{-1}EE^+\right],$$

$$rk[A_2]=rk\left[B^+B\left[B^T R^{-1}(t)B\right]^{-1}B^T\right]. \qquad (61)$$

Так как по построению E – матрица с линейно независимыми строками, а B – с линейно независимыми столбцами, то $EE^+=I_{l-s}$, $B^+B=I_s$ [6]. Тогда использование (60) в (61) дает $rk[A_1]= \; =rk\left[E^T\right]=l-s$, $rk[A_2]=rk\left[B^T\right]=s$. Отсюда $rk[A_1]+ \; +rk[A_2]=l$. Из (59) получаем, что $A_1^2=A_1$, $A_2^2= \; =A_2$, то есть матрицы A_1 и A_2 являются проекционными [9]. Поскольку проекционные матрицы, удовлетворяющие условиям $A_1A_2=O$, $A_2A_1=O$ и $rk[A_1]+rk[A_2]=l$, обладают свойством $A_1+A_2=I_l$ [9], то это с учетом (59) доказывает (58), а тем самым и (50).

Докажем (49). Поскольку, доказав (50), мы тем самым доказали равенство $\tilde{\bar\Gamma}_{N+1}(\tilde\tau_N,t)=\tilde\Gamma_{N+1}(\tilde\tau_N,t)$, то доказательство (49) эквивалентно доказательству соотношению

$$\bar H^T(t)\bar R^{-1}(t)\tilde{\bar z}(t)=H^T(t)\tilde R^{-1}(t)\tilde S(t)\tilde z(t). \qquad (62)$$

Так как $\tilde{\bar z}(t)=E\tilde z(t)$, $\bar H(t)=EH(t)$, $\bar R(t)=ER(t)E^T$, то из (62) следует, что доказательство (49) сводится к доказательству (51), что завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демин Н.С., Михайлюк В.В.* Фильтрация в стохастических динамических системах при аномальных помехах в канале наблюдения. I Системы с непрерывным временем // Изв. РАН – Техн. киберн. 1994. № 4. С.17–27.
2. *Демин Н.С., Михайлюк В.В.* Фильтрация в стохастических динамических системах при аномальных помехах в канале наблюдения. II Системы с непрерывно-дискретным каналом наблюдения // Изв. РАН – Техн. киберн. 1994. № 6. С. 46–57.
3. *Абакумова О.Л., Демин Н.С., Сушко Т.В.* Фильтрация стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью. II Синтез фильтров // Автоматика и телемеханика. 1995. № 10. С. 36–49.
4. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1978.
5. *Athans M., Tse E.* A direct derivation of the optimal linear filter using the maximum principle // IEEE Tras. Autom. Control. 1967. V.AC-12. No. 6. P. 690–698.
6. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.
7. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
8. *Сейдж Э., Мелс Дж.* Теория оценивания и ее применения в связи и управлении. М.: Связь, 1976.
9. *Абгарян К.А.* Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М.: Наука, 1973.