ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2007 Управление, вычислительная техника и информатика № 1

УДК 519.865

В.В. Поддубный, О.В. Романович

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ЭЙЛЕРА С УРАВНИВАНИЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается задача численного интегрирования обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной, с переменным, в том числе случайным запаздыванием аргумента. Получена интерполяционная модификация вычислительной схемы Эйлера с уравниванием, пригодная для решения дифференциальных уравнений с произвольными, в том числе случайно изменяющимися и как угодно малыми запаздываниями, когда становится неприменимым известный метод шагов. Показано, что сохраняется второй порядок точности этой модификации как для итерационной структуры алгоритма метода Эйлера с уравниванием, так и для ее первого приближения (метода Хьюна).

Проблема численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом при постоянных или переменных, но строго положительных конечных запаздываниях решается сравнительно просто с использованием алгоритмов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздывания на основе известного метода шагов [1]. Однако эта проблема резко усложняется в случае, если переменные запаздывания (в том числе случайные) могут принимать как угодно малые значения. В этом случае метод шагов неприменим. А поскольку любые методы численного интегрирование дифференциальных уравнений оперируют с конечным, отличным от нуля шагом интегрирования, не обязательно соизмеримым с произвольно изменяющимися запаздываниями, в процессе численного интегрирования приходится прибегать к интерполяции решения в точках, где значения решения не были вычислены.

В [4] предложен алгоритм такой интерполяции для случая произвольного, в том числе как угодно близкого к нулю, постоянного запаздывания, модифицирующий известную схему метода Эйлера с уравниванием второго порядка точности. В данной работе этот подход развивается и распространяется на случай переменных запаздываний, в том числе случайных и как угодно малых. При этом проводится оценка порядка точности модифицированного для случая переменного запаздывания итерационного метода Эйлера с уравниванием. Показывается, что модифицированный итерационный метод Эйлера с уравниванием, как и его первое приближение (метод Хьюна), сохраняют второй порядок точности.

1. Постановка задачи

Рассмотрим начальную задачу для обыкновенного (в общем случае нелинейного) дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной, с переменным запаздыванием $\tau(t)$:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f\left(t, y(t), y(t-\tau(t))\right), \quad t_0 \le t \le T, \tag{1}$$

с заданными начальными условиями

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - \max \tau(t), t_0); \quad y(t_0) = y_0, \tag{2}$$

где $\varphi(t)$ – начальная функция, y_0 – начальное значение решения, причем $\varphi(t_0)$ не обязательно равно y_0.

Пусть функция $\varphi(t)$ непрерывна, функция $f(t, y, z)$ непрерывна по всем аргументам и удовлетворяет условиям Липшица по второму аргументу. Тогда, как известно [1], решение начальной задачи для дифференциального уравнения (1) существует и единственно. В случае возможного скачка начального условия ($\varphi(t_0) \neq y_0$), а также в случае, если начальная функция $\varphi(t)$ не удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), решение $y(t)$ при $t > t_0$ испытывает скачки производной первого рода. Непрерывное и всюду дифференцируемое решение возможно лишь в случае, если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию

$$d\varphi(t_0 - 0)/dt = f(t_0, \varphi(t_0), \varphi(t_0 - \tau(t_0))).$$

При постоянном, заранее известном τ для интегрирования дифференциального уравнения с запаздывающем аргументом (1) при начальных условиях (2) можно использовать известный метод шагов [1]. Однако в случае переменного $\tau = \tau(t)$, тем более случайно изменяющегося во времени, метод шагов не применим. В этом случае задача интегрирования нелинейного дифференциального уравнения (1) существенно усложняется. Существует множество вычислительных схем решения начальной задачи для нелинейного дифференциального уравнения с переменным запаздыванием [2]. Однако по большей части эти методы либо носят частный характер, либо весьма сложны в реализации.

В данной работе предлагается метод численного решения начальной задачи для дифференциального уравнения (1), обобщающий метод Эйлера с уравниванием при отсутствии запаздывания [3] и при постоянном запаздывании [4] на случай переменного (в том числе случайного и как угодно малого) запаздывания $\tau(t)$.

Для дальнейшего анализа необходимо конкретизировать свойства функции $\tau(t)$.

Пусть $\tau(t)$ случайно изменяется во времени. В простейшем случае такое случайное изменение можно описать кусочно-постоянной случайной функцией, порождаемой случайным временным рядом τ_k, $k = 1, 2, \ldots$, в котором все τ_k неотрицательны, статистически независимы и имеют одинаковую плотность распределения $p(\tau_k)$. Например, $p(\tau_k) = 1/\tau_{\max}$ – равномерное в интервале $[0, \tau_{\max} > 0]$ распределение. Тогда при любом разбиении $t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ интервала интегрирования $[t_0, T]$ на n примыкающих друг к другу интервалов $[t_k, t_{k+1})$, $k = \overline{1, n-1}$, имеем $\tau(t)$ в виде случайного «меандра»:

$$\tau(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \cdot 1(t_k \le t < t_{k+1}), \quad t \in [t_0, T). \tag{3}$$

Поскольку любое запаздывание τ_k с некоторой отличной от нуля вероятностью может оказаться меньше любого заданного $\varepsilon > 0$, хорошо известный для решения дифференциального уравнения с запаздыванием метод шагов [1] оказывается, вообще говоря, неприменимым (для его применимости необходимо, чтобы $\min \tau(t) > 0$). В связи с этим для интегрирования дифференциального уравнения со случайно изменяющимся запаздыванием приходится применять вычислительные методы, использующие интерполяцию значений решения в точках, где не были вычислены значения решения при применении той или иной вычислительной схемы интегрирования.

Методы первого порядка точности (метод ломаных Эйлера и подобные ему) не используются при интегрировании дифференциальных уравнений, в том числе дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, в силу его низкой точности (медленной сходимости к точному решению с уменьшением шага интегрирования). Поэтому рассмотрим схему второго порядка точности – метод Эйлера с уравниванием [3, 5], называемый также итерационным методом Эйлера [5], методом Эйлера с пересчетом [6], симметричной схемой Эйлера [7], и его упрощенный (неитерационный) вариант – метод Хьюна [8] (он же – усовершенствованный метод Эйлера – Коши [9]). Модифицируем эту схему для решения дифференциального уравнения с произвольным, в том числе и как угодно малым запаздыванием, введя в нее возможность интерполяции.

2. Обобщение метода Эйлера с уравниванием и метода Хьюна на случай переменного запаздывания

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1) при произвольных изменениях запаздывания во времени: $\tau = \tau(t)$. Разобьем интервал $[t_0, T]$ на n примыкающих друг к другу подынтервалов равной длины $h = (T - t_0)/n$ разбиением: $t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots < t_n = T$, где $t_k = t_0 + kh$, $k = \overline{1,n}$. Проинтегрируем формально дифференциальное уравнение (1) на интервале $[t_0, t]$ с учетом начальных условий (2):

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, y(t), y(t - \tau(t)))dt .$$

Используя это выражение при $t = t_k$ и $t = t_{k+1}$, получаем рекуррентное соотношение

$$y(t_{r+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t), y(t - \tau(t)))dt . \quad (4)$$

Считая функцию $f(t, y(t), y(t - \tau(t)))$ непрерывной функцией своих аргументов, представим приближенно при малом шаге интегрирования h значение интеграла в правой части точного соотношения (4) по формуле трапеции:

$$y(t_{k+1}) \cong y(t_k) + \frac{h}{2}(f(t_k, y(t_k), y(t_k - \tau(t_k))) +$$
$$+ f(t_{k+1}, y(t_{k+1}), y(t_{k+1} - \tau(t_{k+1})))) . \quad (5)$$

Обозначая $y_k = y(t_k)$, $\tau_k = \tau(t_k)$, представим рекуррентное уравнение (5), определяющее приближенное решение уравнения (1) при начальных условиях (2), в виде

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(t_k, y_k, y(t_k - \tau_k)) + f(t_{k+1}, y_{k+1}, y(t_{k+1} - \tau_{k+1}))), \quad k = \overline{0,n}, \quad (6)$$

с начальным условием y_0 в момент времени t_0 и начальной функцией $\varphi(t_k - \tau_k)$ при $t_k - \tau_k < t_0$ и $\varphi(t_{k+1} - \tau_{k+1})$ при $t_{k+1} - \tau_{k+1} < t_0$.

В случае автономного уравнения (1) функция $f(t, y(t), y(t - \tau(t)))$ не зависит явно от *t*: $f = f(y(t), y(t - \tau(t)))$. В этом случае уравнение (6) принимает более простой вид:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(y_k, y(t_k - \tau_k)) + f(y_{k+1}, y(t_{k+1} - \tau_{k+1}))), \quad k = \overline{0, n}. \qquad (7)$$

Ограничимся в дальнейшем случаем автономного уравнения (1). Это не нарушает общности рассуждений, так как любое неавтономное уравнение вида (1) можно свести к автономной системе уравнений, расширив состояние $y_1(t) = y(t)$ дополнительным состоянием $y_2(t) \equiv t$, так что расширенное состояние примет вид двумерного вектора состояния $\tilde{y}(t) = (y_1(t)\, y_2(t))$. Тогда уравнение (1) станет системой уравнений автономного вида $d\tilde{y}(t)/dt = \tilde{f}(\tilde{y}(t), \tilde{y}(t - \tau(t)))$, где $\tilde{f} = f((\tilde{y}(t), y_1(t - \tau(t)))\, y_2(t))$ – двумерная вектор-функция.

Для автономного дифференциального уравнения в качестве начальной функция $\varphi(t)$ удобно взять функцию $\varphi(t) \equiv y^*$, тождественно равную постоянному равновесному значению решения (точке покоя) y^*, обращающему в нуль правую часть автономного дифференциального уравнения $dy^*/dt = f\left(y^*, y^*\right) = 0$.

Уравнение (7) обобщает известное соотношение метода Эйлера с уравниванием на случай переменного τ_k. Как и в схеме Эйлера с уравниванием, уравнение (6) будем решать при каждом фиксированном *k* относительно y_{k+1} методом последовательных приближений (простых итераций), используя в качестве начального приближения $y_{k+1}^{(0)}$ решение по схеме метода Эйлера, использующего вычисление интеграла в правой части (3) по формуле прямоугольников:

$$y_{k+1}^{(0)} = y_k + hf(y_k, y(t_k - \tau_k)), \qquad (8)$$

$$y_{k+1}^{(\nu+1)} = y_k + \frac{h}{2}(f(y_k, y(t_k - \tau_k)) + f\left(y_{k+1}^{(\nu)}, y^{(\nu)}(t_{k+1} - \tau_{k+1})\right)), \; \nu = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (9)$$

Окончание процесса последовательных приближений происходит по достижении требуемой абсолютной точности решения ε:

$$\left| y_{k+1}^{(\nu+1)} - y_{k+1}^{(\nu)} \right| < \varepsilon. \qquad (10)$$

Упрощенным вариантом итерационной схемы (9–10) является ее первое приближение $y_{k+1}^{(1)}$ (обобщение метода Хьюна [8]).

Поскольку τ_k может принимать любое неотрицательное значение, не обязательно кратное шагу *h*, моменты времени $t_k - \tau_k$ также не обязательно будут кратными *h*. Для приближенного вычисления значения $y(t_{k+1} - \tau_{k+1})$ через значения в точках, ближайших слева и справа к точке $t_{k+1} - \tau_{k+1}$, но кратных *h*, проведем линейную интерполяцию решений внутри соответствующих отрезков длиной *h*:

$$y(t_{k+1}-\tau_{k+1}) \cong \frac{\tau_{k+1}}{h} y_k + \left(1-\frac{\tau_{k+1}}{h}\right) y_{k+1}, \ 0 \le \tau_{\ k+1} < h \ ;$$

$$y(t_{k+1}-\tau_{k+1}) \cong \left(1-\frac{t_{k+1}-\tau_{k+1}-t_m}{h}\right) y_m + \frac{t_{k+1}-\tau_{k+1}-t_m}{h} y_{m+1},$$

$$h \le \tau_{k+1} \le t_{k+1}-t_0, \quad t_{k+1}-\tau_{k+1} \in [t_m, t_{m+1}];$$

$$y(t_{k+1}-\tau_{k+1}) = y^*, \quad \tau_{k+1} < t_k - t_0. \tag{11}$$

Как видим, интерполяция производится на том (первом при $0 \le \tau_{\ k+1} < h$ или m-м при $h \le \tau_{k+1} \le t_{k+1}-t_0$) интервале, куда попадает $t_{k+1}-\tau_{k+1}$.

Интерполяционная схема (11) обобщает на случай переменного запаздывания τ_k интерполяционную схему, предложенную в [4] для постоянного запаздывания τ.

3. Порядок точности обобщенного метода Эйлера с уравниванием и интерполяцией

Найдем теперь порядок точности обобщенного на случай уравнений с переменным запаздыванием метода Эйлера с уравниванием и его упрощенного варианта – метода Хьюна. Воспользуемся определениями порядка точности и порядка аппроксимации вычислительных схем решения дифференциальных уравнений, приведенными, например, в [6]. Порядком аппроксимации (соответственно порядком точности) вычислительной схемы называют минимальную степень шага h в разложении в ряд Маклорена невязки вычислительной схемы метода численного решения (соответственно невязки численного решения). Невязкой вычислительной схемы называется разность между левой и правой частями схемы метода на точном решении, деленная на величину шага h на каждом k-м шаге решения. Невязкой решения называется разность между приближенным и точным решением на каждом k-м шаге решения. Можно показать, что порядок точности совпадает с порядком аппроксимации. Поэтому порядок аппроксимации часто называют также порядком точности. Конструктивный алгоритм вычисления порядка аппроксимации вытекает из определения невязки метода.

Запишем выражение для невязки метода Эйлера с уравниванием в соответствии с определением, обозначив точное решение дифференциального уравнения для k-го шага (в k-й момент времени) через $u_k = u(t_k)$, где $u(t)$ является точным решением уравнения (1). Очевидно, u_k подчиняется точному интегральному аналогу (4) дифференциального уравнения (1). Для автономного уравнения (1) рекуррентное соотношение (4) принимает вид

$$u_{k+1} = u_k + \int_{t_k}^{t_{r+1}} f(u(t), u(t-\tau(t)))\,dt, \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{12}$$

Невязка метода Эйлера с уравниванием и интерполяцией при случайных запаздываниях вида (3) принимает вид

$$\Psi_k(h) = \{u_{k+1} - u_k - (h/2)[f(u_k, u(t_k-\tau_k)) + f(u_{k+1}, u(t_{k+1}-\tau_{k+1}))]\}/h, \tag{13}$$

где от шага h на k-м шаге зависят u_{k+1} через верхний предел $t_{k+1} = t_k + h$ точного равенства (12) и $u(t_{k+1}-\tau_{k+1})$ по формулам (11), куда вместо всех y подставляется u. При этом следует иметь в виду, что от h на k-м шаге зависят только u_{k+1} и $t_{k+1}=t_k+h$. Величины h, стоящие в знаменателях формул (11), относятся не к k-му интервалу, а к более ранним интервалам, поэтому они в расчете порядка точности участия не принимают.

Разложив в ряд Маклорена правую часть равенства (12), получим с точностью до членов 4-го порядка малости

$$u_{k+1}=u_k+f_kh+\left(f_{1k}^{'}f_k+f_{2k}^{'}c_m\right)\frac{h^2}{2!}+\left[f_{11k}^{''}f_k^2+2f_{12k}^{''}f_kc_m+f_{22}^{''}c_k^2+\right.$$

$$\left.+f_1^{'}\left(f_{1k}^{'}f_k+f_{2k}^{'}c_m\right)\right]\frac{h^3}{3!}+O\left(h^4\right), \tag{14}$$

где обозначено:

$$f_k=f\left(u_k,u\left(t_k-\tau_k\right)\right),\ f_{1k}^{'}=\partial f\left(u_k,u\left(t_k-\tau_k\right)\right)/\partial u_k\ ,$$

$$f_{2k}^{'}=\partial f\left(u_k,u\left(t_k-\tau_k\right)\right)/\partial u\left(t_k-\tau_k\right),\ \ f_{11k}^{''}=\partial^2 f\left(u_k,u\left(t_k-\tau_k\right)\right)/\partial u_k^2\ ,$$

$$f_{12k}^{''}=\partial^2 f\left(u_k,u\left(t_k-\tau_k\right)\right)/\partial u_k\partial u\left(t_k-\tau_k\right),\ \ f_{22k}^{''}=\partial^2 f\left(u_k,u\left(t_k-\tau_k\right)\right)/\partial u\left(t_k-\tau_k\right)^2\ ,$$

$$c_m=\left(u_{m+1}-u_m\right)/h_m\ ,\quad t_k-\tau_{k+1}\in\left[t_m,t_{m+1}\right]. \tag{15}$$

В последнем равенстве через h_m обозначена длина m-го, более раннего, чем k-й, интервала $\left[t_m,t_{m+1}\right]$.

Разлагая аналогичным образом в ряд Маклорена функцию

$$f\left(u_{k+1},u\left(t_{k+1}-\tau_{k+1}\right)\right)$$

во втором слагаемом выражения (13) как сложную функцию h, с учетом (12) и (11) (с заменой y на u) и с учетом обозначений (15) получим

$$f\left(u_{k+1},u\left(t_{k+1}-\tau_{k+1}\right)\right)=f_k+\left(f_{1k}^{'}f_k+f_{2k}^{'}c_m\right)h+$$

$$+\left[f_{11k}^{''}f_k^2+2f_{12k}^{''}f_kc_m+f_{22}^{''}c_k^2+f_1^{'}\left(f_{1k}^{'}f_k+f_{2k}^{'}c_m\right)\right]\frac{h^2}{2!}+O\left(h^3\right). \tag{16}$$

Подставляя выражения (14) и (16) с учетом обозначений (15) в (13), приведем $\Psi_k\left(h\right)$ к виду

$$\Psi_k\left(h\right)=\frac{1}{12}\left[f_{11k}^{''}f_k^2+2f_{12k}^{''}f_kc_m+f_{22}^{''}c_k^2+f_1^{'}\left(f_{1k}^{'}f_k+f_{2k}^{'}c_m\right)\right]h^2+O\left(h^3\right). \tag{17}$$

Из разложения (17) видно, что порядок точности метода Эйлера с уравниванием и интерполяцией остался равным 2.

Аналогичным образом можно получить разложением в ряд Маклорена по степеням h на k-м шаге невязку метода Хьюна

$$\Psi_k\left(h\right)=\{u_{k+1}-u_k-\left(h/2\right)\left[f\left(u_k,u\left(t_k-\tau_k\right)\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(u_k+hf\left(u_k,u\left(t_k-\tau_k\right)\right),u\left(t_{k+1}-\tau_{k+1}\right)\right)\right]\}/h\ . \tag{18}$$

Проводя разложение второго слагаемого в (18) как сложной функции h и используя разложение (14), с учетом обозначений (15) получим

$$\Psi_k\left(h\right)=\frac{1}{12}\left[-f_{11k}^{''}f_k^2-2f_{12k}^{''}f_kc_m-f_{22}^{''}c_k^2+2f_1^{'}\left(f_{1k}^{'}f_k+f_{2k}^{'}c_m\right)\right]h^2+O\left(h^3\right). \tag{19}$$

Отсюда видно, что порядок точности метода Хьюна с интерполяцией также остается равным двум. Заметим, что в случае линейных дифференциальных уравнений, для которых функция f линейна по своим аргументам, вторые производные в выражениях (17) и (19) обращаются в нуль, и мы видим, что функция $\Psi_k(h)$ для метода Хьюна оказывается при малых h ровно в 2 раза больше, чем для метода Эйлера с уравниванием, что свидетельствует все-таки о несколько меньшей скорости сходимости к точному решению вычислений по неитерационной схеме Хьюна по сравнению с итерационной схемой Эйлера с уравниванием.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эльсгольц Л.Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964. 128 с.
2. *Солодов А.В., Солодова Е.А.* Системы с переменным запаздыванием. М.: Наука, 1980. 384 с.
3. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 233 с.
4. *Поддубный В.В.* Численное решение дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием методом Эйлера с уравниванием и интерполяцией // Обработка данных и управление в сложных системах. Вып. 7. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2005. С. 165 – 174.
5. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965. 324 с.
6. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
7. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
8. *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. 288 с.
9. *Коллатц Л.* Численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1953.

Статья представлена кафедрой прикладной информатики факультета информатики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 29 июня 2007 г.