УДК 1:001; 001.8

В.А. Суровцев

АКСИОМА СВОДИМОСТИ, ТЕОРИЯ ТИПОВ Ф.П. РАМСЕЯ И РЕАЛИЗМ В МАТЕМАТИКЕ*

В статье рассматриваются обоснованность аксиомы сводимости, метод её элиминации, предложенный Ф.П. Рамсеем, и онтологические основания этого метода. Анализируются «рамсифицированная» теория типов и трактовка принципа порочного круга при формулировке логических парадоксов.

Аксиома сводимости является отличительной чертой теории типов, предложенной Б. Расселом. Однако Рамсей не относит эту аксиому к числу логических принципов, отдавая её истинность на «милость судьбы». Формулировка этой аксиомы у Рассела удовлетворяет необходимому критерию математических положений, она действительно обладает требуемой общностью формы. Однако если мы следуем критерию достаточности, который Рамсей заимствует у Витгенштейна и который связан с требованием, чтобы логические принципы были тавтологиями, то этот критерий не выполняется. Аксиома может быть истинной, но нет ничего невозможного и в истинности её отрицания, а значит, она не является тавтологией.

Если ограничиться конечным числом индивидов или конечным числом функций, то истинность этой аксиомы кажется почти неизбежной. В этом случае любой класс можно было бы, например, задать, как делалось выше, с помощью равенства, которое является предикативной функцией в смысле Рассела. Однако при рассмотрении случая, где число индивидов и функций бесконечно, содержание аксиомы становится проблематичным. Она, разумеется, может быть истинной, поскольку нет ничего невозможного или самопротиворечивого в том, чтобы каждый класс индивидов задавался некоторой предикативной функцией. Но она может быть и ложной. Для этого достаточно продемонстрировать возможность конструирования такой непредикативной функции, которую нельзя свести к предикативной. И такую функцию можно построить.

Так, допустим, что совокупность предикативных функций бесконечна, тогда вполне возможно, чтобы существовал такой индивид a из опять же бесконечной совокупности индивидов, который обладал бы следующей особенностью: он выполняет все предикативные функции, что и некоторый индивид из той же совокупности, за исключением функции, которая рассматривается в данный момент. Возьмём теперь непредикативную функцию $(\phi).\phi!x \equiv \phi!a$. Рамсей утверждает, что при принятых условиях для этой функции аксиома сводимости работать не будет [1. С. 60]. В своих работах он не даёт обоснования этому утверждению. Но проинтерпретировать его мысль не трудно. Действительно, согласно аксиоме сводимости непредикативной функции $(\phi).\phi!x \equiv \phi!a$ должна соответствовать преди-

---

*Данная статья является продолжением статьи: *Суровцев В.А.* Теория типов Б. Рассела и язык математики // Филология и философия в современном культурном пространстве: проблемы взаимодействия. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. – С. 81–103. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проект № 07-06-00185-а.

кативная функция, скажем $\psi!x$. Но согласно поставленному условию $\psi!x$ как раз и будет функцией, рассматриваемой в данный момент, следовательно, будет существовать индивид, согласующийся с a во всех функциях, кроме $\psi!x$. То же самое будет и с любой другой функцией, претендующий на роль предикативного аналога $(\phi).\phi!x \equiv \phi!a$. Правда, здесь важно условие бесконечности области функций и области индивидов, потому что в противном случае можно было бы задать предикативный аналог функции $(\phi).\phi!x \equiv \phi!a$, перечисляя те индивиды, которые согласуются с a относительно $\psi!x$, и указывая на тот, который не согласуется. Но само это перечисление выражалось бы функцией, для которой согласно выраженным выше условиям существовал бы индивид, согласующийся с a во всех функциях, за исключением этой. В случае бесконечной области индивидов и функций это продолжалось бы до бесконечности, т.е. каждая попытка представить предикативный аналог, указанной выше непредикативной функции давала бы опять непредикативную функцию, что требовало бы построения нового предикативного аналога уже этой непредикативной функции и т.д. Следовательно, предикативный аналог $(\phi).\phi!x \equiv \phi!a$ при заданных условиях синтаксически построить в принципе невозможно и, по крайней мере в данной интерпретации, аксиома сводимости не работает.

Возможность как истинности, так и ложности показывает, что аксиома сводимости «является эмпирической пропозицией, другими словами, не является ни тавтологией, ни противоречием и, следовательно, не может ни утверждаться, ни отрицаться логикой или математикой» [1. С. 60]. Поэтому от этой аксиомы нужно избавиться, сохранив по возможности те результаты, которые получены с её помощью. Необходимость в аксиоме сводимости в рамках теории типов Б. Рассела была вызвана стремлением согласовать разветвлённую теорию типов с практикой математических рассуждений. Таким образом, обоснованность введения аксиомы сводимости связана с обоснованностью того варианта теории типов, к которому в конечном счёте пришёл Рассел. И этот вариант Рамсей предлагает модифицировать.

Поскольку разветвлённая теория типов была предложена для единообразного решения парадоксов, обратимся, прежде всего, к ним. В отличие от Рассела, который все парадоксы выводит из принципа порочного круга, Рамсей разделяет их на две группы. К *Группе A* относятся парадоксы Рассела, Кантора, Бурали-Форти и им подобные, т.е. все те парадоксы, для решения которых достаточно простой теории типов; к *Группе B* относятся парадоксы *лжеца*, Ришара, Грелинга и т.д., для решения которых потребовалось расширить простую теорию типов до разветвлённой. Фундаментальную важность такого различия Рамсей видит в следующем: «Группа *A* состоит из противоречий, которые, если против них не принять меры предосторожности, встречались бы в самих логических и математических системах. Они включают только логические или математические термины, такие как класс и число, и показывают, что здесь должна быть какая-то ошибка с нашей логикой или математикой. Но противоречия группы *B* не являются чисто логическими и не могут быть сформулированы в одних логических терминах, ибо все они содержат некоторую отсылку к мысли, языку или символизму, которые являются не формальными, но эмпирическими терминами. Поэтому своим возникновением они могут быть обязаны не ошибочной логике или математике, но ошибочным идеям, касающимся мысли и языка. Если это так, их не следует относить к математике или логике, если под ‘логикой’ мы подразумеваем символическую систему, хотя они, конечно, относятся к логике в смысле анализа мысли» [1. С. 31].

Рамсей отказывается выводить все парадоксы из единственного принципа порочного круга, как делает Рассел. На самом деле теория типов *Principia Mathematica* состоит из двух различных разделов: «Противоречия группы *A* устраняются указанием на то, что пропозициональная функция не может значимо принимать саму себя в качестве аргумента, и разбиением функций и классов на иерархию типов в соответствии с их возможными аргументами. Так, утверждение, что класс является членом самого себя, не истинно и не ложно, но бессмысленно» [1. С. 34]. Здесь достаточно развести по разным типам функции и соответствующие им аргументы, не различая порядки функций от аргументов одного и того же типа. Таким образом, этот раздел ограничивается простой теорией типов и не нуждается в разветвлённой.

Источником парадоксов второй группы является не символическая система логики и основанная на ней математика, а лингвистический или, как предпочитает говорить Рамсей, эпистемический элемент: «Противоречия группы *B* не являются чисто логическими; все они содержат некоторый эпистемологический элемент, такой как ложь, значение или наименование. (Под эпистемическим я подразумеваю связь с отношением знака к обозначаемой вещи, которое включает отношение мыслящего или мысли к своему объекту.) Следовательно, появление таких противоречий, помимо того, что оно может быть обязано ошибочности самой логики, может быть обязано просто некоторому противоречию, скрытому в наших идеях значения и мысли или в том способе, которым мы используем наши слова. В этом и заключается отстаиваемая мной точка зрения, а именно, что противоречия группы *B* относятся к эпистемологии, но не к символической логике, и их не нужно принимать в расчёт при конструировании правил символической логики, частью которой является теория типов… Различие функций на предикативные, первопорядковые и т.д., пробегающих по одной и той же области аргументов, было основано Расселом не только на необходимости избежать эти противоречия, но также на его принципе порочного круга, непосредственным следствием которого, как казалось, они являлись» [2. С. 85]. Стало быть, если здесь и необходимо какое-то различие, оно не должно иметь отношения к различию функций и аргументов, важному для целей собственно логики и математики. Значит, и здесь разветвлённая теория типов, как она представлялась Расселу, оказывается излишней.

Иными словами, раз парадоксы имеют различный источник, то совершенно не обязательно создавать теорию, которая решала бы их единообразно, основываясь на принципе порочного круга. И если первый раздел *Principia Mathematica*, связанный с решением парадоксов группы *A*, представляется Рамсею неизбежным, то второй раздел при соответствующей трактовке теории типов из оснований математики вполне можно исключить. Таким образом, задача Рамсея заключается в следующем: во-первых, необходимо показать, что функции одного и того же типа при выведении математики из логики не требуют различения на порядки; во-вторых, необходимо показать, что различие функций одного и того же типа на порядки не имеет к такому выведению никакого отношения. Нетрудно заметить, что тем самым ненужной оказывалась бы и аксиома сводимости, поскольку исчезала бы причина, по которой её требовалось ввести.

Устранение аксиомы сводимости из оснований математики не единственное следствие развиваемого Рамсеем подхода. Устранение аксиомы сводимости есть отрицательный результат, приводящий к ненужности разветвлённой теории типов. То, что последняя не нужна, дополняется позитивным результатом, дающим способ решения парадоксов на совершенно ином основании. Здесь различие логического и эпистемологического элемента в средствах выражения даёт построение новой теории типов, не просто альтернативной теории типов *Principia Mathematica*, но изменяющей её в существенных моментах. Достижение этого позитивного результата требует изменения содержания некоторых базовых понятий, с помощью которых строится разветвлённая теория типов.

Решение, предлагаемое Рамсеем, основано на теории Витгенштейна, относящейся к способам построения высказываний [3]. Наиболее важными здесь являются три последовательно вытекающих друг из друга момента.

1. Витгенштейн различает высказывание (пропозицию) и способы его выражения. Действительно, пропозиция – это согласование условий истинности атомарных высказываний, а поскольку выразить такие согласования можно различным образом, то необходимо отличать саму пропозицию от способов выражения этих согласований. Используя для согласования различные логические союзы, мы лишь по-разному строим одну и ту же пропозицию.

Отсюда вытекает, что логические союзы есть лишь способ построения выражений согласования и не имеют собственного значения. То есть комбинация логических союзов выражает одну и ту же пропозицию, если в конечном счёте с высказываниями p, q и т.д., из которых она построена, согласуются одни и те же условия истинности. В общем случае любая комбинация p, q и т.д. с логическими союзами выражает одну и ту же пропозицию, если они согласуются с одинаковыми условиями истинности. Поэтому комбинации вида ‘$\sim(\sim p \,.\, q)$’, ‘$p \vee \sim q$’, ‘$\sim p \supset \sim q$’ и т.д. есть лишь символы для выражения одной и той же пропозиции.

Таких комбинаций может быть бесконечное множество. Более того, среди них могут быть такие, которые мы не только не построили актуально, но и не можем построить за конечное число шагов. Однако, как считает Рамсей, возможность такого построения зависит от наших познавательных способностей и не может оказывать влияние на объективное содержание формальной логики. Если задана пропозиция с условиями согласования истинностных возможностей, то логикой должна предполагаться вся область возможных выражений, не важно, строятся ли они за конечное число шагов или же могут быть построены, допуская лишь бесконечное.

2. Бесконечная область возможных выражений важна тогда, когда она не ограничена логическими союзами, а включает выражения общности. Напомним, что с точки зрения Витгенштейна, мы используем выражения общно-

сти, чтобы охватить бесконечный или, возможно, конечный, но необозримый класс высказываний. Эта необходимость возникает тогда, когда, например, в ряду атомарных высказываний вида '*fa*', '*fb*', '*fc*' … не хватает имён для индивидов. В этом случае для того, чтобы выразить пропозицию, устанавливающую согласования истинности для конъюнкции таких высказываний, мы используем выражение '(*x*)*fx*'.

Отметим, что если бы класс индивидов *a*, *b*, *c* … был конечен, то выражение '(*x*)*fx*' в любом контексте можно было бы заменить на конъюнкцию '*fa* . *fb* . *fc* …', поскольку тогда согласования условий истинности соответствующих атомарных высказываний совпали бы. Здесь мы получаем различные способы выражения одной и той же пропозиции, которые мы можем актуально построить.

Сложности возникают при бесконечной области индивидов. Здесь может недоставать не только имён для индивидов, но и способов построения высказываний, в которые эти индивиды входят. Так, уже в простейшем случае '(*x*)*fx*', если нет возможности указать все имена индивидов, мы не в состоянии привести пример бесконечной конъюнкции, имеющей те же самые условия истинности.

Но здесь, как считает Рамсей, возможность актуального построения связана с ограниченностью наших познавательных способностей. Логика, однако, не должна быть ограничена познавательными способностями человека. В общем случае независимо от списка имён (конечного или бесконечного) и способов утверждения высказываний мы должны предполагать, что любое высказывание может утверждаться как с помощью выражений общности (типа 'все' или 'некоторый'), так и с помощью логических союзов (конъюнкции, дизъюнкции и т.п.). Возможность согласования условий истинности атомарных высказываний не должна зависеть от способности строить лишь конечные последовательности символов. Если пропозиция устанавливает согласование условий истинности атомарных высказываний вообще, то в принципе это должно выражаться как конечным, так и бесконечным образом. Здесь должно работать правило, что логика имеет дело с любой возможностью, как конечной, так и бесконечной. Первая отличается от второй лишь недостатком времени и места у того, кто с ними работает. Поэтому конечность или бесконечность последовательности высказываний вида '*fa*', '*fb*', '*fc*' … роли не играет. И в том и в другом случае подразумевается одно и то же, хотя в символических системах это и выражается различными способами. Если первое, как правило, выражается с помощью логических союзов, то второе использует выражения общности.

3. Для Рассела определяющее значение имело деление функций и построенных из них пропозиций на элементарные и неэлементарные. Первые используют только логические союзы и, стало быть, могут быть построены за конечное число шагов, если известны рассматриваемые в качестве аргументов атомарных функций индивиды. Так, при конечности класса {*a*, *b*, *c* …} любое высказывание об этом классе выразимо комбинацией атомарных высказываний '*fa*', '*fb*', '*fc*' … с логическими союзами. Но если класс {*a*, *b*, *c* …} бесконечен или необозрим, то высказывание, нечто утверждающее обо *всех* или *некоторых* его элементах, должно включать выражения общности. Такие

высказывания Рассел считал неэлементарными, поскольку они, помимо элементов, включают указание на весь класс.

Но проведённое Витгенштейном различие между пропозициями и их выражениями вкупе с утверждаемой независимостью логической теории таких пропозиций от возможности построения их выражений приводит Рамсея к тому, что «некоторые примеры пропозиций могут быть элементарными, а некоторые – неэлементарными, так что элементарность на самом деле является характеристикой не пропозиции, но её способа выражения. ‘Элементарная пропозиция’ подобна ‘высказанному слову’; подобно тому, как одно и то же слово может быть и сказано и написано, так и одна и та же пропозиция может быть выражена как элементарно, так и не элементарно» [1. С. 42]. То есть ‘$(x)fx$’ и ‘$fa\ .\ fb\ .\ fc$ …’ могут соответствовать одной и той же пропозиции, и различие затрагивает здесь не её саму, поскольку речь идёт лишь о согласовании возможностей истинности атомарных высказываний, но способы её выражения, где символ ‘$fa\ .\ fb\ .\ fc$ …’ является элементарным, а символ ‘$(x)fx$’ – нет. Так, «предположим, что создан список из всех индивидов ‘a’, ‘b’, … , ‘z’. Тогда, если бы $\phi\hat{x}$ была элементарной функцией, то ‘$\phi a\ .\ \phi b.\ \dots\ .\ \phi z$’ была бы элементарной пропозицией, а ‘$(x)\ .\ \phi x$’ – неэлементарной; но они выражали бы согласование с одними и теми же возможностями и, стало быть, были бы одной и той же пропозицией. Или возьмём пример, который действительно может встретиться, ‘ϕa’ и ‘$\phi a : (\exists x)\ .\ \phi x$’ являются одной и той же пропозицией, поскольку $(\exists x)\ .\ \phi x$ ничего не добавляет к ϕa. Но первая является элементарной, а вторая – неэлементарной» [1. С. 42].

Предыдущие замечания относились к функциям и пропозициям первого порядка, но их можно распространить на функции и пропозиции более высоких порядков. Правда, здесь необходимы некоторые изменения.

Для Рассела элементарные высказывания есть результат приписывания индивидов функциям первого порядка, элементарными являются также все высказывания, образованные из предыдущих с помощью логических союзов. Например, из функций $\phi\hat{x}$, $\psi\hat{x}$ … можно образовать элементарные высказывания типа ϕa, ψa, ϕb, $\sim\psi b$, … $\phi a.\psi a$, $\sim(\phi a\vee\sim\psi b)$ … и т.д. Если содержательные особенности функций и аргументов безразличны для некоторых или всех случаев, то элементарными будут и высказывания типа p, q … $\phi a.p$, $\phi a\vee p$ … и т.д. Неэлементарные высказывания возникают тогда, когда необходимо указать на все или некоторые индивиды, класс которых, возможно, необозрим. Например, $(x)\phi x$, $(x){:}\phi x.\psi x$, $(x)\phi x.p$, $(\exists x){:}\psi x.p$ … и т.д. будут неэлементарными.

Понятия элементарности и неэлементарности, используя подход Витгенштейна, можно распространить на функции и пропозиции любого порядка.

Напомним, что этот подход для любой пропозициональной функции первого порядка отсылает не к множеству индивидов, а к множеству высказываний. Так, область значения $\phi\hat{x}$ образуют не индивиды a, b, c …, но высказывания ϕa, ϕb, ϕc …, которые обладают определёнными условиями истинности. Здесь функция $\phi\hat{x}$ указывает не на объективную совокупность индивидов, но на совокупность высказываний, условия согласованности истинности которых можно указать различными способами, как элементарным, так и неэлементарным. В этом случае 'a', 'b', 'c' … должны рассматриваться как значки (или имена) индивидов, которые могут входить как в символ '$\phi a.\phi b.\phi c$ …', так и в символы других видов, например '$\sim(\sim\phi a \vee \sim\phi b \vee \sim\phi c$ …)'. При этом мы можем использовать и неэлементарный символ '$(x).\phi x$', когда не хватает имён для индивидов, но, как указывалось выше, это для логики не существенно. И в том и в другом случае функция $\phi\hat{x}$ указывает на совокупность высказываний, имеющих одно и то же согласование истинностных возможностей.

Отсылка к символам, а не к индивидам для Рамсея является наиболее существенной, поскольку она позволяет рассмотреть выражения общности единообразно, независимо от того, к какому порядку выражений они применяются.

Возьмём, например, функцию второго порядка $f(\phi\hat{x})$, пробегающую по различным значениям $\phi\hat{x}$, выразить которые мы можем как $\phi_1\hat{x}$, $\phi_2\hat{x}$, $\phi_3\hat{x}$ … Каждое из этих выражений является символом, который указывает на совокупность элементарных пропозиций, являющихся их возможными значениями, где место переменной занимает имя индивида. Так, областью значений выражения '$\phi_1\hat{x}$' является совокупность высказываний $\phi_1 a$, $\phi_1 b$, $\phi_1 c$ …, для которой согласование условий истинности может указываться как элементарно (т.е. имея вид '$\phi_1 a.\phi_1 b.\phi_1 c$ …'), так и не элементарно (т.е. имея вид '$(x).\phi_1 x$'). Точно так же областью значения $\phi_2\hat{x}$ является совокупность высказываний $\phi_2 a$, $\phi_2 b$, $\phi_2 c$ …, согласованность которых выражается как элементарно (т.е. имея вид '$\phi_2 a.\phi_2 b.\phi_2 c$ …'), так и не элементарно (т.е. имея вид '$(x).\phi_2 x$'). То же самое относится к $\phi_3\hat{x}$ и т.д.

Так как для $\phi_1\hat{x}$, $\phi_2\hat{x}$, $\phi_3\hat{x}$ … имена индивидов 'a', 'b', 'c' … не варьируются, мы можем рассматривать совокупности высказываний, для которых варьируем функции, например $\phi_1 a$, $\phi_2 a$, $\phi_3 a$ …, $\phi_1 b$, $\phi_2 b$, $\phi_3 b$ …, $\phi_1 c$, $\phi_2 c$, $\phi_3 c$ …

Функция $f(\phi\hat{x})$ как раз и указывает на такие множества высказываний. Выражая согласование условий истинности таких высказываний, мы можем использовать как символ вида '$\phi_1 a.\phi_2 a.\phi_3 a$ … $\phi_1 b.\phi_2 b.\phi_3 b$ … $\phi_1 c.\phi_2 c.\phi_3 c$ …', так и символ вида '$(\phi).(\phi a)$. $(\phi).(\phi b)$. $(\phi).(\phi c)$. …', т.е. это согласование может быть выражено как элементарно, так и не элементарно. Если при этом недостаёт имён для индивидов, можно вновь воспользоваться переменной, записав выражение согласования условий истинности как '$(\phi, x).(\phi x)$'. Это неэлементарное выражение используется тогда, когда невозможно актуально (т.е. за конечное число шагов) построить символ первого вида, но, как указывалось выше, для логики это безразлично.

Подход Витгенштейна, т.е. подход, где в качестве значения функций рассматриваются высказывания, легко распространить на функции любого вида. Для функций типа $f(\phi\hat{x}).p$, $f(\phi\hat{x})\vee p$ …, например, это очевидно. Но рассмотренные до сих пор функции были одноместными. Однако нет никаких препятствий для того, чтобы перейти к n-местным функциям. Здесь самый простой случай, когда переменные относятся к одному и тому же типу. Так, $\phi(\hat{x}, \hat{y})$ указывает на согласование истинностных возможностей высказываний вида $\phi(a,b)$, $\phi(b,a)$ $\phi(a,c)$ … Это согласование мы можем выразить как элементарно для обоих переменных, если их значения обозримы, так и не элементарно для каждой или обоих из переменных. В первом случае согласованию будет соответствовать выражение вида ‘$\phi(a,b).\phi(b,a).\phi(a,c)$ …’, во втором – ‘$(x){:}\phi(x,a).\phi(x,b).\phi(x,c)$ …’ или ‘$(x){:}\phi(a,x).\phi(b,x).\phi(c,x)$ …’, в третьем – ‘$(x,y){:}\phi(x,y)$’.

Перейдём теперь к функциям вида $f(\phi\hat{x}, y)$. Здесь аргументы относятся к разным типам. Однако соответствующее множество пропозиций будет строиться как и в предыдущих случаях, правда, с учётом некоторых особенностей, заставляющих при подстановке на место переменных выражений разных типов усложнить построение области определения подобной функции.

Начнём с предположения, что $\phi\hat{x}$ указывает на согласование истинностных возможностей соответствующих высказываний не элементарно, тогда как для y допустимо как неэлементарное, так и элементарное выражение. Тогда на область значения $f(\phi\hat{x}, y)$, т.е. на совокупность высказываний, для которых эта функция устанавливает согласование истинностных возможностей, если заданы имена ‘a’, ‘b’, ‘c’ …, можно указать символом ‘$(\phi, y){:}(\phi\hat{x}, y)$’ в первом случае и символом ‘$(\phi){:}f(\phi\hat{x}, a) \,.\, f(\phi\hat{x}, b) \,.\, f(\phi\hat{x}, c)$ …’ во втором.

Остановимся на втором случае. Поскольку ‘a’, ‘b’, ‘c’ … остаются константами, выражения, в которые они входят, можно проиндексировать, сопоставив ряду ‘a’, ‘b’, ‘c’ … ряд 1, 2, 3 … и записав ‘$(\phi){:}f(\phi\hat{x}, a) \,.\, f(\phi\hat{x}, b) \,.\, f(\phi\hat{x}, c)$ …’ как ‘$(\phi){:}f_1(\phi\hat{x}) \,.\, f_2(\phi\hat{x}) \,.\, f_3(\phi\hat{x})$ …’. Теперь, каждый конъюнкт из ‘$(\phi){:}f_1(\phi\hat{x}) \,.\, f_2(\phi\hat{x}) \,.\, f_3(\phi\hat{x})$ …’, где он выражен не элементарно, можно записать элементарно, согласно алгоритму, указанному четырьмя абзацами выше для одноместных функций от функций. Так, например, конъюнкт ‘$(\phi).f_1(\phi\hat{x})$’, при заданных ‘a’, ‘b’, ‘c’ …, записывается в виде ‘$f_1(\phi_1 a).f_1(\phi_1 b).f_1(\phi_1 c)$ …’, конъюнкт ‘$(\phi).f_2(\phi\hat{x})$’ – в виде ‘$f_2(\phi_1 a).f_2(\phi_1 b).f_2(\phi_1 c)$ …’ и т.д.

Таким образом, неэлементарное выражение ‘$(\phi){:}f_1(\phi\hat{x}) \,.\, f_2(\phi\hat{x}) \,.\, f_3(\phi\hat{x})$ …’ согласования истинностных возможностей, устанавливаемого функцией $f(\phi\hat{x}, y)$, в конечном счёте можно представить элементарно в виде ‘$f_1(\phi_1 a).f_1(\phi_1 b).f_1(\phi_1 c)\ldots \,.\, f_2(\phi_1 a).f_2(\phi_1 b).f_2(\phi_1 c)\ldots \,.\, f_3(\phi_1 a).f_3(\phi_1 b).f_3(\phi_1 c) \ldots \,.\, \ldots$’.

Отметим, что к подобным согласованиям всегда можно присоединить простые высказывания вида p, q …, если встречающиеся в них имена независимы от таковых в выражениях типа $f_1(\phi_1 a)$ и т.п. При согласовании пропозиции ‘$(\phi){:}f_1(\phi\hat{x}) \,.\, f_2(\phi\hat{x}) \,.\, f_3(\phi\hat{x}) \ldots \,.\, p \,.\, q \ldots$’ результат будет то же самый, что и при согласовании пропозиции ‘$f_1(\phi_1 a).f_1(\phi_1 b).f_1(\phi_1 c)\ldots \,.\, f_2(\phi_1 a).f_2(\phi_1 b).f_2(\phi_1 c)\ldots \,.\, f_3(\phi_1 a).f_3(\phi_1 b).f_3(\phi_1 c) \ldots \,.\, \ldots \,.\, p \,.\, q \,.\, \ldots$’.

Представленные выше соображения нетрудно распространить как на аргументы различного типа, так и на функции различной местности. Однако заметим, что с точки зрения возможности конечного построения согласования истинностных возможностей высказываний, включающих функции от функций и от индивидов, могут выглядеть проблематичными. Но эта проблематичность затрагивает строящего их логика, но не логику как объективную науку. Заданный выше алгоритм действительно показывает, каким образом любое высказывание (о конечной, или же бесконечной области индивидов, как считает Витгенштейн, и, что самое важное, к нему присоединяется Рамсей) производно от атомарных высказываний. В любом случае согласование условий истинности каждого высказывания, какого типа аргументы и функции оно не включало бы, зависит от возможностей истинности атомарных высказываний, которые могут быть определены для разных случаев либо конечно, либо бесконечно, что относится к объективности формальной логики как науки.

Таким образом, введение общности в структуру функции ничего не меняет в её значении. Действительно, используя истинностные функции типа конъюнкции, мы всегда можем избавиться от общности, редуцируя функцию более высокого порядка к функции более низкого порядка. Использование общности затрагивает лишь способы выражения функций, характеризуя их как элементарные или неэлементарные. И поскольку разветвлённая теория типов для Рассела базировалась именно на том, что наличие и отсутствие общности затрагивает различие в значении функции, в отсутствие этого различия всякая необходимость в разветвлённой теории типов исчезает.

Развитие представленного подхода, очевидно, требует модификации понятий, используемых Расселом. Рамсей сохраняет различие функций на элементарные и неэлементарные. Так, функции вида $f(\hat{x}, \hat{y})$ и $f(\phi\hat{x}, y)$ являются элементарными, а функции вида $(x) \,.\, f(x, \hat{y})$ и $(\phi) \,.\, f(\phi\hat{x}, y)$ – нет, поскольку вторые, в отличие от первых, содержат выражения общности. Хотя следует учесть, что для Рамсея это различие затрагивает способы выражения, а не значение функций, как для Рассела. Сложнее дело обстоит с понятием предикативной функции. Напомним, что для Рассела предикативная функция – это функция, которая не содержит мнимых переменных более высокого порядка, чем её действительные аргументы. Так, $(x) \,.\, f(x, \hat{y})$ является предикативной функцией от y, а функция $(\phi) \,.\, f(\phi\hat{x}, y)$ – нет. Поскольку наличие или отсутствие общности для Рамсея характеризует лишь разные способы выражения, но не сами функции, расселовское понятие предикативной функции здесь, очевидно, не работает. И именно это понятие требует модификации.

Рамсей считает, что вводимое Расселом различие между предикативными и непредикативными функциями связано с принятым им общим методом построения пропозициональных функций. Что здесь является важным? Под пропозициональными функциями от индивидов понимаются символы вида $f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \ldots)$, где $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \ldots$ индивидные переменные. С каждой пропозициональной функцией от индивидов соотнесено множество атомарных высказываний, получаемых из пропозициональной функции заменой индивидных переменных именами индивидов. Так, если $f(\hat{x})$ – одноместная функция от индивидов, то с ней соотнесены пропозиции $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ и т.д., где a, b, c – имена индивидов. Если имён для индивидов нет, мы можем указать на конъюнктивную или дизъюнктивную общность соотнесённых с функцией пропозиций с помощью новой пропозиции, использующей выражение общности, такой как $(x) . f(x)$ или $(\exists x) . f(x)$. Этот же подход можно распространить на функции от индивидов любой местности. Так, например, с двухместной функцией $f(\hat{x}, \hat{y})$ мы можем соотнести пропозиции вида $f(a, b)$, придав константное значение переменным $\hat{x}$ и $\hat{y}$, или пропозиции вида $(x).f(x, a)$, придав сначала константное значение переменной $\hat{y}$ и образовав одноместную функцию от индивидов $f(\hat{x}, a)$, а затем указав с помощью общности на совокупность соотнесённых с этой одноместной функцией пропозиций.

Казалось бы, подобный подход можно распространить и на функции от функций. Например, для одноместной функции от функций $f(\phi\hat{x})$ можно было бы задать общность пропозиций, указывая с помощью $(x).f(\phi\hat{x})$ и $(\exists x). f(\phi x)$ на их конъюнкцию и дизъюнкцию соответственно. Но, как считает Рамсей, подобный подход страдает от «плачевной двусмысленности». Дело в том, что область значения функции от индивидов образует объективную общность пропозиций, что связано с объективностью области индивидов, тогда как область значения функций от функций не образует объективной общности, поскольку функции рассматриваются как символы и зависят от принятых способов построения. Эту двусмысленность можно попытаться устранить, уподобив функции от индивидов функциям от функций, говоря не о функциях от индивидов, а о функциях от имён индивидов, поскольку имена также являются символами. Но проблемы это не решает, так как общность имён всё равно определяется объективной областью индивидов, которые с ними соотнесены. Для функций же такой объективной общности, не зависящей от способов их построения, нет, на что, в частности, указывает то, что неограниченное использование функций от функций может приводить к парадоксам, что требует принятия определённых синтаксических ограничений на их построение, как поступает Рассел. Эти синтаксические ограничения выражаются в различении функций на порядки, даже если они относятся к одним и тем же аргументам, и введении особого понятия предикативной функции, чего не было бы, если бы функции понимались как нечто большее, чем символы определённого вида.

Подход к конструированию функций, принятый в *Principia Mathematica*, Рамсей называет субъективным, субъективным в том смысле, что он ориентирован на определённые виды грамматических конструкций. Однако, как было показано в начале параграфа, само по себе различие в грамматических конструкциях для различия самих функций роли не играет, поскольку, использование редукции по методу Витгенштейна показывает, что различие в порядках функций затрагивает лишь способы выражения, но не их объективное значение. В противовес подходу *Principia Mathematica* Рамсей пред-

предлагает объективный метод задания общности функций, который был бы ориентирован не на то, как они построены, но на то, каково их объективное значение.

Можно сказать, что в этом отношении Рамсей оборачивает возможный способ решения указанной выше двусмысленности. Дело не в том, чтобы уподобить функции от индивидов функциям от функций, рассматривая функции от имён индивидов, но в том, чтобы функциям от имён индивидов уподобить функции от функций: «Знаки, которые могут быть подставлены как аргументы в '$\phi\hat{x}$', функции от индивидов, определяются их значениями; они должны быть именами индивидов. Сходным образом я предлагаю определять символы, которые могут быть подставлены как аргументы в '$f(\phi\hat{x})$', не по способу их конструирования, но по их значениям» [1. С. 44]. Другими словами, Рамсей предлагает задавать общность функций не с точки зрения того, как их можно построить, но с точки зрения того, какое значение мы пытаемся выразить, быть может, и используя разные способы выражения. Сделать это достаточно трудно, поскольку в отличие от имён, которые обозначают индивиды, т.е. единичные объекты, с которыми имена соотносятся однозначным образом, значение функций более сложно, поскольку может быть поставлено в зависимость от возможных видов пропозиций, которые могут быть построены с их помощью. Как показывает метод редукции, представленный выше, эти пропозиции могут быть выражены как элементарно, так и не элементарно, как используя предикативные функции в смысле Рассела, так и нет. Здесь следует учесть также и то, что могут существовать пропозиции, которые мы не можем выразить за конечное число шагов. Дело в том, чтобы все пропозиции представить с точки зрения единого значения, допускающего разные способы выражения: «Мой метод состоит в том, чтобы рассмотреть, как мы можем их сконструировать и определить с помощью описания их смысла или сути; и, поступая так, мы могли бы быть способны включить в это множество пропозиции, для которых у нас нет способа конструирования, точно так же, как мы включаем в область значений ϕx пропозиции, которые не можем выразить из-за недостатка имён для рассматриваемых индивидов» [1. С. 44]. Такой метод задания функций Рамсей называет объективным и противопоставляет его методу, принятому в *Principia Mathematica*.

В конечном счёте, учитывая представленный метод редукции, для Рамсея проблема сводится к тому, чтобы «в качестве значений $f(\phi\hat{x})$ зафиксировать некоторое определённое множество пропозиций так, чтобы мы могли утверждать их логическое произведение или сумму» [1. С. 44]. В решении этой задачи Рамсей отталкивается от понятия атомарной функции от индивидов, которые понимаются им как пропозициональные функции, полученные из атомарных высказываний заменой имён индивидов на индивидные переменные. Затем на атомарные функции от индивидов распространяется идея истинностных функций. Это осуществляется следующим образом. Допустим, у нас есть атомарные функции $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$. Из них можно образовать конъюнкцию $\phi_1(x)\ .\ \phi_2(x)$ и определить её как $\psi(x)$, которая для каждого имени индивида a задаёт пропозицию $\psi(a)$, являющуюся конъюнкцией $\phi_1(a)$ и $\phi_2(a)$. Этот подход можно распространить на истинностные функции любого вида, построенные с помощью различных логических союзов, что, впрочем, не существенно ввиду взаимоопределимости последних. Эти функции могут включать не только атомарные функции, но и другие пропозиции. Пусть, например, $\psi(x)$ определена как $(\phi_1(x) \vee p)$. $\phi_2(x)$. Интересно здесь то, что эта же функция может быть определена как $\sim(\sim\phi_1(x) \vee \sim p)$. $\phi_2(x)$, так и многими другими способами, поскольку первое и второе определение имеют одинаковые условия истинности. Таким образом, поскольку, с точки зрения подхода Витгенштейна, которому следует Рамсей, функции, имеющие одинаковые условия истинности, не различаются, способ построения $\psi(x)$ никакой роли не играет, учитывается только её объективное значение.

Это важно в связи с тем, что число атомарных функций, на которые распространяется идея истинностных функций, может быть не только конечным, но и бесконечным. В этом случае, когда за конечное число шагов истинностную функцию выразить невозможно, используются выражения общности и истинностная функция становится неэлементарной в смысле Рассела. Но ввиду того, что элементарность и неэлементарность затрагивает для Рамсея лишь способ выражения, поскольку неэлементарные функции в принципе (хотя и не актуально) редуцируемы к элементарным, на объективное значение истинностных функций это влияния не оказывает.

Отталкиваясь от подобных соображений, можно ввести новое понятие предикативной функции, которое Рамсей определяет так: «*Предикативная функция* от индивидов – это функция, которая является любой истинностной функцией, аргументами которой, конечными или бесконечными по числу, являются все или атомарные функции от индивидов, или пропозиции» [1. С. 45]. Аналогичное определение нетрудно задать и для функций от функций, следует лишь учитывать требования простой теории типов. Заметим, что такое понятие предикативной функции неизмеримо шире аналогичного понятия из *Principia Mathematica*. В частности, все предикативные функции в смысле Рассела оказываются предикативными в смысле Рамсея. Для элементарных функций это очевидно. Для неэлементарных функций от индивидов это следует из метода редукции, поскольку, например, функция $(y)f(x,y)$ представляет собой лишь конъюнкцию (хотя, возможно, бесконечную) функций вида $f(x,a)$, $f(x,b)$ … Более того, в число предикативных включаются не только функции, которые могут быть построены разными способами, но и функции, для конструирования которых средств *Principia Mathematica* не хватает. В данном случае главное в том, что учитывается их объективное значение, для выражения которого не хватало средств у конструирующего их логика, но которое должно быть учтено объективностью логики как науки.

Но как обстоит дело с непредикативными функциями в смысле Рассела? С точки зрения Рамсея, непредикативные функции *Principia Mathematica* типа (ϕ) . $f(\phi\hat{z}, x)$ также оказываются предикативными. Действительно, как показано выше при описания метода редукции, любая такая функция может быть представлена как конъюнкция атомарных функций, переменных для ϕ, но постоянных для x, в виде ($\phi_1 x$. $\phi_2 x$. $\phi_3 x$. …). Если обратиться к содержательному примеру, то функция 'x имеет все свойства философа' при соответствующем понимании свойств философа представима как логическое произведение (возможно, бесконечное) вида '(x – интеллектуально честен) . (x – логичен) . …'. Поэтому, «ясно, что посредством обобщения, независимо от типа мнимых переменных, мы никогда не сможем создать непредикативную функцию, ибо обобщение является истинностной функцией своих примеров и, если примеры предикативны, предикативным является и оно. Таким образом, все функции индивидов, встречающиеся в *Principia*, являются предикативными в нашем смысле и включены в нашу переменную ϕ, так что всякая необходимость в аксиоме сводимости исчезает» [1. С. 47]. Здесь, правда, возникает вопрос относительно самой функции $Fx = (\phi) . f(\phi\hat{z}, x)$. Может ли она выступать значением мнимой переменной ϕ в $(\phi) . f(\phi\hat{z}, x)$? Ведь именно этот случай, по мнению Рассела, приводит к порочному кругу и требует ограничений на построение функций. Утвердительно отвечая на поставленный вопрос, Рамсей тем не менее считает, что в этом случае нет ничего порочного. Общность, присутствующая в Fx, характеризует лишь способ выражения, но не затрагивает значения самой функции, которая может быть представлена соответствующей конъюнкцией, и даже если среди конъюнктов последней встречается сама Fx, т.е. конъюнкция имеет вид ($\phi_1 x$. $\phi_2 x$. $\phi_3 x$. … . Fx), в этом нет ничего логически несообразного, поскольку здесь Fx также должна рассматриваться как конъюнкция, т.е. выражение принимает вид ($\phi_1 x$. $\phi_2 x$. $\phi_3 x$. … . ($\phi_1 x$. $\phi_2 x$. $\phi_3 x$. …)). Соответственно, когда мы записываем пропозицию $Fa = (\phi) . f(\phi\hat{z}, a)$, используя неэлементарные способы выражения ввиду недостаточности логических средств, мы должны трактовать её как конъюнкцию вида ($\phi_1 a$. $\phi_2 a$. $\phi_3 a$. … . ($\phi_1 a$. $\phi_2 a$. $\phi_3 a$. …)). Как утверждает Рамсей: «Пропозиция Fa – это, конечно, логическое произведение пропозиций $f(\phi\hat{z}, a)$, но выразить её подобным образом (единственно возможным для нас) – значит просто описать её определённым способом, ссылаясь на общность, членом которой может быть она сама, так же как мы можем указать на человека как на самого высокого в группе, идентифицируя, таким образом, его посредством совокупности, членом которой является он сам, не впадая в порочный круг» [1. С. 47]. Использование неэлементарной функции Fx касается лишь избранного способа выражения и не затрагивает объективного значения пропозиции.

Но случай с ($\phi_1 a$. $\phi_2 a$. $\phi_3 a$. … . ($\phi_1 a$. $\phi_2 a$. $\phi_3 a$. …)) вполне аналогичен случаю с (p . q . (p . q)). Из свойств конъюнкции следует, что условия истинности (p . q . (p . q)) совпадают с условиями истинности (p . q), а значит, поскольку пропозиции с одинаковыми условиями истинности отождествляются, (p . q) может рассматриваться как логическое произведение элементов множества p, q, (p . q)), членом которого является само (p . q). В этом явно нет ничего порочного. Поэтому нет ничего порочного и в том, что во множество, логическое произведение элементов которого рассматривается как эквивалент Fa, включено само Fa. Различие заключается лишь в том, что из-за нашей неспособности записывать конъюнкции бесконечной длины, что логически случайно, мы не можем выразить последний случай элементарно, как это может быть сделано в случае с (p . q), но должны прибегать к выражениям общности.

Проиллюстрируем вышесказанное содержательным примером, к которому уже прибегали. Возьмём высказывание “Сократ имеет все свойства философа”, обладающее всеми структурными особенностями рассмотренного выше Fa. Согласно Рамсею, это высказывание эквивалентно конъюнкции высказываний, имеющих вид “Сократ интеллектуально честен”, “Сократ логичен” и т.д., из возможно бесконечного множества, в которое включено и само высказывание “Сократ имеет все свойства философа”. Таким образом, мы получаем высказывание “Сократ интеллектуально честен, логичен, … , имеет все свойства философа”. Но если ‘все свойства философа’ опять заменить конъюнкцией, то получим “Сократ интеллектуально честен, логичен, … , интеллектуально честен, логичен … .”, в котором лишь дважды утверждается одно и то же. Различие исходного и заключительного высказываний в данном примере затрагивает лишь способ выражения, поскольку в первом случае используется неэлементарная, а во втором элементарная функции, но роли это не играет, поскольку оба высказывания имеют одинаковые условия истинности.

Заметим, что подобный подход распространим не только на конъюнкцию атомарных высказываний. В принципе, какой бы ни была функция, свести её к функциям истинности атомарных пропозиций есть дело логической техники. При соответствующем способе записи для всех пропозиций, образованных с помощью операций истинности над атомарными высказываниями, результат которых имеет одинаковые условия истинности, можно ввести, что следует из подхода Витгенштейна, единую запись. Если, например, взять функцию истинности, представленную ‘$p \supset q$’, то ей будет соответствовать множество различных способов выражения, принятых в *Principia Mathematica*. Это будет не только ‘$p \vee {\sim}q$’, но и ‘${\sim}({\sim}p \,.\, q)$’, ‘${\sim} ({\sim}p \,.\, ({\sim}p \,.\, q))$’, ‘${\sim}({\sim}p \,.\, (q \,.\, q))$’ и многих, многих других. Более того, ту же самую функцию истинности будет представлять и логическое произведение всех этих способов выражения, а именно ‘$({\sim}({\sim}p \,.\, q)) \,.\, ({\sim} ({\sim}p \,.\, ({\sim}p \,.\, q))) \,.\, ({\sim}({\sim}p \,.\, (q \,.\, q))) \dots . (p \vee {\sim}q)$’, которое включает само ‘$p \vee {\sim}q$’, поскольку, что следует из условий истинности логического произведения, данная запись будет выражать те же самые условия истинности, что и каждый из конъюнктов. В этом случае при принятых способах выражения в *Principia Mathematica* можно сказать, что ‘$p \vee {\sim}q$’ является логическим произведением множества пропозиций, членом которого является оно само. Здесь, конечно, необходимо различать способ выражения, в качестве которого мы можем избрать ‘$p \vee {\sim}q$’, и объективное значение, остающееся одним и тем же при любых способах записи.

Подобная процедура, с точки зрения Рамсея, должна относиться и к тем функциям, которые мы не можем выразить элементарно ввиду недостаточности логических средств. Опять-таки роль должны играть не ресурсы конечной записи, а представление о принципиальной возможности записи как таковой, пусть она даже будет бесконечной и не соответствующей представлениям о человеческих способностях: «Если бы мы обладали бесконечными ресурсами и могли выразить все атомарные функции типа $\psi_1 x$ и $\psi_2 x$, то мы могли бы образовать все пропозиции ϕa, т.е. все истинностные функции $\psi_1 a$, $\psi_2 a$ и т.д., и среди них была бы та, которая является логическим произведением их всех, включая саму себя, так же как $p \,.\, q$ является произведением p, q, $p \vee q$, $p \,.\, q$. Эта пропозиция, которую мы не можем выразить непосредственно, т.е. элементарно, мы выражаем опосредованно, как логическое произведение их всех, записывая ‘$(\phi) \,.\, \phi a$’. Это, конечно, круговой процесс, но в нём явно нет ничего порочного» [1. С. 48]. Здесь, как и в случае конечной записи, важно лишь, чтобы условия истинности, соответствующие функции, оставались теми же самыми.

В этом Рамсей видит преимущество своего определения предикативной функции в сравнении с определением Рассела: «В *Principia* область ϕ – это область функций, которые могут быть выражены элементарно, а поскольку $(\phi) \,.\, f(\phi\,!\,\hat{z}, x)$ так выразить нельзя, она не может быть значением $\phi!$; но я определяю значения ϕ не по тому, как они могут быть выражены, но по тому, какой разновидностью смыслов обладают их значения или, скорее, по тому, какие факты, утверждаемые их значениями, относятся к их аргументам. Таким образом, я включаю функции, не говоря уже об элементарных, которые даже не могут быть выражены нами вообще, кроме как посредством бесконечной символической системы. И любая функция, образованная посредством обобщения, является действительно предикативной, и более нет какой-то необходимости в аксиоме сводимости» [1. С. 48].

Итак, аксиома сводимости отбрасывается. В ней больше нет необходимости, поскольку понятие предикативной функции в смысле Рамсея охватывает все функции, рассматриваемые в *Principia Mathematica*. Но остаётся проблема. Аксиома сводимости использовалась у Рассела как способ сведения непредикативных функций к предикативным. Если же теперь, согласно методу Витгенштейна в интерпретации Рамсея, все функции оказываются предикативными, не означает ли это возрождение парадоксов, для преодоления которых и была изобретена разветвлённая теория типов?

Дело собственно в следующем. Рассел создал простую теорию типов. И эта теория решала ряд парадоксов, имеющих теоретико-множественный характер. Разветвлённая теория типов предназначалась для решения парадоксов, выходящих за эти рамки. Аксиома сводимости демонстрировала, что в пределах собственно математического рассуждения можно ограничиться простой теорией типов. Но если теперь эта аксиома отбрасывается, не возродятся ли вновь парадоксы? Действительно, аксиома сводимости постулировала, что функцию порядка n+1 всегда можно выразить функцией порядка n, а значит, можно избежать недоразумений, связанных с принципом порочного круга. Но если теперь, в интерпретации Рамсея, любую функцию можно рассматривать как относящуюся к порядку n, не прибегая к аксиоме сводимости, не означает ли это, что мы опять придём к парадоксам?

На первый взгляд ответ кажется утвердительным. Действительно, возьмём, например, парадокс Грелинга. В рамках разветвлённой теории типов решение данного парадокса основывалось на том, что функция ‘x есть гетерологическое’ или символически ‘$(\exists\phi) : xR(\phi\hat{z}) \,.\, {\sim}\phi x$’ рассматривалась как непредикативная в смысле Рассела, если значения присутствующей в ней мнимой переменной не ограничивались порядком ниже самой этой функции. Если это условие не выполняется, то выражение ‘$(\exists\phi) : xR(\phi\hat{z}) . \sim\phi x$’ рассматривается как бессмысленное, как некорректное синтаксическое образование. Но изменение понятия предикативной функции у Рамсея приводит к тому, что функция ‘$(\exists\phi) : xR(\phi\hat{z}) . \sim\phi x$’ является предикативной без этого ограничивающего условия, т.е. сама эта функция может быть значением мнимой переменной ϕ и, казалось бы, парадокс возрождается.

Однако не всё так просто. Рамсей даёт решение эпистемологических (или семантических) парадоксов на принципиально ином базисе, создавая новую теорию типов, основанную на другом понимании различения функций на порядки. У Рассела различие функций на порядки касалось способа их синтаксического построения. Но, как показал Рамсей, синтаксическая сторона дела не относится к существу проблемы, если мы обращаемся к объективному значению функций. Даже если это и требует бесконечных ресурсов, то это касается ограниченности логика, но не объективности логики как науки.

Поскольку значение функций объективно, то не имеет смысла учитывать синтаксический способ построения их выражений, так как он не относится к делу. Учитывая ‘эпистемический’, или ‘лингвистический’, характер парадоксов, для которых была нужна разветвлённая теория типов, скорее резонно предположить, что дело здесь в том, как функционируют используемые нами выражения, обозначая своё значение. Резонно предположить, что парадоксы возникают не из-за конструктивных особенностей построения функций, а из-за некритического усвоенного понятия значения выражений, с помощью которых строятся эти функции, что и делает Рамсей, переходя, таким образом, из синтаксической плоскости рассмотрения в семантическую. Как утверждает Рамсей: «Из противоречий явно вытекает то, что мы не можем получить для пропозициональных функций всёохватное отношение значения. Какое бы отношение мы не брали, всё ещё есть способ конструирования символа, который обозначает таким способом, который не включён в наше отношение. Значения значения образуют логически неправильную совокупность» [1. С. 51]. Выражение “Неправильная логическая совокупность”, очевидно, отличается здесь от соответствующего выражения в рамках *Principia Mathematica*. Нетрудно заметить, что речь здесь, хотя она и идёт о функциональных выражениях, затрагивает не тот способ, которым конструируются выражения функций, но то, каким образом элементы этого выражения относятся к тому, что они обозначают. Выражение “логически неправильная совокупность” относится здесь не к тому, что мы пытаемся соотнести с определённым образом построенной функцией, но к тому, что соотносится со значением символического выражения этой функции. Стало быть, неправильную совокупность следует искать не в области объективного значения функции, а в области неправильно понятого значения её символического выражения.

Рамсей рассуждает следующим образом. Возьмём, например, простое выказывание ‘aRb’. Здесь ‘a’ и ‘b’ являются именами индивидов, а ‘R’ – именем отношения. Тогда имена ‘a’, ‘b’ и ‘R’ непосредственным образом соотнесены с объектами a, b и R. Но предположим теперь, что по определению мы принимаем: $\phi x =_{\mathrm{def}} aRx$. Тогда ‘$\phi$’ относится к aR совершенно иным, более сложным способом, поскольку необходимо учитывать не непосредственное отношение этого символа к единому объекту, но трёхчленное отношение между ‘ϕ’, a и R. Эти особенности значения нужно учитывать относительно любой функции, выраженной элементарно. Например, если по определению мы принимаем: $\phi!x =_{\text{def}} aRx \,.\, bRx \,.\, cRx$ ..., то необходимо учитывать все те сложные отношения, в которых символ ‘ϕ’ находится с a, b, c … и R.

Однако, как указывалось выше, с точки зрения Рамсея, элементарность характеризует не объективное значение функции, но способ её выражения. То, что мы выразили элементарно, может быть выражено не элементарно. Так, левая часть определения $\phi!x =_{\text{def}} aRx \,.\, bRx \,.\, cRx$ ... с точки зрения объективного значения функции будет эквивалентна не элементарному выражению ‘$(y) \,.\, yRx$’, если переменная y пробегает по объектам a, b, c … . Но можно ли их заменить в данном определении друг на друга. Рамсей утверждает, что нет. Мы можем ввести по определению, что $\phi_1 x =_{\text{def}} (y) \,.\, yRx$. Но символы ‘$\phi!$’ и ‘$\phi_1$’ обозначают совершенно различным образом, поскольку ‘$\phi!$’ соотносится с объектами a, b, c …, являясь сокращением для выражения, содержащего соответствующие имена ‘a’, ‘b’, ‘c’ …, тогда как ‘ϕ_1’ вообще не соотносится с этими объектами, но только с мнимой переменной, которая по ним пробегает. Поэтому ‘ϕ_1’ обозначает иным, более сложным способом, чем ‘$\phi!$’.

Как уже говорилось, способ выражения функций, элементарный или неэлементарный, не является характеристикой самой функции. То же самое относится и к способу обозначения. Он не характеризует саму функцию, но относится лишь к тому, как приобретают значение способы выражения функции. Поэтому ‘$\phi!x$’ и ‘$\phi_1 \hat{x}$’ могут выражать одну и ту же функцию, но подразумевать своё значение совершенно различными способами. Те же самые соображения касаются символа ‘ϕ_2’, включающего мнимую функциональную переменную от индивидов, символа ‘ϕ_3’, включающего мнимую функциональную переменную от функций индивидов, и т.д. Как говорит Рамсей: «Различия ‘$\phi!$’-ок, ‘ϕ_1’-ок и ‘ϕ_2’-ок применяются к символам и к тому, как они обозначают, но не к тому, что они обозначают. Поэтому я всегда (в этом разделе) заключал ‘$\phi!$’, ‘ϕ_1’ и ‘ϕ_2’ в кавычки» [1. С. 51].

Именно это имеет в виду Рамсей, когда говорит, что невозможно получить всеохватное отношение обозначения, а попытка оперировать подобным понятием порождает неправильную логическую совокупность, приводящую к противоречиям. Можно, конечно, возразить, что возможно попытаться сформировать такое понятие значения символов, которое включало бы все различные ‘$\phi!$’-ки, ‘ϕ_1’-ки, ‘ϕ_2’-ки и т.д., но всё равно, утверждает Рамсей, само оно для любого заданного ‘ϕ_n’ относилось бы к уровню ‘ϕ_{n+1}’ и всеохватного понятия значения мы бы не получили.

Все эти соображения приводят Рамсея к построению собственной теории типов, в существенных моментах отличающейся от разветвлённой теории типов Рассела. Самое главное в этой теории то, что типы и порядки разводятся по разным рубрикам. Типы характеризуют объективное значение функции, тогда как порядки только её символическое выражение. Понятие типа у Рамсея соответствует тому пониманию, которое фигурировало в простой теории типов. Он сохраняет фундаментальную иерархию индивидов, функций от индивидов, функций от функций индивидов и т.д., относя первые к типу 0, вторые к типу 1, третьи к типу 2 и т.д., но изменяет понимание стратификации на порядки.

Высказывания, не содержащие мнимых переменных (элементарные высказывания), Рамсей относит к порядку 0; высказывания, содержащие мнимые индивидные переменные, – к порядку 1; высказывания, содержащие мнимые переменные функций от индивидов, – к порядку 2 и т.д. В общем случае высказывание относится к порядку n, если оно содержит мнимые переменные, относящиеся к типу n–1. Из иерархии высказываний выводится стратификация функций, которая относится не к иерархии типов, а к порядку значения их выражения. Функции, не содержащие мнимых переменных, относятся к порядку 0; функции, содержащие мнимые индивидные переменные, – к порядку 1; функции, содержащие мнимые переменные функций от индивидов, – к порядку 2 и т.д.

В целом эта иерархия напоминает иерархию разветвлённой теории типов. Но следует учесть, что смысл этой стратификации совершенно иной. Для Рассела и типы, и порядки являются действительными характеристиками функций, тогда как для Рамсея типы и порядки имеют сущностное различие: «Тип функции является действительной её характеристикой, зависящей от аргументов, которые она может принимать; но порядок пропозиции или функции является не действительной характеристикой, но тем, что Пеано называл псевдофункцией. Порядок функции напоминает числитель дроби. Так же как из ‘$x = y$’ мы не можем вывести, что числитель x равен числителю y, так и из того факта, что ‘p’ и ‘q’ являются примерами одной и той же пропозиции, мы не можем вывести, что порядок ‘p’ равен порядку ‘q’ … Порядок есть лишь характеристика отдельного символа, который является примером пропозиции или функции» [1. С. 52]. Стратификация на порядки для объективного значения функции имеет фиктивный характер и отражает только способы, которые использует выражающий это объективное значение логик. Будучи ограниченным конечными ресурсами, он прибегает к порядкам там, где в силу сложившихся обстоятельств невозможно обойтись элементарными выражениями функций.

Так же как и разветвлённая теория типов, стратификация, предложенная Рамсеем, позволяет разрешить парадоксы группы B, но на другом основании. Вернёмся, например, к парадоксу Грелинга. Функция $Fx = (\exists \phi) : xR(\phi \hat{z}) \,.\, {\sim}\phi x$, с точки зрения того, как Рамсей определяет предикативную функцию, представляется противоречивой. Однако это не так. Связано это с тем, каким образом приобретают значение символы ‘ϕ’ и ‘R’. Допустим, что значение символа ‘ϕ’ ограничено элементарными функциями, тогда ‘R’ выражает отношение обозначения между ‘$\phi!$’ и $\phi! \hat{x}$. Но сама ‘Fx’ не является элементарной, поскольку в её структуру входит мнимая переменная функции от индивидов и, стало быть, относится ко второму порядку, т.е. представляет собой ‘ϕ_2’. А значит, ‘F’ относится к своему значению совершенно иначе, чем ‘R’ к своему. Поэтому в данном случае Fx не может подразумеваться в качестве возможного значения 'ϕ' и тем самым парадокс Грелинга устраняется. Здесь важно отметить различие в решениях, предлагаемых в рамках разветвлённой теории типов и теории типов Рамсея. Парадокс разрешается не тем, что мы ограничиваем область действия квантора, как это было у Рассела, но тем, что ограничиваются возможные значения символа. Ограничение возникает из-за того, что символы 'F' и 'R' обозначают совершенно по-разному. Если, как в данном случае, мы ограничиваемся элементарными функциями, то символ не может иметь отношении R к функции, если он не является элементарным, что и имеет место в случае с 'F'. Те же самые аргументы будут работать, если мы в качестве возможных значений символа 'ϕ' возьмём функции более высоких порядков. Всё равно 'R' будет выражать отношение обозначения, которое не будет включать Fx, так как Fx будет относиться к более высокому порядку.

Аналогичным образом, т.е. апелляцией к значениям символов, разрешаются другие парадоксы группы *B*. Здесь самым интересным случаем, наверное, представляется парадокс *Лжеца*. Приведём решение Рамсея. Допустим, я говорю: 'Я сейчас лгу'. Тогда, как считает Рамсей, это высказывание следует анализировать следующим образом: «'($\exists$ "p", p) **:** Я говорю "p" **.** "p" означает p **.** $\sim p$'. Здесь, чтобы получить определённое значение для *означает*, необходимо некоторым образом ограничить порядок 'p'. Предположим, что 'p' должно относиться к n-му или меньшему порядку. Тогда, если посредством ϕ_n символизировать функцию типа n, 'p' может быть $(\exists \phi_n)$ **.** $\phi_{n+1}(\phi_n)$. Поэтому $\exists$'p' включает $\exists \phi_{n+1}$ и 'Я сейчас лгу' в смысле 'Я сейчас утверждаю ложную пропозицию порядка n' относится по крайней мере к порядку $n+1$ и не противоречит само себе» [1. С. 53].

Это действительно оригинальное решение, коренным образом отличающееся от подхода Рассела. При решении данного парадокса у Рассела речь не идёт об отношении обозначения, там просто говорится, что высказывание о высказывании относится к более высокому типу. Но Рамсей даёт иное решение, на которое указывает уже то, как он интерпретирует высказывание 'Я сейчас лгу', используя дополнительную кванторную переменную. Этой дополнительной кванторной переменной (а именно кванторной переменной "p") является переменная символа, обозначающего определённым образом.

Различие заключается, собственно, в следующем. Рассел интерпретирует парадокс *Лжеца* так: "Существует высказывание порядка n, которое я утверждаю и которое ложно", но при этом само это высказывание должно относиться к порядку $n+1$ и не может являться значением присутствующей в нём мнимой переменной, на которую указывает выражение *некоторое*. Рамсей же утверждает, что в формулировке парадокса *Лжеца* основную роль играет не утверждение какого-то свойства относительно нашего предыдущего высказывания, но способ, которым мы это высказывание обозначаем. Поэтому дело не в том, каким образом указывается область действия квантора, а в том, как мы устанавливаем значение символов, которые выбраны для обозначения высказываний. Тогда речь должна идти не о высказываниях порядка n, но о символах, которые эти высказывания обозначают. Когда мы говорим: "Я утверждаю высказывание порядка n", тогда то, что подразумевается символом ‘*n*’, обозначает совершенно особым способом, который должен прямо фиксироваться в этом утверждении, а именно: “Я утверждаю высказывание типа *n* способом ‘*n*’”. Тогда невозможность парадокса *Лжеца* относится к тому способу, которым обозначает мнимая переменная “*p*”, фигурирующая в высказывании ‘($\exists$ “*p*”, *p*) : Я говорю “*p*” . “*p*” означает *p* . ~*p*’. Но само это высказывание ‘($\exists$ “*p*”, *p*) : Я говорю “*p*” . “*p*” означает *p* . ~*p*’ не может подразумеваться в качестве возможного значения символа “*p*”, поскольку относится к другому порядку. Этим и разрешается парадокс *Лжеца*.

Здесь следует указать один очень важный, на наш взгляд, момент. Предложенные Рамсеем способы решения парадоксов Грелинга и *Лжеца* предполагают значительно иное прочтение того, как обычно формулируются эти парадоксы. Прочтения возможны разные, и от этих прочтений зависит возможность их различного решения. Именно прочтением парадоксов различаются подходы Рассела и Рамсея. Уточнение того, как символы относятся к тому, что они обозначают, существенно отличается от того, как возможно сконструировать символы для того, чтобы они были способны обозначать. Очевидно, что конструктивный подход к символам отличается от объективного подхода к тому, что они выражают. Более того, различие объективного подхода к значению символов и конструктивного подхода к их построению показывает, что решение семантических парадоксов (парадоксов группы *B*) не требует дополнительных технических средств, помимо тех, что представлены объективностью логики как науки. И здесь Рамсей безусловно прав. Нетрудно заметить, что и все остальные парадоксы группы *B* разрешимы на предлагаемых им основаниях. Таким образом, уточнение понятия значения символов позволяет разрешить все семантические парадоксы.

Самое интересное здесь то, что с технической точки зрения, а именно возможности используемого символизма, реформированного с позиций *Трактата* Витгенштейна, результаты подхода, адаптированного Рамсеем, по следствиям абсолютно совпадают с разветвлённой теорией типов Рассела. По дедуктивным следствиям разветвлённая теория типов Рассела и теория типов Рамсея эквивалентны. Предназначенные для решения парадоксов определённого типа, они оказались равносильны. Это отмечает и сам Рамсей: «Мои решения противоречий, очевидно, весьма похожи на решения Уайтхеда и Рассела, различие между ними основано просто на наших различных концепциях порядка пропозиций и функций. Для меня пропозиции сами по себе не имеют порядков; они, так же как и различные истинностные функции атомарных пропозиций, суть определённые совокупности, зависящие только от того, чем являются атомарные пропозиции. Порядки и логически неправильные совокупности приходят лишь с символами, которые мы используем, чтобы символизировать факты различными усложнёнными способами» [1. С. 53].

Однако дедуктивные следствия не должны отождествляться с содержательными предпосылками, которые, быть может, имеют гораздо большее значение для предприятия, стоящего столь важного изменения в понимании того, что представляет собой порядок функции. Действительно, теория типов, предложенная Рамсеем, дала совершенно новое понимание источников парадоксов, но это понимание дало и новое понимание источников математики в рамках логицистского к ней подхода. Во всяком случае, Рамсей показал, что логицистский подход может предполагать иное, отличное от подхода *Principia Mathematica*, отношение к возможности сведения математики к логике. Этот подход предполагает учёт более сложных моментов, в частности эпистемологических и лингвистических. Именно эти моменты как раз и обеспечили не только новизну, но и относительную завершенность логицистской программы.

Давая оценку разветвлённой теории типов, Рассел писал: «Теория типов ставит ряд трудных философских вопросов, касающихся её интерпретации. Однако эти вопросы, в сущности, отделимы от математического развития этой теории и подобно всем философским вопросам вводят элемент неопределённости, который не относится к самой теории. Следовательно, по-видимому, лучше формулировать эту теорию без ссылки на философские вопросы, оставляя их для независимого исследования» [4. С. 62]. Рассел, очевидно, разделяет технические вопросы развития теории типов и вопросы, связанные с её содержательной интерпретацией. Однако, как показали реформы, предпринятые Рамсеем, философские вопросы в рамках этой теории неотделимы от технических деталей, поскольку содержательные соображения оказывают существенное влияние на технический аппарат. Несмотря на то, что по следствиям, связанным с решением семантических парадоксов, разветвлённая теория типов и теория типов Рамсея эквивалентны, конструктивный подход Рассела разительно отличается от реалистского подхода Рамсея. К тому же для Рамсея важную роль играют сугубо семантические соображения, которые совершенно отсутствуют у Рассела. Иной смысл приобретает и программа сведения математики к логике, поскольку по-иному трактуется такое важное понятие, как функция. Поэтому остановимся несколько подробнее на некоторых содержательных соображениях, которыми руководствовался Рамсей, реформируя теорию типов. Следует учесть, что эти соображения тесно взаимосвязаны и даже имплицируют друг друга.

Начнём с того, что Рамсей отказывается от универсальной применимости принципа порочного круга при объяснении парадоксов и связанных с этим объяснением так называемых непредикативных определений. Касаясь принципа порочного круга, Рамсей пишет в письме к Френкелю: «Факт в том, что так называемый “непредикативный процесс” бывает нескольких, существенно различных видов. Мне всегда казалось весьма плачевным, что использование Расселом принципа порочного круга имело тенденцию скрывать, что круг, от которого он стремился избавиться, был двух существенно различных видов.

Я считаю, что в общем обсуждении непредикативных процессов есть три вещи, которые следует ясно различать.

Во-первых, есть совершенно безобидный процесс описания объекта посредством ссылки на общность, членом которой является он сам; примером этого является “самый высокий человек в этой комнате”. Я не вижу никакого разумного возражения на этот процесс; у Рассела определённо не было такого возражения…

Во-вторых, есть процесс образования класса, который является членом самого себя. Мне кажется, что возражение на этот процесс заключается не в том, что он является круговым, поскольку (если теория типов действительна) равным образом ошибочно предполагать, что класс не является членом самого себя, но просто в том, что он является бессмысленным… (Мне всегда казалось, что аргументы, посредством которых Рассел выводит эту часть теории типов из своего принципа порочного круга, были обманчивы, но что тем не менее эта теория была правильной, несмотря на ошибочную аргументацию).

В-третьих, есть образование неэлементарного свойства обладания всеми свойствами определённого сорта. В этом заключается реальное затруднение, поскольку представляется, что это свойство последовательно поднимается до совокупности свойств, включённых в его определение, и поэтому не может быть членом этой совокупности тогда как в первом, или безопасном, виде непредикативного процесса описываемый объект, очевидно, не зависит от того способа, которым описывается» [5. С. 109].

Нетрудно заметить, что эти три момента по-разному отражаются в теории типов Рамсея. Первый непредикативный процесс хотя и содержит круг, но в этом круге нет ничего порочного. Более того, именно отказ рассматривать данный круг как порочный позволяет модифицировать понятие предикативной функции. Второй непредикативный процесс исключается простой теорией типов, которая трактуется Рамсеем как средство, позволяющее избегать бессмысленных выражений. Преодоление порочного круга, присутствующего в третьей разновидности непредикативного процесса, связано с обособлением семантической составляющей формальной теории. Осмысление данного непредикативного процесса и связанной с ним группой парадоксов впервые позволило осознать семантические проблемы как проблемы *sui generis*, т.е. проблемы функционирования символизма, с помощью которого формулируется теория, начинают трактоваться как отличные от проблем, касающихся объективного содержания самой теории. В этом отношении Рамсей является одним из родоначальников логической семантики как особой дисциплины, рассматривающей собственный круг проблем и использующей своеобразные методы.

Другое дело, что Рамсей, хотя и осознаёт принципиальное различие двух видов проблем, всё-таки пытается объединить их в рамках единой теории типов. Интересна его мотивация. В частности, он пишет: «Этот взгляд на вторую группу противоречий не является оригинальным. Например, Пеано решил, что “Exemplo de Richard non pertine ad Mathematica, sed ad linguistica”, и поэтому отбросил его. Но такая установка не вполне удовлетворительна. У нас есть парадоксы, включающие как математические, так и лингвистические идеи; математики отбрасывают их, говоря, что ошибка должна заключаться в лингвистическом элементе, но лингвисты равным образом вполне могут отбросить их по противоположной причине, и противоречие никогда не будет разрешено. Единственное решение, которое когда-либо было дано, содержащееся в *Principia Mathematica*, определённо приписывает эти противоречия плохой логике, и необходимо ясно показать оппонентам этой точки зрения ошибку в том, что Пеано называл лингвистикой, но что я предпочёл бы назвать эпистемологией, которой обязаны эти противоречия» [1. С. 31]. Эта мотивация более свойственна философу, нежели математику, поскольку Рамсей стремится не только описать, но и объяснить. Хотя Рамсей чётко осознаёт различие парадоксов группы *A*, обязанных плохой логике, и парадоксов группы *B*, обязанных неверно трактуемому понятию значения символов, он всё-таки объединяет решение математических и лингвистических проблем в рамках единой теории, что сближает его с подходом Рассела, на которого в данном случае он, возможно, ориентировался. Это серьёзно отличается от похода, например, А. Тарского, который чётко разделяет язык-объект и метаязык, где в первом выражается содержание теории, а во втором принципы её символизма. Первое и второе не просто различаются как моменты в рамках единой теории, но представляют собой разные теории.

Указанная выше дифференциация непредикативных процессов очень тесно связана у Рамсея с важной философской предпосылкой. Имеется в виду позиция реализма относительно природы математических объектов, которой Рамсей придерживался во время написания *Оснований математики*. Приведём цитату, где эта позиция выражается наиболее отчётливо: «Говоря о пропозициях, мы, в общем, будем подразумевать типы, примерами которых являются индивидуальные символы, и будем включать типы, для которых примеров, возможно, нет. Это неизбежно, поскольку для нас не имеет никакого значения, утверждал ли или выразил ли кто-нибудь символически пропозицию; мы должны рассмотреть все пропозиции в смысле всех возможных утверждений, независимо от того, утверждались они или же нет.

Любая пропозиция выражает согласование и несогласование с дополнительными множествами истинностных возможностей атомарных пропозиций; и, наоборот, для любого множества таких истинностных возможностей было бы логически возможным утверждать согласование с одними пропозициями и несогласование со всеми другими и, стало быть, множество истинностных возможностей определяет пропозицию. На практике эта пропозиция может быть крайне трудной для того, чтобы выразить её силами нашего языка, ибо нам недостаёт как имён для множества объектов, так и методов создания утверждений, включающих бесконечное число атомарных пропозиций, кроме относительно простых случаев… Тем не менее мы должны рассмотреть и те пропозиции, для выражения которых наш язык не подходит» [1. С. 41].

Что же получается? Рамсей рассматривает функции по их объективному значению, а не по тому, как они строятся с точки зрения возможностей используемого нами языка. При этом задействуется реалистский взгляд на функции, в корне отличный от конструктивистского, который ориентируется на наши возможности их построения. С точки зрения объективного подхода функция может быть какой угодно, но лишь в том случае, если мы принимаем их объективное существование. Любой подход, подразумевающий, что функция зависит от возможностей её символического выражения, ограничен возможностями действующего логика, т.е. конкретного человеческого существа, и не должен относиться к логике, если мы рассматриваем её как объективную науку, столь же объективную, сколь объективной должна рассматриваться математика.

Здесь руководящей идеей, по-видимому, выступает философское представление о том, что то, что мы должны выразить, может в корне отличаться от тех средств, которые у нас для этого есть. И нетрудно заметить, что эта идея является руководящей для всей западноевропейской философии, основной мотив которой определялся поиском средств для выражения того, что хотелось бы выразить. Точно так же поступает и Рамсей. С одной стороны, есть то, что мы хотим выразить, т.е. объективное значение функций, с другой стороны, есть средства, с помощью которых мы это можем сделать, т.е. конечные средства символического выражения. Эти средства у Рамсея трактуются не так, как у Рассела, но они всё равно реализуются в рамках единой традиции. Традиции, которая основана на противопоставлении того, что нужно, и того, что можно. Рамсей выбирает первую, Рассел – вторую. Конструктивные особенности разветвлённой теории типов Рассела снимаются объективистским подходом Рамсея, и это, вероятно, ведущая философская предпосылка, лежащая в основании теории типов Ф.П. Рамсея.

Литература

1. *Рамсей Ф.П.* Философские работы. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003.

2. *Ramsey F.P.* Notes on Philosophy, Probability and Mathematics. Napoli: Bibliopolis, 1991.

3. *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат. М.: Иностр. лит., 1958.

4. *Рассел Б.* Математическая логика, основанная на теории типов // Логика, онтология, язык. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006.

5. *Köhler E.* Ramsey and the Vienna Circle on Logicism // Cambridge and Vienna: Frank P. Ramsey and the Vienna Circle. Springer, 2006.