УДК 62-50:519.2

Н.С. Демин, С.В. Рожкова, О.В. Рожкова

ФИЛЬТРАЦИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПО НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ С ПАМЯТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ АНОМАЛЬНЫХ ПОМЕХ. II. НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ

В данной работе рассматривается общая задача, постановка которой приведена в [1], когда одновременно наблюдаются процессы с непрерывным и дискретным временем. Осуществлен синтез фильтра. Доказаны свойства нечувствительности фильтра к неточному знанию матрицы интенсивности аномальных помех и оптимальности процедуры исключения аномальных компонент векторов наблюдений. Рассмотрена проблема зависимости точности оценивания от количества и структуры аномальных каналов наблюдения.

Система обозначений та же, что и в [1].

1. СИНТЕЗ ФИЛЬТРА

Утверждение 1. Пусть $f_0(t)=0$. Тогда на интервалах времени $t_m \le t < t_{m+1}$ оптимальный в среднеквадратическом смысле несмещенный в классе линейных фильтр определяется уравнениями (23) – (29) из [1] с начальными условиями

$$\mu(t_m)=\mu(t_m-0)+K_0(t_m)\tilde{\eta}(t_m); \quad (1)$$

$$\mu(\tau_k,t_m)=\mu(\tau_k,t_m-0)+K_k(t_m)\tilde{\eta}(t_m); \quad (2)$$

$$\Gamma(t_m)=\Gamma(t_m-0)-K_0(t_m)\tilde{G}_0(t_m); \quad (3)$$

$$\Gamma_{kk}(\tau_k,t_m)=\Gamma_{kk}(\tau_k,t_m-0)-K_k(t_m)\tilde{G}_k(t_m); \quad (4)$$

$$\Gamma_{0k}(\tau_k,t_m)=\Gamma_{0k}(\tau_k,t_m-0)-K_0(t_m)\tilde{G}_k(t_m); \quad (5)$$

$$\Gamma_{kl}(\tau_l,\tau_k,t_m)=\Gamma_{kl}(\tau_l,\tau_k,t_m-0)-K_k(t_m)\tilde{G}_l(t_m), \quad (6)$$

где

$$\tilde{\eta}(t_m)=\eta(t_m)-G_0(t_m)\mu(t_m-0)-\sum_{j=1}^{N}G_j(t_m)\mu(\tau_j,t_m-0); \quad (7)$$

$$\tilde{G}_0(t_m)=G_0(t_m)\Gamma(t_m-0)+\sum_{j=1}^{N}G_j(t_m)\Gamma_{0j}^T(\tau_j,t_m-0); \quad (8)$$

$$\tilde{G}_k(t_m)=G_k(t_m)\Gamma_{kk}(\tau_k,t_m-0)+\sum_{j\ne k}^{N}G_j(t_m)\Gamma_{kj}^T(\tau_j,\tau_k,t_m-0); \quad (9)$$

$$K_0(t_m)=\tilde{G}_0^T(t_m)\tilde{W}^{-1}(t_m),\quad K_k(t_m)=\tilde{G}_k^T(t_m)\tilde{W}^{-1}(t_m); \quad (10)$$

$$\tilde{W}(t_m)=W(t_m)+C\Theta(t_m)C^T; \quad (11)$$

$$W(t_m)=V(t_m)+G(t_m)\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)G^T(t_m); \quad (12)$$

$$G(t_m)=[G_0(t_m) \mid G_1(t_m) \mid \cdots \mid G_N(t_m)]; \quad (13)$$

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)=\begin{bmatrix}\Gamma(t) & \Gamma_{01}(\tau_1,t) & \Gamma_{0l}(\tau_l,t)\\ \Gamma_{01}^T(\cdot) & \Gamma_{11}(\tau_1,t) & \Gamma_{jl}(\tau_l,\tau_j,t)\\ \Gamma_{0l}^T(\cdot) & \Gamma_{jl}^T(\cdot) & \Gamma_{ll}(\tau_l,t)\end{bmatrix},$$

$$l=\overline{2;N},\ j=\overline{1;N-1},\ l>j, \quad (14)$$

а $g(t_m-0)=\lim g(t)$ при $t\uparrow t_m$, то есть обозначает решение соответствующего дифференциального уравнения для $g(t)$ на предыдущем интервале времени, которое вычисляется в точке $t=t_m$.

Сформулированный результат очевидным образом следует из Теоремы 1 в [1] и Теоремы 2 в [2] с учетом независимости $f(t_m)$ и $\xi(t_m)$.

Ведем в рассмотрение матрицу $K(t_m)$ размера $[(N+1)\,n\times q]$ вида

$$K^T(t_m)=\left[K_0^T(t_m) \mid K_1^T(t_m) \mid \cdots \mid K_N^T(t_m)\right]. \quad (15)$$

Тогда из (15) в [1], (1), (2)

$$\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m)=\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)+K(t_m)\tilde{\eta}(t_m). \quad (16)$$

Используя в (16) вместо неизвестного $f_0(t_m)$ оценку $\hat{f}(t_m)=Y(t_m)\tilde{\eta}(t_m)$ в виде линейного преобразования процесса $\tilde{\eta}(t_m)$, приходим к тому, что структура фильтра в момент времени t_m имеет вид

$$\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m)=\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)+\tilde{K}(t_m)\tilde{\eta}(t_m), \quad (17)$$

$$\tilde{K}(t_m)=K(t_m)\tilde{Y}(t_m),\ \tilde{Y}(t_m)=I_q-CY(t_m), \quad (18)$$

с условиями несмещенности

$$\tilde{Y}(t_m)C=O,\ Y(t_m)C=I_r. \quad (19)$$

В качестве критерия оптимальности фильтра в момент времени t_m выбираем среднеквадратичный критерий, то есть критерий вида $J=\mathrm{tr}[\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m)]$, где $\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m)=M\{\tilde{\mu}_{N+1}^0(\tilde{\tau}_N,t_m)\tilde{\mu}_{N+1}^{0T}(\tilde{\tau}_N,t_m)\}$. С учетом условий постановки задачи получаем, что

$$J=\mathrm{tr}[\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)]+\mathrm{tr}[K(t_m)\tilde{Y}(t_m)\tilde{W}(t_m)\tilde{Y}^T(t_m)K^T(t_m)]-\mathrm{tr}[\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)G^T(t_m)\tilde{Y}^T(t_m)K^T(t_m)]-\mathrm{tr}[K(t_m)\tilde{Y}(t_m)G(t_m)\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)]. \quad (20)$$

Итак, пришли к следующей задаче: на классе фильтров (17), удовлетворяющих условиям несмещенности (19), найти матрицу $K(t_m)$, доставляющую минимум функционалу (20).

Теорема 1. На интервалах времени $t_m\le t<t_{m+1}$ оптимальный в среднеквадратическом смысле несмещенный фильтр (ОСКСНФ) в классе линейных фильтров вида (19) из [1] и (17) определяется уравнениями (23) – (29) из [1] с начальными условиями

$$\mu(t_m)=\mu(t_m-0)+\tilde{K}_0(t_m)\tilde{\eta}(t_m); \quad (21)$$

$$\mu(\tau_k,t_m)=\mu(\tau_k,t_m-0)+\tilde{K}_k(t_m)\tilde{\eta}(t_m); \quad (22)$$

$$\Gamma(t_m)=\Gamma(t_m-0)-\tilde{K}_0(t_m)\tilde{G}_0(t_m); \quad (23)$$

$$\Gamma_{kk}(\tau_k,t_m)=\Gamma_{kk}(\tau_k,t_m-0)-\tilde{K}_k(t_m)\tilde{G}_k(t_m); \quad (24)$$

$$\Gamma_{0k}(\tau_k,t_m)=\Gamma_{0k}(\tau_k,t_m-0)-\tilde{K}_0(t_m)\tilde{G}_k(t_m); \quad (25)$$

$$\Gamma_{kl}(\tau_l,\tau_k,t_m)=\Gamma_{kl}(\tau_l,\tau_k,t_m-0)-\tilde{K}_k(t_m)\tilde{G}_l(t_m); \quad (26)$$

$$\tilde{K}_0(t_m)=K_0(t_m)\left[I_q-CY(t_m)\right];\quad \tilde{K}_k(t_m)=K_k(t_m)\left[I_q-CY(t_m)\right]; \quad (27)$$

$$Y(t_m)=\left[C^T\tilde{W}^{-1}(t_m)C\right]^{-1}C^T\tilde{W}^{-1}(t_m), \qquad (28)$$

а $\tilde{\eta}(t_m)$, $\tilde{G}_0(t_m)$, $\tilde{G}_k(t_m)$, $W(t_m)$, $\tilde{W}(t_m)$, $K_0(t_m)$, $K_k(t_m)$ определяются формулами (7) – (13).

Доказательство. Необходимое условие оптимальности $\partial J/\partial K(t_m)=0$, согласно (20), приводит к матричному алгебраическому уравнению для нахождения $K(t_m)$ вида

$$K(t_m)\tilde{Y}(t_m)\tilde{W}(t_m)\tilde{Y}^T(t_m)=$$
$$=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)G^T(t_m)\tilde{Y}^T(t_m). \qquad (29)$$

Из сравнения (29) с уравнением (33) из [1] следует, что дальнейшее доказательство будет повторять доказательство Теоремы 1 из [1] и поэтому опускается. Отметим лишь, что вместо формул (29), (39) здесь получатся их аналоги вида (28) и

$$K(t_m)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)G^T(t_m)\tilde{W}^{-1}(t_m). \qquad (30)$$

2. АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Как и в [1], считаем, что $\Phi^*(t)$ и $\Theta^*(t_m)$ – истинные, $\Phi(t)$ и $\Theta(t_m)$ – используемые в фильтре матрицы интенсивности. Тогда для $\tilde{\Gamma}^r_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m)=$ $=\mathrm{M}\left\{\tilde{\mu}^0_r(\tilde{\tau}_N,t_m)\tilde{\mu}^{0^T}_r(\tilde{\tau}_N,t_m)\right\}$, где $\tilde{\mu}^0_r(\tilde{\tau}_N,t_m)$ – ошибка реальной оценки $\tilde{\mu}^r_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m)$, получаем на основе (17) с учетом условий постановки задачи выражение

$$\tilde{\Gamma}^r_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m)=\left[I_{(N+1)n}-\tilde{K}(t_m)G(t_m)\right]\tilde{\Gamma}^r_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)\times$$
$$\times\left[I_{(N+1)n}-\tilde{K}(t_m)G(t_m)\right]^T+$$
$$+\tilde{K}(t_m)\left[V(t_m)+Cf_0(t_m)f_0^T(t_m)C^T\right]\tilde{K}(t_m)+$$
$$+\tilde{K}(t_m)C\Theta^*(t_m)C^T\tilde{K}(t_m). \qquad (31)$$

Согласно [1], $\Pi_{ij}(t_m)=\partial\tilde{\Gamma}^r_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m)\Big/\partial\Theta^*_{ij}\Big|_{\Theta^*_{ij}=\Theta_{ij}}$ является функцией чувствительности фильтра относительно (*i,j*)-го элемента матрицы интенсивности помехи $f(t_m)$ $(1\le i,j\le r)$. Непосредственные вычисления с использованием (31) дают $\Pi_{ij}(t_m)=$ $=\tilde{K}(t_m)CI_{ij}C^T\tilde{K}^T(t_m)$, где I_{ij} является матрицей размера ($r\times r$), у которой (*i,j*)-й элемент равен единице, а остальные элементы нулю. Использование (18), (19) приводит к свойству $\Pi_{ij}(t_m)=O$ для всех $i=\overline{1;r}$, $j=\overline{1;r}$. Таким образом, получили следующее утверждение.

Теорема 2. ОСКСНФ, синтезированный в п.1, является нечувствительным к неточному знанию матрицы интенсивности $\Theta(t_m)$ аномальной помехи $f(t_m)$.

3. ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПРОЦЕДУРЫ ИСКЛЮЧЕНИЯ АНОМАЛЬНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Пусть $\bar{\eta}(t_m)$ – вектор дискретных наблюдений размера $(q-r)$, который получается из вектора $\eta(t_m)$ путем исключения компонент с номерами $i_1,i_2,\cdots,i_r$, по которым действуют компоненты вектора аномальной помехи $f(t_m)$. Пусть $\bar{G}_0(t_m)$, $\bar{G}_k(t_m)$, $k=\overline{1;N}$ – матрицы размеров $[(q-r)\times n]$, а $\bar{V}(t_m)$ – матрица размера $[(q-r)\times(q-r)]$, которые получаются из матриц $G_0(t_m)$, $G_k(t_m)$ и $V(t_m)$ исключением строк и соответственно строк и столбцов с номерами $i_1,i_2,\cdots,i_r$. Тогда оптимальный в среднеквадратическом смысле фильтр, в котором используются вектора наблюдений $\bar{z}(t)$ и $\bar{\eta}(t_m)$ будем называть аналогично [1] усеченным.

Утверждение 2. Усеченный фильтр на интервалах времени $t_m\le t<t_{m+1}$ определяется для $\bar{\mu}(t)$, $\bar{\mu}(\tau_k,t)$, $\bar{\Gamma}(t)$, $\bar{\Gamma}_{kk}(\tau_k,t)$, $\bar{\Gamma}_{0k}(\tau_k,t)$, $\bar{\Gamma}_{kl}(\tau_l,\tau_k,t)$ уравнениями Утверждения 2 из [1] с начальными условиями (1) – (6) в которых $\eta(t_m)$, $\tilde{\eta}(t_m)$, $K_0(t_m)$, $K_k(t_m)$, $G_0(t_m)$, $G_k(t_m)$, $\tilde{G}_0(t_m)$, $\tilde{G}_k(t_m)$, $G(t_m)$, $V(t_m)$, $\tilde{W}(t_m)$, $\tilde{\Gamma}_{N+1}(\cdot)$ заменяются соответственно на $\bar{\eta}(t_m)$, $\bar{\tilde{\eta}}(t_m)$, $\bar{K}_0(t_m)$, $\bar{K}_k(t_m)$, $\bar{G}_0(t_m)$, $\bar{G}_k(t_m)$, $\bar{\tilde{G}}_0(t_m)$, $\bar{\tilde{G}}_k(t_m)$, $\bar{G}(t_m)$, $\bar{V}(t_m)$, $\bar{W}(t_m)$, $\bar{\tilde{\Gamma}}_{N+1}(\cdot)$.

Данное утверждение непосредственно следует из утверждения 2 из [1] и утверждения 1.

Теорема 3. Фильтр, определяемый теоремой 1, и усеченный фильтр эквивалентны.

Доказательство. Пусть t_m есть первый момент появления аномальной помехи, а это означает, что $\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)$ и $\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)$ в усеченном фильтре совпадают с соответствующими величинами в фильтре из Теоремы 1. Поскольку доказательство данной теоремы строится аналогично доказательству Теоремы 3 из [1], то выделим лишь основные моменты. Введем в рассмотрение булеву матрицу E размера $[(q-r)\times q]$, которая получается из I_q исключением строк с номерами $i_1,i_2,\cdots,i_r$. Так как $\bar{\tilde{\eta}}(t_m)=E\tilde{\eta}(t_m)$, то доказательство равенства $\bar{K}(t_m)\bar{\tilde{\eta}}(t_m)=\tilde{K}(t_m)\tilde{\eta}(t_m)$, в чем заключается доказательство теоремы, сводится, как это следует из (17), (18), (30), к доказательству матричного тождества

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)\bar{G}^T(t_m)\bar{W}^{-1}(t_m)E=$$
$$=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)G^T(t_m)\tilde{W}^{-1}(t_m)\tilde{Y}(t_m). \qquad (32)$$

Так как $\bar{G}(t_m)=EG(t_m)$, $\bar{V}(t_m)=EV(t_m)E^T$, то доказательство (32) сводится к доказательству соотношения

$$E^T\left[EW(t_m)E^T\right]^{-1}E=\tilde{W}^{-1}(t_m)\tilde{Y}(t_m). \qquad (33)$$

Из сравнения формул (51) из [1] и (33) следует, что дальнейшее доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы 3 из [1]. При этом аналогом промежуточных формул (57), (58) будут формулы

$$\tilde{W}^{-1}(t_m)-\tilde{W}^{-1}(t_m)C\left[C^T\tilde{W}^{-1}(t_m)C\right]^{-1}C^T\tilde{W}^{-1}(t_m)=$$
$$=W^{-1}(t_m)-W^{-1}(t_m)C\left[C^TW^{-1}(t_m)C\right]^{-1}C^TW^{-1}(t_m). \quad (34)$$

$$W(t_m)E^T\left[EW(t_m)E^T\right]^{-1}E+$$
$$+C\left[C^TW^{-1}(t_m)C\right]^{-1}C^TW^{-1}(t_m)=I_q. \quad (35)$$

Произвольность момента t_m следует по индукции.

4. ТОЧНОСТЬ ОЦЕНИВАНИЯ

Введем в рассмотрение булев вектор I_r размерности q, в котором компоненты с номерами $i_1,i_2,\cdots,i_r$ являются нулевыми. Под точностью оценивания $J_{(r)}(t_m)$, соответствующей вектору I_r, будем понимать величину $J_{(r)}(t_m)=\mathrm{tr}[A\tilde{\Gamma}^{(r)}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m)]$, где A – произвольная симметричная неотрицательно определенная матрица, а $\tilde{\Gamma}^{(r)}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m)$ – матрица вторых моментов ошибок оценок $\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m)$, соответствующая вектору I_r.

Теорема 4. Пусть t_m – первый момент появления аномальной помехи. Тогда для векторов $I_{(0)},I_{(1)},\ldots,$ $\cdots,I_{(q)}$, последовательно отличающихся друг от друга значением лишь одной компоненты, точности оценивания при $r=\overline{0;q-1}$ удовлетворяют неравенству

$$J_{(r+1)}(t_m)\geq J_{(r)}(t_m). \quad (36)$$

Доказательство. Рассмотрим два вектора $I_{(r_1)}$ и $I_{(r_2)}$, отличающихся друг от друга значением лишь одной компоненты, то есть $r_2=r_1+1$, и соответствующие этим векторам матрицы C_i, E_i $\left(i=\overline{1;2}\right)$. Тогда доказательство (36) сводится к доказательству неравенства $\Delta J(t_m)=J_{(r_2)}(t_m)-J_{(r_1)}(t_m)\geq 0$. Пусть $\tilde{\Gamma}^{(r_i)}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)$ – матрица вторых моментов ошибки оценки $\tilde{\mu}^{(r_i)}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t)$, соответствующей r_i, то есть матрице C_i. Тогда из (23) – (26), (14) с учетом (30) и (34) для C_i получаем

$$\tilde{\Gamma}^{(r_i)}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)-$$
$$-\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)G^T(t_m)W^{-1}(t_m)\big[I_q-$$
$$-C_iN_i^{-1}(t_m)C_i^TW^{-1}(t_m)\big]G(t_m)\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0), \quad (37)$$

где $N_i(t_m)=C_i^TW^{-1}(t_m)C_i$, $i=\overline{1;2}$. В (37) учтено, что t_m – первый момент появления аномальной помехи, поэтому $\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)=\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)=\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)$. Тогда с учетом $\mathrm{tr}[B_1B_2]=\mathrm{tr}[B_2B_1]$

$$\Delta J(t_m)=\mathrm{tr}\left[L_{1,2}(t_m)L(t_m)W^{-1}(t_m)\right]; \quad (38)$$
$$L(t_m)=G(t_m)\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)\times$$
$$\times A\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)G^T(t_m); \quad (39)$$
$$L_{1,2}(t_m)=\left[C_2N_2^{-1}(t_m)C_2^T-C_1N_1^{-1}(t_m)C_1^T\right]W^{-1}(t_m). \quad (40)$$

Так как $A\geq 0$, то $L_1(t_m)\geq 0$ [3]. Используя (35) при $C=C_2$ и $E=E_2$ из (40), получаем $L_{1,2}(t_m)=I_q-$ $-(A_{12}+A_{21})$, где

$$A_{12}=W(t_m)E_2^T\left[E_2W(t_m)E_2^T\right]^{-1}E_2,$$
$$A_{21}=C_1N_1^{-1}(t_m)C_1^TW^{-1}(t_m). \quad (41)$$

По построению матриц C_1 и E_2 имеем, что $E_2C_1=\boldsymbol{O}$. Тогда

$$A_{12}A_{21}=\boldsymbol{O},\ A_{21}A_{12}=\boldsymbol{O}. \quad (42)$$

Аналогично теореме 3 из [1] можно получить, что $\mathrm{rk}[A_{12}]=q-r_2$, $\mathrm{rk}[A_{21}]=r_1$. Из (41) следует, что $A_{12}^2=A_{12}$, $A_{21}^2=A_{21}$, то есть матрицы A_{12} и A_{21} являются проекционными [4]. Поскольку эти матрицы удовлетворяют условию (42), матрица $\tilde{A}=A_{12}+A_{21}$ также является проекционной [4] и $\mathrm{rk}[\tilde{A}]=\mathrm{rk}[A_{12}]+$ $+\mathrm{rk}[A_{21}]=q-1$, $r_2=r_1+1$. Матрица $L_{1,2}(t_m)=I_q-\tilde{A}$ также является проекционной, так как $\left(I_q-\tilde{A}\right)^2=$ $=I_q-2\tilde{A}+\tilde{A}^2=I_q-\tilde{A}$. Последнее равенство следует из того, что матрица $\tilde{A}$ – проекционная. Поскольку для проекционной матрицы ранг равен следу [4], то $\mathrm{rk}[L_{1,2}]=\mathrm{tr}[L_{1,2}]=\mathrm{tr}[I_q]-\mathrm{tr}[\tilde{A}]=\mathrm{tr}[I_q]-\mathrm{rk}[\tilde{A}]=q-(q-1)=1$. Пусть $\{\lambda_i(\Phi)\}$ $(i=1,2,\cdots)$ означает спектр матрицы Φ. Так как собственные числа проекционной матрицы равны либо 0, либо 1, а

$$\mathrm{tr}\left[L_{1,2}(t_m)\right]=\sum_{i=1}^{q}\lambda_i\left(L_{1,2}(t_m)\right)=1,$$

то $\{\lambda_i\left(L_{1,2}(t_m)\right)\}=\{0,0,\cdots,1,0,\cdots,0\}$, $i=\overline{1;q}$, то есть $L_{1,2}(t_m)\geq 0$. Так как $L(t_m)\geq 0$ $L_{1,2}(t_m)\geq 0$, то $\lambda_i\left(\tilde{L}(t_m)\right)\geq 0$, $i=\overline{1;q}$, где $\tilde{L}(t_m)=L_{1,2}(t_m)L(t_m)$ [3], то есть $\tilde{L}(t_m)\geq 0$. Так как $\tilde{L}(t_m)\geq 0$, $W^{-1}(t_m)>0$, то $\lambda_i\left(\tilde{L}(t_m)W^{-1}(t_m)\right)\geq 0$, $i=\overline{1;q}$. Следовательно,

$$\Delta J(t_m)=\mathrm{tr}\left[\tilde{L}(t_m)W^{-1}(t_m)\right]=\sum_{i=1}^{q}\lambda_i\left(\tilde{L}(t_m)W^{-1}(t_m)\right)\geq 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. Пусть

$$\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)\geq\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0), \quad (43)$$

где $r_2=r_1+1$. Тогда неравенства (36) справедливы для произвольного момента t_m.

Доказательство. Справедливость теоремы будет доказана, если из неравенства $\Delta J(t_m)\geq 0$, следующего из теоремы 4, с учетом (43), записанного для момента t_{m+1}, будет следовать неравенство $\Delta J(t_{m+1})\geq 0$. Согласно [3], $\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)$ с учетом (43) может быть представлена в виде

$$\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)=\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0)+\tilde{\Gamma},$$

где $\tilde{\Gamma}\geq 0$. Тогда из (12) следует

$$W_{(r_2)}(t_{m+1})=W_{(r_1)}(t_{m+1})+G(t_{m+1})\tilde{\Gamma}G^T(t_{m+1}). \quad (44)$$

Записывая все выражения для r_i из (23) – (26), (14) с учетом (18), (28), (30), (34), (35) следует

$$\tilde{\Gamma}^{(r_i)}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1})=\left[I_{(N+1)n}-\tilde{\Gamma}^{(r_i)}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0)G^T(t_{m+1})\times\right.$$
$$\left.\times E_i^T\left[E_iW_{(r_i)}(t_{m+1})E_i^T\right]^{-1}E_iG(t_{m+1})\right]\tilde{\Gamma}^{(r_i)}_{N+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0). \quad (45)$$

Полагая $r=r_2$ в (45) с учетом (44) получаем окончательное представление для $\tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1})$ в виде

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}) = \left[I_{(N+1)n} - \left(\tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}-0) + \tilde{\Gamma}\right)\times \right.$$
$$\times G^T(t_{m+1}) E_2^T \left[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T + \right.$$
$$\left. + E_2 G(t_{m+1}) \tilde{\Gamma} G^T(t_{m+1}) E_2^T\right]^{-1} E_2 G(t_{m+1}) \Big]\times$$
$$\times\left(\tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}-0) + \tilde{\Gamma}\right). \quad (46)$$

Введем в рассмотрение матричную функцию $\Phi(\alpha) = \tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_1)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}-0) + \alpha\tilde{\Gamma}$ скалярного переменного $\alpha \ge 0$. Рассматривая $\tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1})$ как функцию α, то есть $\tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}) = \tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}; \alpha)$, получаем из (46)

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}; \alpha) = \left[I_{(N+1)n} - \Phi(\alpha) G^T(t_{m+1}) E_2^T \times \right.$$
$$\times\left[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T + \alpha E_2 G(t_{m+1}) \tilde{\Gamma} G^T(t_{m+1}) E_2^T\right]^{-1} \times$$
$$\times E_2 G(t_{m+1})\Big] \Phi(\alpha). \quad (47)$$

Отсюда, используя формулу $dA^{-1} = -A^{-1}[dA/d\alpha]A^{-1}$, получаем

$$d\tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}; \alpha)/d\alpha = B\tilde{\Gamma}B^T; \quad (48)$$
$$B = I_{(N+1)n} - \Phi(\alpha) G^T(t_{m+1}) E_2^T \left[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T + \right.$$
$$\left. + \alpha E_2 G(t_{m+1}) \tilde{\Gamma} G^T(t_{m+1}) E_2^T\right]^{-1} E_2 G(t_{m+1}). \quad (49)$$

Так как $\tilde{\Gamma} \ge 0$, то из (48) следует, что $d\tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}; \alpha)/d\alpha \ge 0$, то есть $\tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}; \alpha)$ – монотонно неубывающая по α в смысле определенности матрица. Тогда

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}; \alpha)\big|_{\alpha=1} \ge \tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}; \alpha)\big|_{\alpha=0}. \quad (50)$$

Так как, согласно (46), (47), $\tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}) = = \tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}; \alpha)\big|_{\alpha=1}$, то из (47), (50) следует

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}) \ge \Psi, \quad (51)$$
$$\Psi = \left[I_{(N+1)n} - \tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_1)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}-0) G^T(t_{m+1}) E_2^T \times \right.$$
$$\times\left[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T\right]^{-1} E_2 G(t_{m+1})\Big] \tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_1)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}-0). \quad (52)$$

Из (35) для C_1, E_1, $W_{(r_1)}$ в момент времени t_{m+1} следует

$$E_1^T\left[E_1 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_1^T\right]^{-1} E_1 = W_{(r_1)}^{-1}(t_{m+1})\times$$
$$\times\left[I_q - C_1\left[C_1^T W_{(r_1)}^{-1}(t_{m+1}) C_1\right]^{-1} C_1^T W_{(r_1)}^{-1}(t_{m+1})\right]. \quad (53)$$

С использованием (53)

$$E_1^T\left[E_1 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_1^T\right]^{-1} E_1 - E_2^T\left[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T\right]^{-1} E_2 =$$
$$= W_{(r_1)}^{-1}(t_{m+1})\left[I_q - \left[W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T\left[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T\right]^{-1} E_2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + C_1\left[C_1^T W_{(r_1)}^{-1}(t_{m+1}) C_1\right]^{-1} C_1^T W_{(r_1)}^{-1}(t_{m+1})\right]\right]. \quad (54)$$

Из сравнения (41) и (54) следует, что аналогично доказательству $L_{1,2}(t_m) \ge 0$ может быть доказано, что

$$\tilde{L}_{1,2}(t_{m+1}) = I_q - \left[W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T\left[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T\right]^{-1} \times \right.$$
$$\left. \times E_2 + C_1\left[C_1^T W_{(r_1)}^{-1}(t_{m+1}) C_1\right]^{-1} C_1^T W_{(r_1)}^{-1}(t_{m+1})\right] \ge 0.$$

Аналогично тому, как при доказательстве теоремы 4 было доказано, что $\tilde{L}(t_m) W^{-1}(t_m) \ge 0$, может быть доказано свойство $W_{(r_1)}^{-1}(t_{m+1}) \tilde{L}_{1,2}(t_{m+1}) \ge 0$, а тем самым, что

$$E_1^T\left[E_1 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_1^T\right]^{-1} E_1 -$$
$$- E_2^T\left[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T\right]^{-1} E_2 \ge 0. \quad (55)$$

Полагая $r_i = r_1$, получаем из (45), (52) с учетом (55)

$$\Psi - \tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_1)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}) = \tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_1)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}-0) G^T(t_{m+1})\left[E_1^T \times \right.$$
$$\times\left[E_1 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_1^T\right]^{-1} E_1 - E_2^T\left[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1}) E_2^T\right]^{-1} E_2\Big]\times$$
$$\times G^T(t_{m+1}) \tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_1)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}-0) \ge 0,$$

то есть $\Psi \ge \tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_1)}(\tilde{\tau}_N,\ t_{m+1})$, а это приводит к свойству $\tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}) \ge \Gamma_{N+1}^{(r_1)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1})$. Из определения $J_{(r_i)}(t_{m+1})$ имеем

$$\Delta J(t_{m+1}) = \mathrm{tr}[A[\tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}) - \tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_1)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1})]].$$

Так как $A \ge 0$, то

$$\lambda_j(A[\tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}) - \tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_1)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1})]) \ge 0.$$

Тогда

$$\mathrm{tr}[A[\tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}) - \tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_1)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1})]] =$$
$$= \sum_{j=1}^{(N+1)n} \lambda_j(A[\tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_2)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}) - \tilde{\Gamma}_{N+1}^{(r_1)}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1})]) \ge 0. \quad (56)$$

Из (56) следует $\Delta J(t_{m+1}) \ge 0$, что и требовалось доказать.

Пример. Пусть ненаблюдаемый процесс $x(t)$ является скалярным с корреляционной функцией экспоненциального типа (процесс Орнстейна – Уленбека) и задан уравнением (1) из [1], в котором $F(t) \equiv -a$, $a > 0$, $Q(t) \equiv Q = \mathrm{const}$. Процесс $z(t)$ определяет наблюдения без памяти вида (2) из [1] при отсутствии аномальных помех, где $H_k(t) \equiv 0$, $k = \overline{1;N}$, $H_0(t) \equiv H = \mathrm{const}$, $R(t) = R = \mathrm{const}$, $B = 0$. Дискретный канал наблюдения формируется как совокупность двух скалярных каналов с полезным сигналом $X(t_m, \tau) = G_0 x(t_m) + G_1 x(\tau)$, где $G_0 = \mathrm{const}$, $G_1 = \mathrm{const}$, который наблюдается на фоне некоррелированных регулярных помех $\xi_1(t_m)$, $\xi_2(t_m)$ с одной интенсивностью $V(t_m) \equiv V = \mathrm{const}$.

Рассмотрим три случая: 1) аномальные помехи отсутствуют; 2) аномальная помеха действует по первой компоненте $\eta_1(t_m)$; 3) аномальные помехи действуют по обеим компонентам $\eta_1(t_m)$, $\eta_2(t_m)$ двумерного вектора наблюдений $\eta(t_m)$. Соответствующие этим случаям ошибки оценок интерполяции в момент t_m будем обозначать $\gamma_{11}^0(\tau, t_m)$, $\gamma_{11}^1(\tau, t_m)$, $\gamma_{11}^2(\tau, t_m)$. Дифференциальные уравнения (24) – (26) из [1], совпадающие для рассматриваемого примера с (6) – (8) из [1], допускают точные решения, стационарный вид которых при $t \to \infty$ таков (см. (3.19) в [5]):

$$\gamma = (\lambda - a)/\delta, \quad \lambda = \sqrt{a^2 + \delta Q}, \quad \delta = H_0^2/R,$$
$$\gamma_{01}(t^*) = \gamma \exp\{-\lambda t^*\}, \quad \kappa = (\lambda + a)/2\lambda,$$

$$\gamma_{11}\left(t^*\right)=\gamma\left[(1-\kappa)+\kappa\exp\left\{-2\lambda t^*\right\}\right], \qquad (57)$$

где $t^*=t-\tau$. Рассмотрим ситуацию редких дискретных наблюдений, когда интервал между соседними наблюдениями $\eta(t_{m-1})$ и $\eta(t_m)$ настолько велик, что указанные дифференциальные уравнения при $t\in[t_{m-1},t_m)$ достигает своих стационарных значений, то есть $\gamma(t_m-0)=\gamma$, $\gamma_{01}(\tau,t_m-0)=\gamma_{01}\left(t^*\right)$, $\gamma_{11}(\tau,t_m-0)=\gamma_{11}\left(t^*\right)$. Пусть $\Delta_{10}=\gamma_{11}^1(\tau,t_m)-\gamma_{11}^0(\tau,t_m)$, $\Delta_{21}=\gamma_{11}^2(\tau,t_m)-\gamma_{11}^1(\tau,t_m)$. Тогда с использованием (24) получаем

$$\Delta_{10}=\frac{V[G_0\gamma_{01}+G_1\gamma_{11}]^2}{\left[V+\left(G_0^2\gamma+G_1^2\gamma_{11}+2G_0G_1\gamma_{01}\right)\right]}\times$$
$$\times 1\Big/\left[V+2\left(G_0^2\gamma+G_1^2\gamma_{11}+2G_0G_1\gamma_{01}\right)\right], \qquad (58)$$

$$\Delta_{21}=\frac{[G_0\gamma_{01}+G_1\gamma_{11}]^2}{\left[V+\left(G_0^2\gamma+G_1^2\gamma_{11}+2G_0G_1\gamma_{01}\right)\right]}, \qquad (59)$$

где γ, γ_{01}, γ_{11} определяются формулами (57). Из (58), (59) с учетом (57) следует, что $\Delta_{10}>0$, $\Delta_{21}>0$, то есть

$$\gamma_{11}^2(\tau,t_m)>\gamma_{11}^1(\tau,t_m)>\gamma_{11}^0(\tau,t_m). \qquad (60)$$

Согласно принятым обозначениям для задачи интерполяции $\gamma_{11}^0(\tau,t_m)=J_{(0)}(t_m)$, $\gamma_{11}^1(\tau,t_m)=J_{(1)}(t_m)$, $\gamma_{11}^2(\tau,t_m)=J_{(2)}(t_m)$. Таким образом, неравенства (60) отражают свойство (36) для рассматриваемого примера относительно задачи интерполяции, причем при конечных значениях параметров достигаются строгие неравенства, означающие, что наличие аномальных каналов наблюдения только ухудшают качество интерполяции. Пусть $\tilde{\Delta}_{21}$ означает соответствующую величину для случая дискретных наблюдений без памяти $(G_1=0)$. Тогда из (59) следует, что

$$\tilde{\Delta}_{21}=G_0^2\gamma_{01}^2\Big/\left(V+G_0^2\gamma\right). \qquad (61)$$

Введем меру эффективности $\varepsilon_{21}=\Delta_{21}-\tilde{\Delta}_{21}=\varepsilon(a,Q,\delta,G_0,G_1,t^*)$ дискретных наблюдений с памятью относительно наблюдений без памяти в рассматриваемой задаче. Если $\varepsilon_{21}>0$, то наблюдения с памятью эффективнее наблюдений без памяти, а при $\varepsilon_{21}<0$ имеем обратное свойство. Исследуем зависимость ε_{21} от глубины памяти t^*.

Большая глубина памяти ($t^*\to\infty$). Пусть $\varepsilon_{21}^\infty=\lim\varepsilon_{21}$ при $t^*\to\infty$. Использование (57), (59), (61) дает, что

$$\varepsilon_{21}^\infty=G_1^2\gamma^2(1-\kappa)^2\Big/\left[V+\left(G_0^2+G_1^2\gamma^2(1-\kappa)\right)\gamma\right]. \qquad (62)$$

Из (62) следует, что $\varepsilon_{21}^\infty>0$, то есть при большой глубине памяти аномальный канал с памятью в задаче интерполяции эффективнее аномального канала без памяти, поскольку составляющая $G_1x(\tau)$ сигнала $\eta(t_m)$ в этом случае привносит дополнительную информацию.

Малая глубина памяти $\left(t^*\to 0\right)$. Пусть $\varepsilon_{21}^0=\lim\varepsilon_{21}$ при $t^*\to 0$. Использование (57), (59), (61) дает, что

$$\varepsilon_{21}^0=\left[\gamma^2V\left(G_1^2+2G_0G_1\right)\right]\times$$
$$\times 1\Big/\left[\left(V+\gamma G_0^2\right)\left[\left(V+\gamma(G_0+G_1)^2\right)\right]\right]. \qquad (63)$$

Из (63) следует, что $\varepsilon_{21}^0>0$, если $(G_0,G_1)\notin M$ и $\varepsilon_{21}^0\le 0$, если $(G_0,G_1)\in M$, где $M=\{(G_0,G_1):G_1^2+2G_0G_1\le 0\}$, то есть при малой глубине памяти аномальный канал с памятью эффективнее аномального канала без памяти в случае $(G_0,G_1)\notin M$ и менее эффективен в противоположном случае. Поскольку при малой глубине памяти $\alpha_k>>t^*$, где $\alpha_k=1/a-$ время корреляции процесса $x(t)$, то коэффициент корреляции между $x(t_m)$ и $x(\tau)$ близок к единице и сигнал $X(t_m,\tau)=G_0x(t_m)+G_1x(\tau)$ воспринимается как $X(t_m,\tau)=(G_0+G_1)x(t_m)$. Так как среднеквадратические ошибки оценок в случае наблюдений с памятью и без памяти определяются интенсивностями сигналов $X(t_m,\tau)$ и $G_0x(t_m)$, которые пропорциональны соответственно $|G_0+G_1|^2$ и $|G_1|^2$, а условие $(G_0,G_1)\in M$ означает $|G_0+G_1|\le|G_0|$, то этим и объясняется полученное свойство.

Для случая $(G_0,G_1)\in M$ величина t_{eff}^*, которая может быть определена в рассматриваемой задаче как эффективная глубина памяти определяется формулой

$$t_{\text{eff}}^*=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{|G_0|+\sqrt{|G_0|^2-\kappa(1-\kappa)|G_1|^2}}{\kappa|G_1|}, \qquad (64)$$

которая получается как единственный положительный корень уравнения $\varepsilon_{21}(t^*)=0$, причем условие $(G_0,G_1)\in M$ является условием существования такого корня.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В.* Фильтрация в динамических системах по непрерывно-дискретным наблюдениям с памятью при наличии аномальных помехах. I. Непрерывные наблюдения // Вестник ТГУ. 2003. № 280. С. 183–186.
2. *Абакумова О.Л., Демин Н.С., Сушко Т.В.* Фильтрация стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью. II Синтез фильтров // Автоматика и телемеханика. 1995. №10. С.36–49.
3. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1978.
4. *Абгарян К.А.*. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М.: Наука, 1973.
5. *Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В.* Обобщенная скользящая экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Изв. РАН. Теор. и системы упр. 2000. №4. С. 39–51.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета и кафедрой высшей математики факультета естественных наук и математики Томского политехнического университета, поступила в научную редакцию 20 мая 2003 г.