

## ИНФОРМАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ В СОВМЕСТНОЙ ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ, ИНТЕРПОЛЯЦИИ И ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ПО НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ С ПАМЯТЬЮ

*Работа поддержана грантом МД-9509.2006.1*

Рассматривается информационный аспект совместной задачи фильтрации, интерполяции и экстраполяции стохастических процессов по непрерывно-дискретным наблюдениям с фиксированной памятью. Исследуется структура количества информации.

В связи с тем что задача оценивания [1] связана с извлечением информации из наблюдений, любая статистическая задача имеет информационный аспект [2]. В [3, 4] рассмотрен информационный аспект задачи фильтрации в случае наблюдений без памяти и с памятью единичной кратности, в [5] – совместной задачи непрерывно-дискретной фильтрации и обобщенной экстраполяции в случае произвольной памяти, в [6] – исследована структура в совместной задаче фильтрации и экстраполяции с произвольной памятью, а в [7, 8] – в совместной задаче фильтрации и интерполяции. В данной работе рассматриваются вопросы нахождения шенноновской меры количества информации в совместной задаче непрерывно-дискретной фильтрации, интерполяции и экстраполяции произвольной памятью и исследована структура этого количества информации. Используемые обозначения:  $M\{\cdot\}$  – математическое ожидание;  $P\{\cdot\}$  – вероятность события;  $N\{y; a; B\}$  – гауссовская плотность.

### Постановка задачи

На вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathbf{F}, F = (F_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$  ненаблюдаемый  $n$ -мерный процесс  $x_t$  и наблюдаемый  $l$ -мерный процесс  $z_t$  определяются стохастическими дифференциальными уравнениями

$$dx_t = f(t, x_t)dt + \Phi_1(t)dw_t, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$dz_t = h(t, x_t, x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_N}, z)dt + \Phi_2(t, z)dv_t, \quad (2)$$

а наблюдаемый  $q$ -мерный процесс  $\eta(t_m)$  с дискретным временем имеет вид

$$\eta(t_m) = g(t_m, x_{t_m}, x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_N}, z) + \Phi_3(t_m, z)\xi(t_m), \quad m = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где  $0 < \tau_N < \dots < \tau_1 < t_m \leq t$ , т.е. память фиксированная [1]. Предполагается: 1)  $w_t$  и  $v_t$  являются стандартными винеровскими процессами размеров  $r_1$  и  $r_2$ ,  $\xi(t_m)$  – стандартная белая гауссовская последовательность размера  $r_3$ ; 2)  $x_0$ ,  $w_t$ ,  $v_t$ ,  $\xi(t_m)$  – статистически независимы; 3)  $f(\cdot)$ ,  $h(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$ ,  $\Phi_1(\cdot)$ ,  $\Phi_2(\cdot)$ ,  $\Phi_3(\cdot)$  непрерывны по всем аргументам; 4)  $Q(\cdot) = \Phi_1(\cdot)\Phi_1^T(\cdot) > 0$ ,  $R(\cdot) = \Phi_2(\cdot)\Phi_2^T(\cdot) > 0$ ,  $V(\cdot) = \Phi_3(\cdot)\Phi_3^T(\cdot) > 0$ ; 5) задана начальная плотность  $p_0(x) = \partial \mathbf{P}\{x_0 \leq x\} / \partial x$ .

В целях более компактной записи математических выражений введем оператор

$$\begin{aligned} L_{\sigma, y} [\varphi_1(\sigma, y); \varphi_2(\sigma, y)] = \\ = \frac{\varphi_1(\sigma, y)}{\varphi_2(\sigma, y)} L_{\sigma, y} [\varphi_2(\sigma, y)] - \varphi_2(\sigma, y) L_{\sigma, y}^* \left[ \frac{\varphi_1(\sigma, y)}{\varphi_2(\sigma, y)} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $L_{\sigma, y}[\varphi(\sigma, y)]$  и  $L_{\sigma, y}^*[\varphi(\sigma, y)]$  – прямой и обратный операторы Колмогорова, соответствующие процессу (1), и расширенные переменные

$$\begin{aligned} \tilde{x}_\tau^N = \begin{bmatrix} x_{\tau_1} \\ \vdots \\ x_{\tau_N} \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_s^L = \begin{bmatrix} x_{s_1} \\ \vdots \\ x_{s_L} \end{bmatrix}, \\ \tilde{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}^L = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^L \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_{N+L+1} = \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x}_N^L \\ \tilde{x}^L \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Ставится задача:** найти информационное количество

$$\begin{aligned} I_{\tau, t, s}^t [\tilde{x}_\tau^N, x_t, \tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^m] = \\ = M \left\{ \ln \frac{P_{\tau, \tau, s}^t(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{P(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t; x_t; \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

о текущих  $x_t$ , прошлых  $\tilde{x}_\tau^N = \{x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \dots, x_{\tau_N}\}$  и будущих  $\tilde{x}_s^L = \{x_{s_1}, x_{s_2}, \dots, x_{s_L}\}$  значениях ненаблюдаемого процесса, которые содержатся в совокупности реализаций  $z_0^t = \{z(\sigma); 0 \leq \sigma \leq t\}$  и  $\eta_0^m = \{\eta(t_0), \eta(t_1), \dots, \eta(t_m)\}$  наблюдаемых процессов (2), (3), где

$$\begin{aligned} p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L) = \\ = \partial^{N+L+1} \mathbf{P} \{x_t \leq x; \tilde{x}_\tau^N \leq \tilde{x}_N; \tilde{x}_s^L \leq \tilde{x}^L\} / \partial x \partial \tilde{x}_N \partial \tilde{x}^L, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} P_{\tau, \tau, s}^t(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L) = \\ = \partial^{N+L+1} \mathbf{P} \{x_t \leq x; \tilde{x}_\tau^N \leq \tilde{x}_N; \tilde{x}_s^L \leq \tilde{x}^L | z_0^t, \eta_0^m\} / \partial x \partial \tilde{x}_N \partial \tilde{x}^L. \end{aligned} \quad (7)$$

### Общий случай

**Утверждение 1.** Плотность (7) на интервалах  $t_m \leq t < t_{m+1}$  определяется уравнением

$$\begin{aligned} & d_t p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L) = \\ & = \mathbf{L}_{t,x} \left[ p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L); p_t(x; \tilde{x}_N) \right] dt + p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L) \times \\ & \quad \times \left[ h(t, x, \tilde{x}_N, z) - \overline{h(t, z)} \right]^T R^{-1}(t, z) \left[ dz_t - \overline{h(t, z)} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

с начальным условием

$$\begin{aligned} & p'_{\tau,t_m,s}(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L) = \\ & = \left[ c(x, \tilde{x}_N; \eta(t_m), z) / c(\eta(t_m), z) \right] p'^{m-0}_{\tau,t_m,s}(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L), \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & p_t(x; \tilde{x}_N) = \partial^{N+1} \mathbf{P} \left\{ x_t \leq x; \tilde{x}_\tau^N \leq \tilde{x}_N \mid z_0^t, \eta_0^m \right\} / \partial x \partial \tilde{x}_N, \\ & \overline{h(t, z)} = M \left\{ h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) \mid z_0^t, \eta_0^m \right\}, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c(x, \tilde{x}_N, \eta(t_m), z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\eta(t_m) - g(t_m, x, \tilde{x}_N, z)]^T \times \right. \\ & \quad \left. \times V^{-1}(t_m, z) [\eta(t_m) - g(t_m, x, \tilde{x}_N, z)] \right\}, \end{aligned}$$

$$c(\eta(t_m), z) = M \left\{ c(x_{t_m}, \tilde{x}_\tau^N, \eta(t_m), z) \mid z_0^t, \eta_0^{m-1} \right\},$$

а  $p'^{m-0}_{\tau,t_m,s}(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L) = \lim p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L)$  при  $t \uparrow t_m$ .

Данное утверждение следует из теоремы 1 и следствия 1 в [1].

**Теорема 1.** Количество информации (5) на интервалах  $t_m \leq t < t_{m+1}$  определяется уравнением

$$\begin{aligned} & \frac{dI'_{\tau,t,s}[\tilde{x}_\tau^N, x_t, \tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^m]}{dt} = \\ & = \frac{1}{2} tr \left[ M \left\{ R^{-1}(t, z) \left[ h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) - \overline{h(t, z)} \right] \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \left[ h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) - \overline{h(t, z)} \right]^T \right\} \right] + \\ & + tr \left[ Q(t) M \left\{ \left[ \frac{\partial \ln p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} - \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right] \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \left( \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T \right\} \right] - \\ & - tr \left[ Q(t) M \left\{ \left[ \frac{\partial \ln p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t; \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} - \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\partial \ln p(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right] \left( \frac{\partial \ln p(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T \right\} \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} tr \left[ Q(t) M \left\{ \frac{\partial \ln p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \left( \frac{\partial \ln p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \right)^T - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\partial \ln p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t; \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \left( \frac{\partial \ln p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t; \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \right)^T \right\} \right] \quad (11) \end{aligned}$$

с начальным условием

$$\begin{aligned} & I'_{\tau,t_m,s}[\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}, \tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^m] = \\ & = I'^{m-0}_{\tau,t_m-0,s}[\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}, \tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^{m-1}] + \\ & + \Delta I'_{\tau,t_m,s}[\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}, \tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta(t_m)], \quad (12) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} & p(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N) = \partial^{N+1} \mathbf{P} \left\{ x_t \leq x; \tilde{x}_\tau^N \leq \tilde{x}_N \right\} / \partial x \partial \tilde{x}_N, \\ & \Delta I'_{\tau,t_m,s}[\cdot] = M \left\{ \frac{c(x_{t_m}, \tilde{x}_\tau^N, \eta(t_m), z)}{c(\eta(t_m), z)} \right\}, \end{aligned}$$

а  $I'^{m-0}_{\tau,t_m-0,s}[\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}, \tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^{m-1}] = \lim I'_{\tau,t,s}[\cdot]$  при  $t \uparrow t_m$ .

*Доказательство.* Совместная априорная плотность (6) определяется уравнением

$$\begin{aligned} & d_t p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L) = \\ & = \mathbf{L}_{t,x} \left[ p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L); p(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N) \right] dt, \end{aligned}$$

которое следует из (8). Обновляющий процесс  $\tilde{z}_t$ , дифференциал которого имеет вид  $d\tilde{z}_t = dz_t - \overline{h(t, z)} dt$ , является таким, что  $Z_t = (\tilde{z}_t, F_t^z)$  есть винеровский процесс с  $M\{\tilde{z}_t, \tilde{z}_t^T | F_t^z\} = \int_0^t R(\tau, z) d\tau$  [9]. Тогда дифференцирование по формуле Ито дает, что

$$\begin{aligned} & d_t \ln \frac{p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L)}{p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L)} = \\ & = \frac{1}{p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L)} \mathbf{L}_{t,x} \left[ p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L); p_t(x; \tilde{x}_N) \right] dt - \\ & \quad - \frac{1}{p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L)} \times \\ & \quad \times \mathbf{L}_{t,x} \left[ p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L); p(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N) \right] dt - \\ & \quad - \frac{1}{2} \left[ h(t, x, \tilde{x}_N, z) - \overline{h(t, z)} \right]^T R^{-1}(t, z) \times \\ & \quad \times \left[ h(t, x, \tilde{x}_N, z) - \overline{h(t, z)} \right] dt + \\ & \quad + \left[ h(t, x, \tilde{x}_N, z) - \overline{h(t, z)} \right]^T R^{-1}(t, z) \left[ dz_t - \overline{h(t, z)} \right]. \end{aligned}$$

Применяя к последнему выражению формулу Ито–Вентцеля, получаем аналогично [3, 4, 7], что

$$\begin{aligned}
& d_t \ln \frac{p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t; \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)} = \\
& = \frac{1}{2} \left[ h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) - \overline{h(t, z)} \right]^T R^{-1}(t, z) \times \\
& \quad \times \left[ h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) - \overline{h(t, z)} \right] dt + \\
& \quad + tr \left[ Q(t) \left[ \frac{1}{p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)} \frac{\partial^2 p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t^2} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{p(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N)} \frac{\partial^2 p(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t^2} \right] \right] dt + \\
& \quad + tr \left[ Q(t) \left[ \frac{\partial \ln p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right] \left( \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T \right] dt - \\
& \quad - tr \left[ Q(t) \left[ \frac{\partial \ln p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t; \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\partial \ln p(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right] \left( \frac{\partial \ln p(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T \right] dt - \\
& \quad - \frac{1}{2} tr \left[ Q(t) \left[ \frac{\partial \ln p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} (\cdot)^T - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\partial \ln p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t; \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} (\cdot)^T \right] \right] dt + \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x_t} \ln \frac{p'_{\tau,t,s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t; \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)} \Phi_1(t) dw_t + \\
& \quad + \left[ h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) - \overline{h(t, z)} \right]^T R^{-1}(t, z) \Phi_2(t, z) dv_t.
\end{aligned}$$

Дальнейшие преобразования по выводу уравнения (11) повторяют преобразования по выводу уравнения (3.8) в [5], а подстановка (9) в (5) приводит к (12). Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть

$$\begin{aligned}
& I'_{\tau,t|s} \left[ \tilde{x}_\tau^N, x_t, z_0^t, \eta_0^m \mid \tilde{x}_s^L \right] = \\
& = M \left\{ \ln \frac{p'_{\tau,t|s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t \mid \tilde{x}_s^L)}{p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t \mid \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)} \right\}, \\
& p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t \mid \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L) = \\
& = \partial^{N+1} P \left\{ \tilde{x}_\tau^N \leq \tilde{x}_N; x_t \leq x \mid \tilde{x}_s^L = \tilde{x}^L \right\} / \partial \tilde{x}_N \partial x, \\
& p'_{\tau,t|s}(\tilde{x}_\tau^N; x \mid \tilde{x}_s^L) = \\
& = \partial^{N+1} P \left\{ \tilde{x}_\tau^N \leq \tilde{x}_N; x_t \leq x \mid \tilde{x}_s^L = \tilde{x}^L, z_0^t, \eta_0^m \right\} / \partial \tilde{x}_N \partial x
\end{aligned} \tag{13}$$

есть условное количество информации о прошлых и текущих значениях процесса  $x_t$  при фиксированных будущих значениях этого процесса, которое содержится в совокупности реализаций  $\{z_0^t; \eta_0^m\}$ ,

$$I'_s \left[ \tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^m \right] = M \left\{ \ln \frac{p'_s(\tilde{x}_s^L)}{p(\tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)} \right\} \tag{14}$$

есть количество информации о будущих значениях процесса  $x_t$ , которое содержится в совокупности реализаций  $\{z_0^t; \eta_0^m\}$ . Тогда количество информации (5) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
& I'_{\tau,t|s} \left[ \tilde{x}_\tau^N, x_t, \tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^m \right] = \\
& = I'_{\tau,t|s} \left[ \tilde{x}_\tau^N, x_t; z_0^t, \eta_0^m \mid \tilde{x}_s^L \right] + I'_s \left[ \tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^m \right],
\end{aligned}$$

где  $I'_{\tau,t|s} \left[ \tilde{x}_\tau^N, x_t; z_0^t, \eta_0^m \mid \tilde{x}_s^L \right]$  и  $I'_s \left[ \tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^m \right]$  на интервалах  $t_m \leq t < t_{m+1}$  определяются уравнениями

$$\begin{aligned}
& \frac{dI'_{\tau,t|s} \left[ \tilde{x}_\tau^N, x_t; z_0^t, \eta_0^m \mid \tilde{x}_s^L \right]}{dt} = \\
& = \frac{1}{2} tr \left[ M \left\{ R^{-1}(t, z) \left[ h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) - \overline{h(\tilde{\tau}_N, t, z \mid \tilde{x}_s^L)} \right] \times \right. \right. \\
& \quad \times \left. \left. \left[ h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) - \overline{h(\tilde{\tau}_N, t, z \mid \tilde{x}_s^L)} \right]^T \right] \right\} \right] + \\
& \quad + tr \left[ Q(t) M \left\{ \left[ \frac{\partial \ln p'_{\tau,t|s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t \mid \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} - \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right] \times \right. \right. \\
& \quad \times \left. \left. \left( \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T \right] \right\} \right] - \\
& \quad - tr \left[ Q(t) M \left\{ \left[ \frac{\partial \ln p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t \mid \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \frac{\partial \ln p(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right] \left( \frac{\partial \ln p(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T \right] \right\} \right] - \\
& \quad - \frac{1}{2} tr \left[ Q(t) M \left\{ \left[ \frac{\partial \ln p'_{\tau,t|s}(\tilde{x}_\tau^N; x_t \mid \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} (\cdot)^T - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \frac{\partial \ln p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x_t \mid \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} (\cdot)^T \right] \right\} \right],
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{dI'_s \left[ \tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^m \right]}{dt} = \\
& = \frac{1}{2} tr \left[ M \left\{ R^{-1}(t, z) \left[ h(\tilde{\tau}_N, t, z \mid \tilde{x}_s^L) - \overline{h(t, z)} \right] \left[ \cdot \right]^T \right\} \right]
\end{aligned} \tag{16}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned}
& I_{\tau, t_m | s}^{t_m} \left[ \tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta_0^m \mid \tilde{x}_s^L \right] = \\
& = I_{\tau, t_m | s}^{t_m-0} \left[ \tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1} \mid \tilde{x}_s^L \right] + \\
& + \Delta I_{\tau, t_m | s}^{t_m} \left[ \tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta(t_m) \mid \tilde{x}_s^L \right],
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
& I_s^{t_m} \left[ \tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^m \right] = \\
& = I_s^{t_m-0} \left[ \tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^{m-1} \right] + \Delta I_s^{t_m} \left[ \tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta(t_m) \right],
\end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned}
\overline{h(\tilde{\tau}_N, t, z \mid \tilde{x}_s^L)} &= M \left\{ h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) \mid \tilde{x}_s^L = \tilde{x}^L, z_0^t, \eta_0^m \right\}, \\
\Delta I_{\tau, t_m | s}^{t_m} \left[ \tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta(t_m) \mid \tilde{x}_s^L \right] &= \\
& = M \left\{ \ln \frac{c(x_{t_m}, \tilde{x}_\tau^N, \eta(t_m), z)}{c(\eta(t_m), z \mid \tilde{x}_s^L)} \right\},
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
\Delta I_s^{t_m} \left[ \tilde{x}_s^L; z_0^{t_m}, \eta(t_m) \right] &= \\
& = M \left\{ \ln \frac{c(\eta(t_m), z \mid \tilde{x}_s^L)}{c(\eta(t_m), z)} \right\}, \\
& c(\eta(t_m), z \mid \tilde{x}_s^L) = \\
& = M \left\{ c(x_{t_m}, \tilde{x}_\tau^N, \eta(t_m), z) \mid \tilde{x}_s^L = \tilde{x}^L, z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1} \right\},
\end{aligned} \tag{20}$$

а  $I_{\tau, t_m | s}^{t_m-0} [\cdot] = \lim I_{\tau, t | s}^t [\cdot]$ ,  $I_s^{t_m-0} [\cdot] = \lim I_s^t [\cdot]$  при  $t \uparrow t_m$ .

*Доказательство.* По формуле условной вероятности

$$p_{\tau, t | s}^t(\tilde{x}_N; x \mid \tilde{x}^L) = p_{\tau, t, s}^t(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L) / p_s^t(\tilde{x}^L). \tag{21}$$

Интегрируя (8) слева и справа по  $x$ ,  $\tilde{x}_N$ , получаем с учетом (21), что апостериорная плотность  $p_s^t(\tilde{x}^L)$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}
& d_t p_s^t(\tilde{x}^L) = p_s^t(\tilde{x}^L) \times \\
& \times \left[ \overline{h(\tilde{\tau}_N, t, z \mid \tilde{x}^L)} - \overline{h(t, z)} \right]^T R^{-1}(t, z) \left[ dz_t - \overline{h(t, z)} dt \right].
\end{aligned} \tag{22}$$

Дифференцируя (21) по формуле Ито с использованием (8), (22), получаем

$$\begin{aligned}
& d_t p_{\tau, t | s}^t(\tilde{x}_N; x \mid \tilde{x}^L) = \\
& = \mathbf{L}_{t, x} \left[ p_{\tau, t | s}^t(\tilde{x}_N; x \mid \tilde{x}^L); p_t(x; \tilde{x}_N) \right] dt + \\
& + p_{\tau, t | s}^t(\tilde{x}_N; x \mid \tilde{x}^L) \left[ h(t, x, \tilde{x}_N, z) - \overline{h(\tilde{\tau}_N, t, z \mid \tilde{x}^L)} \right]^T \times \\
& \times R^{-1}(t, z) \left[ dz_t - h(\tilde{\tau}_N, t, z \mid \tilde{x}^L) dt \right].
\end{aligned}$$

Априорная плотность  $p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x \mid \tilde{s}_L, \tilde{x}^L)$  определяется уравнением

$$\begin{aligned}
& d_t p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x \mid \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L) = \\
& = \mathbf{L}_{t, x} \left[ p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N; t, x \mid \tilde{s}_L, \tilde{x}_s^L); p(t, x; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N) \right] dt,
\end{aligned}$$

которое следует из предыдущего уравнения. Дальнейший вывод уравнения (15) проводится с использованием формул Ито и Ито–Венцеля по методике вывода уравнения (11). Уравнение (16) выводится аналогично (15) с использованием (22), и при этом учитывается, что  $d_t p(\tilde{s}_L; \tilde{x}^L) = 0$ . Интегрирование (9) слева и справа по  $\tilde{x}^L$  дает, с учетом (21),

$$p_s^{t_m}(\tilde{x}^L) = \frac{c(\eta(t_m), z \mid \tilde{x}_s^L)}{c(\eta(t_m), z)} p_s^{t_m-0}(\tilde{x}^L). \tag{23}$$

Поделив (9) на (23), получаем, с учетом (21),

$$\begin{aligned}
& P_{\tau, t_m | s}^{t_m}(\tilde{x}_N; x \mid \tilde{x}^L) = \\
& = \frac{c(x_{t_m}, \tilde{x}_N, \eta(t_m), z)}{c(\eta(t_m), z \mid \tilde{x}^L)} P_{\tau, t_m | s}^{t_m-0}(\tilde{x}_N; x \mid \tilde{x}^L).
\end{aligned} \tag{24}$$

Использование (24) в (13) приводит, с учетом (19), к (17). Использование (23) в (14) приводит, с учетом (20), к (18). Теорема доказана.

## Условно-гауссовский случай

**Утверждение 2.** Пусть

$$\begin{aligned}
f(\cdot) &= F(t)x_t, \quad p_0(x) = \mathbf{N}\{x; \mu_0; \Gamma_0\}, \\
h(\cdot) &= H_0(t, z)x_t + \sum_{k=1}^N H_k(t, z)x_{\tau_k}, \\
g(\cdot) &= G_0(t_m, z)x_t + \sum_{k=1}^N G_k(t_m, z)x_{\tau_k}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Тогда имеет место свойство

$$\begin{aligned}
& p_{\tau, t, s}^t(\tilde{x}_N; x; \tilde{x}^L) = \\
& = \mathbf{N} \left\{ \tilde{x}_{N+L+1}; \tilde{\mu}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L), \tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L) \right\} = \\
& = \mathbf{N} \left[ \begin{array}{c} x \\ \tilde{x}_N \\ \tilde{x}^L \end{array}; \begin{array}{c} \mu(t) \\ \tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N, t) \\ \tilde{\mu}^L(\tilde{s}_L, t) \end{array} \right], \\
& \left[ \begin{array}{ccc} \Gamma(t) & \tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N, t) & \tilde{\Gamma}_{0, N+1}^L(\tilde{s}_L, t) \\ \tilde{\Gamma}_{0N}^T(\cdot) & \tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N, t) & \tilde{\Gamma}_{N, N+1}^L(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L) \\ (\tilde{\Gamma}_{0, N+1}^L(\cdot))^T & (\tilde{\Gamma}_{N, N+1}^L(\cdot))^T & \tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L, t) \end{array} \right],
\end{aligned} \tag{26}$$

где блочные составляющие параметров распределения (26) определяются дифференциально-рекуррентными уравнениями в [1].

**Теорема 3.** Пусть выполняется условие (25). Тогда количество информации (5) на интервалах  $t_m \leq t < t_{m+1}$  определяется уравнением

$$\begin{aligned} & \frac{dI'_{\tau,t,s}[\tilde{x}_\tau^N, x_t, \tilde{x}_s^L; z_0^m, \eta_0^m]}{dt} = \\ & = (1/2) \text{tr} \left[ M \left\{ R^{-1}(t, z) H_{0,N}(t, z) \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) H_{0,N}^T(t, z) \right\} \right] - \\ & - (1/2) \text{tr} \left[ Q(t) M \left\{ \Gamma^{-1}(t | \tilde{s}_L) + \Gamma^{-1}(t | \tilde{\tau}_N) - \Gamma^{-1}(t) \right\} \right] + \\ & + (1/2) \text{tr} \left[ Q(t) \left[ D^{-1}(t | \tilde{s}_L) + D^{-1}(t | \tilde{\tau}_N) - D^{-1}(t) \right] \right] \end{aligned} \quad (27)$$

с начальным условием (12), где

$$\begin{aligned} & \Delta I'_{\tau,t_m,s}[\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}, \tilde{x}_s^L; z_0^m, \eta(t_m)] = \\ & = \frac{1}{2} M \left\{ \ln \frac{|\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L)|}{|\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m, \tilde{s}_L)|} \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$H_{0,N}(t, z) = [H_0(t, z) | H_1(t, z) | \dots | H_N(t, z)],$$

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) = \begin{bmatrix} \Gamma(t) & \tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N, t) \\ \tilde{\Gamma}_{0N}^T(\tilde{\tau}_N, t) & \tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N, t) \end{bmatrix},$$

$$\Gamma(t | \tilde{\tau}_N) = \Gamma(t) - \tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N, t) \tilde{\Gamma}_N^{-1}(\tilde{\tau}_N, t) \tilde{\Gamma}_{0N}^T(\tilde{\tau}_N, t), \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \Gamma(t | \tilde{s}_L) = \Gamma(t) - \tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(\tilde{s}_L, t) \times \\ & \times (\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L, t))^{-1} (\tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(\tilde{s}_L, t))^T, \end{aligned} \quad (30)$$

$$D(t | \tilde{\tau}_N) = D(t) - \tilde{D}_{0N}(\tilde{\tau}_N, t) \tilde{D}_N^{-1}(\tilde{\tau}_N, t) \tilde{D}_{0N}^T(\tilde{\tau}_N, t), \quad (31)$$

$$D(t | \tilde{s}_L) = D(t) - \tilde{D}_{0,N+1}^L(\tilde{s}_L, t) (\tilde{D}^L(\tilde{s}_L, t))^{-1} (\tilde{D}_{0,N+1}^L(\tilde{s}_L, t))^T,$$

$$D(t), \tilde{D}_{0N}(\tilde{\tau}_N, t), \tilde{D}_N(\tilde{\tau}_N, t), \tilde{D}_{0,N+1}^L(\tilde{s}_L, t).$$

$\tilde{D}^L(\tilde{s}_L, t)$  – блочные составляющие матрицы вторых

моментов априорного гауссовского распределения  $p(\tilde{x}_N, \tilde{x}_N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L) = \mathbf{N}\{\tilde{x}_{N+L+1}; \tilde{a}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L),$

$\tilde{D}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L)\}$ , блочная структура параметров которого аналогична блочной структуре параметров распределения (26).

*Доказательство.* По свойству гауссовских плотностей имеет место свойство [9]:

$$p'_{t|\tau}(x | \tilde{x}_N) = \mathbf{N}\{x; \mu(t | \tilde{\tau}_N), \Gamma(t | \tilde{\tau}_N)\}, \quad (32)$$

$$\mu(t | \tilde{\tau}_N) = \mu(t) + \tilde{\Gamma}_{0N}(\tilde{\tau}_N, t) (\tilde{\Gamma}_N(\tilde{\tau}_N, t))^{-1} [\tilde{x}_N - \tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N, t)],$$

а  $\Gamma(t | \tilde{\tau}_N)$  определено в (29). Из (10), (25), (26) следует, что

$$\overline{h(t, z)} = H_{0,N}(t, z) \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t),$$

$$h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) - \overline{h(t, z)} = H_{0,N}(t, z) [\tilde{x}_\tau^{N+1} - \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t)],$$

$$\begin{aligned} & M \left\{ \left[ h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) - \overline{h(t, z)} \right] \left[ h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) - \overline{h(t, z)} \right]^T \right\} = \\ & = H_{0,N}(t, z) \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) H_{0,N}^T(t, z), \end{aligned} \quad (33)$$

где  $\mu_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) = \begin{bmatrix} \mu(t) \\ \tilde{\mu}_N(\tilde{\tau}_N, t) \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{x}_\tau^{N+1} = \begin{bmatrix} x_t \\ \tilde{x}_\tau^N \end{bmatrix}$ .

Так как  $p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N) = p_{t|\tau}(x_t | \tilde{x}_\tau^N) p_t(\tilde{x}_\tau^N)$ , то, с учетом (32),

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} = \frac{\partial \ln p_{t|\tau}(x_t | \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} = \\ & = -\Gamma^{-1}(t | \tilde{\tau}_N) [x_t - \mu(t | \tilde{\tau}_N)], \\ & M \left\{ \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \left( \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T \right\} = \\ & = \Gamma^{-1}(t | \tilde{\tau}_N). \end{aligned} \quad (34)$$

По формуле условной вероятности

$$\begin{aligned} & p'_{\tau,t,s}(x_t; \tilde{x}_\tau^N; \tilde{x}_s^L) = \\ & = \frac{p_{t|s}(x_t | \tilde{x}_s^L)}{p_t(x_t)} p_{t|\tau}(x_t | \tilde{x}_\tau^N) p_t(\tilde{x}_\tau^N) p_s(\tilde{x}_s^L). \end{aligned} \quad (35)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & M \left\{ \frac{\partial \ln p'_{\tau,t,s}(x_t; \tilde{x}_\tau^N; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \left( \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T \right\} = \\ & = M \left\{ \frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t | \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \left( \frac{\partial \ln p_{t|\tau}(x_t | \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T \right\} + \\ & + M \left\{ \frac{\partial \ln p_{t|\tau}(x_t | \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \left( \frac{\partial \ln p_{t|\tau}(x_t | \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T \right\} - \\ & - M \left\{ \frac{\partial \ln p_t(x_t)}{\partial x_t} \left( \frac{\partial \ln p_{t|\tau}(x_t | \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Аналогично (32)

$$\begin{aligned} & p_{t|s}(x | \tilde{x}^L) = \mathbf{N}\{x; \mu(t | \tilde{s}_L), \Gamma(t | \tilde{s}_L)\}, \\ & \mu(t | \tilde{s}_L) = \mu(t) + \\ & + \tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(\tilde{s}_L, t) (\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L, t))^{-1} [\tilde{x}^L - \tilde{\mu}^L(\tilde{s}_L, t)], \end{aligned} \quad (37)$$

а  $\Gamma(t | \tilde{s}_L)$  определено в (30).

Так как  $p'_s(x_t; \tilde{x}_s^L) = p_{t|s}(x_t | \tilde{x}_s^L) p_s(\tilde{x}_s^L)$ , то, с учетом (37),

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \ln p'_s(x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} = \frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t | \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} = \\ & = -\Gamma^{-1}(t | \tilde{s}_L) [x_t - \mu(t | \tilde{s}_L)]. \end{aligned} \quad (38)$$

Тогда из (34), (38), с учетом (32), (37), следует, что

$$M \left\{ \frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t | \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \left( \frac{\partial \ln p_{t|\tau}(x_t | \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T \right\} = \Gamma^{-1}(t). \quad (39)$$

Так как  $p_t(x) = \mathbf{N}\{x; \mu(t), \Gamma(t)\}$  [9], то

$$\frac{\partial \ln p_t(x_t)}{\partial x_t} = -\Gamma^{-1}(t)[x_t - \mu(t)], \quad (40)$$

и, с учетом (32), (34),

$$M \left\{ \frac{\partial \ln p_t(x_t)}{\partial x_t} \left( \frac{\partial \ln p_{t|\tau}(\tilde{x}_t^N | \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T \right\} = \Gamma^{-1}(t). \quad (41)$$

Тогда из (34), (36), (39)–(41) следует

$$M \left\{ \left[ \frac{\partial \ln p_{\tau,t,s}^t(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} - \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right] \times \left( \frac{\partial \ln p_t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t} \right)^T \right\} = 0. \quad (42)$$

Из (38) следует

$$M \left\{ \frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t | \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \left( \frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t | \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \right)^T \right\} = \Gamma^{-1}(t | \tilde{s}_L). \quad (43)$$

Из (37), (38), (40) следует

$$M \left\{ \frac{\partial \ln p_{t|s}(x_t | \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \left( \frac{\partial \ln p_t(x_t)}{\partial x_t} \right)^T \right\} = \Gamma^{-1}(t). \quad (44)$$

Из (34), (39), (41), (43), (44) следует

$$M \left\{ \frac{\partial \ln p_{\tau,t,s}^t(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \left( \frac{\partial \ln p_{\tau,t,s}^t(\tilde{x}_\tau^N; x_t; \tilde{x}_s^L)}{\partial x_t} \right)^T \right\} = \Gamma^{-1}(t | \tilde{s}_L) + \Gamma^{-1}(t | \tilde{\tau}_N) - \Gamma^{-1}(t). \quad (45)$$

При условиях (25) априорная плотность (6) является гауссовской, т.е.

$$p(\tilde{\tau}_N, \tilde{x}_N; t, x; \tilde{s}_L, \tilde{x}^L) = \mathbf{N}\{\tilde{x}_{N+L+1}; \tilde{x}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L), \tilde{D}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L)\}. \quad (46)$$

Тогда для плотности (46) будут справедливы формулы, аналогичные (42), (45). Подстановка (33), (37), (45) и формул, связанных с (46), аналогичных (42), (45), в (11) приводит к (27). Из (9), (26) следует, что

$$M \left\{ \ln \frac{c(x_m, \tilde{x}_\tau^N, \eta(t_m), z)}{c(\eta(t_m), z)} \right\} = \frac{1}{2} M \left\{ \ln \frac{|\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L)|}{|\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m, \tilde{s}_L)|} \right\},$$

т.е. с учетом (12) пришли к (28). Теорема доказана.

**Теорема 4.** Количества информации (13) и (14) на интервалах  $t_m \leq t < t_{m+1}$  определяются уравнениями

$$\frac{dI_{\tau,t|s}^t[\tilde{x}_\tau^N, x_t; z_0^t, \eta_0^m | \tilde{x}_s^L]}{dt} = \frac{1}{2} tr \left[ M \left\{ R^{-1}(t, z) [H_{0,N}(t, z) \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) H_{0,N}^T(t, z) - \tilde{H}_L(t) (\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L, t))^{-1} \tilde{H}_L^T(t, z)] \right\} \right] + \quad (47)$$

$$+ \frac{1}{2} tr \left[ Q(t) [D^{-1}(t | \tilde{s}_L) + D^{-1}(t | \tilde{\tau}_N) - D^{-1}(t) - [\Gamma^{-1}(t | \tilde{s}_L) + \Gamma^{-1}(t | \tilde{\tau}_N) - \Gamma^{-1}(t)]] \right],$$

$$\frac{dI_s^t[\tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^m]}{dt} = \quad (48)$$

$$= \frac{1}{2} tr \left[ M \left\{ R^{-1}(t, z) \tilde{H}_L(t, z) (\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L, t))^{-1} \tilde{H}_L^T(t, z) \right\} \right],$$

с начальными условиями (17), (18), где

$$\Delta I_{\tau,t_m|s}^{t_m}[\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta(t_m) | \tilde{x}_s^L] = \frac{1}{2} \ln \frac{|\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0 | \tilde{s}_L)|}{|\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t_m | \tilde{s}_L)|}, \quad (49)$$

$$\Delta I_s^{t_m}[\tilde{x}_s^L; z_0^{t_m}, \eta(t_m)] = \frac{1}{2} \ln \frac{|\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L, t_m - 0)|}{|\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L, t_m)|}, \quad (50)$$

$$\tilde{H}_{N+l}(t, z) = H_0(t, z) \Gamma_{0,N+1}^l(s_l, t) + \sum_{k=1}^N H_k(t, z) \Gamma_{k,N+1}^l(\tau_k, s_l, t), \quad l = \overline{1; L},$$

$$\tilde{H}_L(t, z) = [\tilde{H}_{N+1}(t, z) | \dots | \tilde{H}_{N+L}(t, z)], \quad (51)$$

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t | \tilde{s}_L) = \tilde{\Gamma}_{N+1}(\cdot) - \left[ \tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(\cdot) \right] (\tilde{\Gamma}^L(\cdot))^{-1} \left[ \tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(\cdot) \right]^T \left[ \tilde{\Gamma}_{N,N+1}^L(\cdot) \right].$$

*Доказательство.* По свойству гауссовских плотностей имеет место свойство [9]:

$$p_{\tau,t|s}^t(\tilde{x}_N; x | \tilde{x}^L) = \mathbf{N}\{\tilde{x}_{N+1}; \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t | \tilde{s}_L), \tilde{\Gamma}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t | \tilde{s}_L)\},$$

$$\tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t | \tilde{s}_L) = \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) + \tilde{\Gamma}_{N+1}^L(\tilde{\tau}_N; t; \tilde{s}_L) (\tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L, t))^{-1} [\tilde{x}^L - \tilde{\mu}^L(\tilde{s}_L, t)],$$

$$\tilde{\Gamma}_{N+1}^L(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L) = \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}_{0,N+1}^L(\cdot) \\ \tilde{\Gamma}_{N,N+1}^L(\cdot) \end{bmatrix}.$$

Из (25) следует

$$h(t, x_t, \tilde{x}_t^N, z) = h(t, z) + H_{0,N}(t, z) \tilde{x}_t^{N+1}, \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \overline{h(\tilde{\tau}_N, t, z | \tilde{x}_s^L)} &= h(t, z) + \\ &+ H_{0,N}(t, z) \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t | \tilde{s}_L). \end{aligned} \quad (54)$$

Учитывая (52)–(54), получаем

$$\begin{aligned} &\left[ h(t, x_t, \tilde{x}_t^N, z) - \overline{h(\tilde{\tau}_N, t, z | \tilde{x}_s^L)} \right] [\cdot]^T = \\ &= H_{0,N}(t, z) \left[ \tilde{x}_t^{N+1} - \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) \right] \times \\ &\times \left[ \tilde{x}_t^{N+1} - \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) \right]^T H_{0,N}^T(t, z) - \\ &- H_{0,N}(t, z) \left[ \tilde{x}_t^{N+1} - \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) \right] \left[ \tilde{x}^L - \tilde{\mu}^L(\tilde{s}_L, t) \right]^T \times \\ &\times \left( \tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L, t) \right)^{-1} \left( \tilde{\Gamma}_{N+1}^L(\tilde{\tau}_N; t; \tilde{s}_L) \right)^T H_{0,N}^T(t, z) - \\ &- H_{0,N}(t, z) \tilde{\Gamma}_{N+1}^L(\tilde{\tau}_N; t; \tilde{s}_L) \left( \tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L, t) \right)^{-1} \times \\ &\times \left[ \tilde{x}^L - \tilde{\mu}^L(\tilde{s}_L, t) \right] \left[ \tilde{x}_t^{N+1} - \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) \right]^T H_{0,N}^T(t, z) + \\ &+ H_{0,N}(t, z) \tilde{\Gamma}_{N+1}^L(\tilde{\tau}_N; t; \tilde{s}_L) \left( \tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L, t) \right)^{-1} \times \\ &\times \left[ \tilde{x}^L - \tilde{\mu}^L(\tilde{s}_L, t) \right] \left[ \tilde{x}^L - \tilde{\mu}^L(\tilde{s}_L, t) \right]^T \times \\ &\times \left( \tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L, t) \right)^{-1} \left( \tilde{\Gamma}_{N+1}^L(\tilde{\tau}_N; t; \tilde{s}_L) \right)^T H_{0,N}^T(t, z). \end{aligned}$$

Из (51) следует, что  $\tilde{H}_L(t, z) = H_{0,N}(t, z) \tilde{\Gamma}_{N+1}^L(\tilde{\tau}_N; t; \tilde{s}_L)$ .

Тогда

$$\begin{aligned} M \left\{ \left[ h(t, x_t, \tilde{x}_t^N, z) - \overline{h(\tilde{\tau}_N, t, z | \tilde{x}_s^L)} \right] [\cdot]^T \right\} &= \\ &= H_{0,N}(t, z) \tilde{\Gamma}_{N+1}^L(\tilde{\tau}_N, t) H_{0,N}^T(t, z) - \\ &- \tilde{H}_L(t, z) \left( \tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L, t) \right)^{-1} \tilde{H}_L^T(t, z). \end{aligned} \quad (55)$$

Постановка (42), (45), (55) и формул, связанных с (46), аналогичных (42), (45), в (15) приводит к (47). С учетом (33) и (44) следует, что

$$\begin{aligned} \overline{h(\tilde{\tau}_N, t, z | \tilde{x}_s^L)} - \overline{h(t, z)} &= \\ &= H_{0,N}(t, z) \left[ \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t | \tilde{s}_L) - \tilde{\mu}_{N+1}(\tilde{\tau}_N, t) \right]. \end{aligned}$$

Тогда, согласно (52),

$$\begin{aligned} M \left\{ \left[ \overline{h(\tilde{\tau}_N, t, z | \tilde{x}_s^L)} - \overline{h(t, z)} \right] [\cdot]^T \right\} &= \\ &= \tilde{H}_L(t, z) \left( \tilde{\Gamma}^L(\tilde{s}_L, t) \right)^{-1} \tilde{H}_L^T(t, z). \end{aligned} \quad (56)$$

Постановка (56) в (16) приводит к (48). Соотношения (49), (50) следуют непосредственно из (23), (24).

### Заключение

Получено количество информации по Шеннону в совместной задаче непрерывно-дискретной фильтрации, интерполяции и экстраполяции с произвольной памятью и исследована структура этого количества информации в виде представлений  $I_{\tau,t,s}^t[\cdot]$  через условное количество информации  $I_{\tau,t|s}^t[\tilde{x}_\tau^N, x_t, z_0^t, \eta_0^m | \tilde{x}_s^L]$  о прошлых и текущих значениях процесса  $x_t$  при фиксированных будущих значениях этого процесса и количество информации  $I_s^t[\tilde{x}_s^L; z_0^t, \eta_0^m]$  о будущих значениях процесса  $x_t$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В. Обобщенная скользящая экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Изв. РАН. ТиСУ. 2000. № 4. С. 39–51.
2. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. 829 с.
3. Демин Н.С., Короткевич В.И. О количестве информации в задачах фильтрации компонент Марковских процессов // Автоматика и телемеханика. 1983. № 7. С. 87–96.
4. Демин Н.С., Короткевич В.И. Об уравнениях для шенноновского количества информации при передаче Марковских диффузионных сигналов по каналам с памятью // Проблемы передачи информации. 1987. Т. 23, № 1. С. 16–27.
5. Dyomin N.S., Rozhkova S.V., Safronova I.E. Information amount determination for joint problem of filtering and generalized extrapolation of stochastic processes with respect to the set of continuous and discrete memory observations // Informatica. 2003. Vol. 14, № 3. P. 295–322.
6. Dyomin N.S., Rozhkova S.V., Safronova I.E. About structure of Shannon information amount for joint filtering and extrapolation problem by continuous-discrete memory observations // Informatica. 2004. Vol. 15, № 2. P. 171–202.
7. Демин Н.С., Рожкова С.В. О структуре количества информации в совместной задаче фильтрации и интерполяции по наблюдениям с памятью. Общий случай // Известия Томского политехнического университета. 2004. Т. 307, № 3. С. 13–17.
8. Демин Н.С., Рожкова С.В. О структуре количества информации в совместной задаче фильтрации и интерполяции по наблюдениям с памятью. Условно-гауссовский случай // Известия Томского политехнического университета. 2004. Т. 307, № 4. С. 6–10.
9. Литцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета и кафедрой высшей математики факультета естественных наук и математики Томского политехнического университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика» 3 июля 2006 г.