УДК 1:001; 001.8

Е.Д. Смирнова

РОЛЬ ИДЕАЛЬНЫХ ОБРАЗОВ В ОБОСНОВАНИИ АПОДИКТИЧЕСКОГО ЗНАНИЯ*

В статье рассматриваются проблемы, касающиеся определения роли идеальных образов («объектов») в обосновании аподиктического, математического знания, а также поднимается вопрос о характере и истоках этих идеальных образов. Обосновывается предположение, что именно идеальные высказывания, а не действительные играют определяющую роль в теоретическом конструировании моделей мира. С этой точки зрения для решения вопроса об обосновании теоретического знания предлагается обратиться к программе, выдвинутой Д. Гильбертом.

В работе А.К. Сухотина «Философия математики» поднимаются интересные вопросы, связанные с трактовкой природы и задач философии, ее роли в обосновании математического знания. Как отмечает А.К. Сухотин, «философия – это особый тип миропостижения, отличающийся порывом выйти за грань наличного бытия, за пределы знаемого, совершить переход в иное. Здесь обнаруживается близкая связь философии с математикой… Не случайно, что И. Кант назвал математику “наукой-разведчиком”, брошенной человечеством на исследование мира в его возможных вариантах» [8. С. 11].

Центральное место в работе занимает анализ различных подходов к обоснованию математики – в том числе программы Д. Гильберта. Отметим некоторые выделяемые «итоги исканий». А.К. Сухотин‘замечает, что, хотя ни одно из рассмотренных направлений философского обоснования математики «не принесло удовлетворяющего решения, вместе с тем каждое, внося что-то свое, верно раскрыло определенные стороны математики…» [8. С. 124].

А.К. Сухотин верно указывает, что, несмотря на то, что в «программе Гильберта исходной реальностью выступают знаки, несправедливо было бы усматривать в этом выражение философской установки, как это иногда пытаются делать. Речь у Гильберта идет о внутриматематическом языке, об отношении знака к знаку, а не о том, какова связь математических объектов с внешней реальностью…» [8. С. 113]. Отмечается также определенная связь подхода Гильберта с интуиционизмом и конструктивизмом, определенные их «контакты».

Интересна также оценка роли результата Гёделя, а также других теорем об ограниченностях формализмов: «…следует признать, что выводы Гёделя (как и ряд аналогичных теорем – А. Тарского, А. Чёрча и др.) не означают ущербности формальных систем. И хотя они указывают границы применимости формализмов, только на этом их значение не замыкается. На основе указанных решений удалось раскрыть существенные аспекты многих содержательных понятий…» [8. С. 121].

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 06-03-00-276а.

Мы остановимся на роли идеальных образов («объектов») в обосновании аподиктического, математического знания, на характере и истоках этих идеальных образов.

Краеугольным камнем любых теоретико-познавательных рассмотрений является трактовка необходимого, теоретического знания. Именно подход к этому вопросу лежит в основе разграничения линий рационализма и эмпиризма. Как возможно и возможно ли познание, выводящее нас за «узкие границы возможного опыта»? Что вносит в наше познание, с одной стороны, разум, а с другой – опыт?

Образцом аподиктического знания традиционно выступает логико-математическое знание, и вопросы его обоснования являются, по существу, вопросами обоснования аподиктического знания.

Особый интерес в обосновании теоретического знания, с нашей точки зрения, представляет программа, выдвинутая Д. Гильбертом. Суть этого подхода мы видим в обосновании вводимых идеализаций, «идеальных элементов» теории, а не в ее формализации и доказательстве непротиворечивости, как это обычно подчеркивается. По меткому замечанию Брауэра, как преступное деяние, не раскрытое правосудием, не становится от этого иным, так и доказательство непротиворечивости математической теории не служит ее обоснованием. Брауэр был бы прав, но суть программы Гильберта в методе идеальных элементов.

Кантианские мотивы в интуиционизме хорошо изучены и освещены в литературе. Однако философские основания гильбертовской программы заслуживают особого внимания. Одна из задач данной статьи – показать роль философских идей И. Канта в гильбертовской программе. Другая – исследовать роль идеальных образов в обосновании аподиктического знания и в построении теоретических моделей мира.

На наш взгляд, ключом к пониманию финитной установки Гильберта служит Кантово разграничение двух видов применения разума – познание «*согласно понятиям*» и познание «*посредством конструирования понятий*».

Стремясь обосновать аподиктическое, математическое знание «независимо от всякого наглядного представления и опыта», логицизм ставил задачу построения математики на основе логики. Однако отказ от обращения к опыту и наглядному созерцанию (в любом смысле) ведет при этом подходе к умножению сущностей, ничем не ограничиваемому введению идеальных объектов. В основе классической математики лежат такие понятия, как множество натуральных чисел, бесконечно удаленная точка, трансфинитные числа, множество всех множеств и т.д., – таким образом, мы используем понятия, образованные разумом, но выходящие за пределы всякого опыта.

Согласно Гильберту, понятия, не имеющие созерцательного значения, типа понятия «бесконечное», недопустимы без дальнейшего ограничения в качестве основы разумного мышления. Важно подчеркнуть, что именно И. Кант указывал на «склонность разума к расширению за узкие границы возможного опыта», где «ни эмпирическое, ни чистое созерцание не держат разум в видимых рамках», и в этом случае необходимы строгие «заградительные меры», которые удержали бы его от «крайностей и заблуждений, так что вся философия чистого разума имеет дело только с этой негативной пользой» [4. С. 598, 599].

Д. Гильберт стремится сохранить всю классическую математику (весь «канторовский рай») в полном объеме. Но все высказывания математики он подразделяет на реальные (действительные) и идеальные. Первые являются содержательными сообщениями о подлинных объектах математики и, соответственно, могут оцениваться как истинные или ложные. Вторые таковыми не являются, не имеют самостоятельного значения и не могут оцениваться как истинные или ложные. Что же представляют собой подлинные объекты математики?

В противоположность логицизму Д. Гильберт считает, что математика не сводима к логике (она обладает своим *не зависящим от логики* устойчивым содержанием), наоборот, предварительным и необходимым *условием применения логических выводов и операций* является наличие в нашем представлении внелогических конкретных объектов, которые «имеются в созерцании до всякого мышления». Именно такой характер объектов теории является гарантом надежности логики. Последнее положение приобретает характер общей теоретической, философской установки: «...для того, чтобы логические выводы были надежны, эти объекты должны быть обозримы полностью во всех их частях; их свойства, их отличие, их следование... даются непосредственно наглядно... Это – та основная философская установка, которую я считаю обязательной как для математики, так и для всякого научного мышления, понимания и общения и без которой совершенно невозможна умственная деятельность» [3. С. 351].

Но не превращаются ли в таком случае действительные предложения математики (например, арифметические законы) просто в эмпирические утверждения, пусть о конструктивных, но объектах наглядного созерцания? Но тогда, соответственно, мы возвращаемся к проблеме обоснования аподиктического характера математического знания.

Гильберт сам дает основание для такого истолкования действительных предложений – как содержательных сообщений об объектах наглядного созерцания, рассматривая их как утверждения о знаках и знаковых комбинациях. Так, в элементарной теории чисел мы имеем объект I (единицу) и из него по определенной схеме, согласно точно установленному правилу, мы конструируем – в пространстве и времени – объекты: I, II, III, ... Каждый такой числовой знак можно распознать, в отличие от любого иного знака, благодаря тому, что в нем всегда за I следует I и ничто иное в него не входит. Эти числовые символы и являются объектами рассмотрения в элементарной теории чисел. Сами по себе эти символы не имеют никакого самостоятельного значения, они ничего не обозначают. Они – объекты содержательно-наглядных конструкций и только. Мы можем, например, ввести знаки «2» и «3» как сокращения для записи числовых знаков «II» и «III» соответственно. Тогда «3 > 2» – пример *действительного предложения*, содержательного утверждения о том, что числовой знак (объект) III следует за числовым знаком (объектом) II в нашем построении. Не трактуется ли в таком случае элементарная теория чисел как эмпирическая наука «об определенного рода вещах» – знаках и их соотношениях?

Мы постараемся обосновать, что действительные предложения вовсе не являются эмпирическими. Отмечая наглядный характер свойств объектов элементарной теории чисел, Д. Гильберт в то же время, как бы противореча самому себе, называет их мыслимыми вещами. Мы полагаем, что ключ к объяснению этой гильбертовской загадки в трактовке подлинных объектов математики следует искать именно в кантовской идее *схематизма чистого созерцания*.

Мы полагаем, что в гильбертовской концепции, по крайней мере в трактовке действительных предложений, реализуется кантовская идея обоснования математического знания, его аподиктического характера – познание в математике не есть познание разумом «посредством понятий», но есть познание «посредством конструирования понятий», что позволяет разуму благополучно расширяться за «узкие границы данного в опыте». Ибо конструировать понятие, согласно Канту, – значит показать априори соответствующее ему созерцание. «Следовательно, – пишет Кант, – для конструирования понятия требуется не эмпирическое созерцание, которое, стало быть, как созерцание есть единый объект, но тем не менее, будучи конструированием понятия (общего представления), должно выразить в представлении общезначимость для всех возможных созерцаний, подходящих под одно и то же понятие» [4. С. 600]. Точно так же гильбертовские числовые знаки I, II и т.д. как эмпирические созерцания представляют собой единичные объекты, но связанные с конструированием понятия конечного числа, они должны репрезентировать общее («общезначимость») для всех возможных вещей (созерцаний), подпадающих под это понятие, – они репрезентируют мысленные объекты и определенные конструирующие операции с ними.

Единичные эмпирические вещи потому могут репрезентировать общее («общезначимое»), что фактически они выполняют роль «кода» и *кодируют общие правила, «действия по конструированию понятия»*. Именно в этом смысле числовые знаки у Гильберта выступают объектами рассмотрения в математике, они лишь способ представления в единичном, конкретном, эмпирическом созерцании процессов, связанных с конструированием понятий (например, процесса последовательного повторения однородного действия во времени).

Согласно Канту, в основе наших *чистых* чувственных понятий рассудка «лежат не образы предметов, а схемы». В том случае, когда мы имеем дело с такими понятиями рассудка, как число вообще или тысяча, например, мы не можем представить в воображении, создать образы объектов, соответствующих этим понятиям, – «мы не можем представить в одном образе множество, например тысячу». В таком случае наше мышление не есть мышление о предметах или образах предметов, оно является представлением о *схеме*, т. е. *правиле, общем методе*, посредством которого конструируется соответствующий понятию объект.

Именно обращение к методу конструирования соответствующих понятиям объектов *меняет по существу саму схему представления познавательной деятельности и обоснования аподиктического знания*. Мы не начинаем с конкретных предметов исследования, обобщая их в понятии, подводя эти предметы под данное понятие на основании присущих им общих признаков, наоборот, мы *априори имеем схему* «механизм», посредством которого конструируем предмет понятия. Тем самым достигается универсальность («общезначимость») получаемых математических истин, с одной стороны, и обеспечивается их аподиктическая достоверность при условии расширения математического знания – с другой. Таким путем удается избежать того нежелательного обращения к эмпирии, к практическому подтверждению при обосновании математических истин, которые Г. Фреге, Ю. Дедекинд, Б. Рассел пытались устранить обращением к логике, определению математических терминов в терминах логики.

Конструируя понятие, например, треугольника, мы, согласно И. Канту, выходим за рамки тех свойств, которые заложены в дефиниции, присоединяя в чистом созерцании — подобно тому, как мы это делаем в эмпирическом созерцании, – только те свойства и соотношения, которые определяются схемой, правилами конструирования соответствующего созерцания. Этим обеспечивается *аподиктический характер* получаемых истин. Таким образом, в основе объяснения аподиктического и в то же время конструктивного характера действительного математического знания – и здесь одно как раз связано с другим – лежит именно идея схематизма нашего рассудка в отношении явлений. Следует подчеркнуть, что априорность здесь понимается в особом смысле – как общие условия, алгоритм конструирования объектов в соответствии с правилами и сообразно понятию. Мы еще коснемся этого вопроса ниже.

Отметим здесь два момента: гильбертовские действительные объекты теории чисел, во-первых, конструктивные объекты, во-вторых, представлены как объекты наглядного созерцания [7].

Не из анализа понятия (треугольника, например) извлекаем мы соответствующие объекты математики, а из схемы, правил конструирования соответствующего образа (даже если бы в мире не существовало ни одного конкретного треугольника). Математическое знание не есть тем самым область эмпирически данного. Это, скорее всего, знание не о том, что дано, а о возможном, конструируемом согласно определенным «схемам». Другое дело – вопрос о рамках такого конструирования.

Но если мы не можем создать образы предметов, соответствующих понятиям рассудка (величина, тысяча и т.д.), а схему ни в коем случае нельзя трактовать как образ, отображение (пусть в общих чертах) предмета исследования, как же тогда понимается конструирование соответствующего понятию созерцания? Как представить общее (в упомянутом выше смысле) *in concreto*?

Интересно, что обычно, рассматривая идеи И. Канта, его трактовку математического знания в частности, не учитывают ту совершенно особую роль, которую Кант отводит использованию символизма в познании посредством конструирования понятий. (Может быть, именно здесь надо искать истоки формализма, идей формализации, в современной логике и математике?)

Согласно Канту, математика конструирует величины не только «как это делается в геометрии, но и величину как таковую (quantitas), как это делается в алгебре», но при таком конструировании мы совершенно отвлекаемся от свойств предмета, который должно мыслить согласно такому понятию величины». И здесь, чтобы представить в созерцании «все операции, производящие и изменяющие величину», необходим специальный символизм. Надо выбрать определенные обозначения «для всех конструирований величин вообще (чисел)» − таковыми выступают операции сложения, вычитания, извлечения корня и т.д. − и все эти операции с величинами изобразить в созерцании, соответственно определенным общим правилам, действиями с соответствующими им знаками. «Таким образом, с помощью символической конструкции, так же, как геометрия с помощью остенсивной, или геометрической, конструкции (самих предметов)», алгебра достигает того, чего «дискурсивное познание посредством одних понятий никогда достигнуть не может» [4. С. 603]. Именно эта идея И. Канта – идея использования знаков и знаковых конструкций для изображения в созерцании содержательных, мысленных конструирований – получила свое развитие в формализме Д. Гильберта. В трактовке *действительных предложений математики* существенную роль играет использование символических конструкций, чтобы наглядно, in concreto, в единичном созерцании представить общее. Фактически именно обращение к идее схематизма чистого созерцания позволяет Гильберту по-новому, в отличие от традиционной дилеммы эмпиризма и рационализма, обосновать аподиктический характер математического знания.

Однако даже элементарная математика, как отмечал Гильберт, «уже не остается на точке зрения наглядной теории чисел» и наряду с действительными включает *идеальные высказывания*, предполагающие введение объектов, которые в принципе не могут быть даны ни в эмпирическом, ни в чистом созерцании. В этом плане метод идеальных элементов как бы предполагает *выход математики за рамки познания посредством конструирования понятий.*

Это было бы так, однако, как нам представляется, все дело в статусе и условиях введения этих идеальных образов. С философской точки зрения «идеальным образам» (идеальным элементам – в терминологии Гильберта) отводится роль кантовских трансцендентальных идей, если под идеей «подразумевать понятие, образованное разумом, которое выходит за пределы всякого опыта и посредством которого конкретное дополняется в смысле целостности» [3. С. 364]. Именно этим определяется, на наш взгляд, *обязательное условие*, ограничение, с которым связывается введение идеальных элементов, – *доказательство их устранимости из контекста всей теории. Доказательство формальной непротиворечивости* связано у Д. Гильберта именно с элиминируемостью идеальных элементов (см. [5, 6]).

Суть дела не в том, что разум, расширяясь за границы возможного опыта, порождает идеализированные объекты, а в том, что трансцендентальные понятия разума (такие как «мир в целом», «бесконечное», «бесконечно удаленная точка» и т.д.) не определяют объекты, за ними вообще не стоят объекты, – они являются «пустыми» в этом смысле. Именно этим обусловлена, на наш взгляд, установка на их элиминируемость. Придание этой «системе иллюзий и фикций» статуса подлинных объектов теории ведет к парадоксам.

В то же время такого рода понятия порождаются разумом в его стремлении достигнуть целостности и системности познания, они определяются этой целью. Именно такую роль в теории выполняют идеальные элементы Гильберта. Метод идеальных элементов позволяет сохранить всю систему классической математики и логику в полном объеме, однако статус идеальных и действительных предложений – разные.

Именно идеальные высказывания, а не действительные играют определяющую роль в теоретическом конструировании моделей мира. Идеальные объекты выполняют функцию «строительных лесов» в таком конструировании. Чистые понятия разума (идеальные элементы, в терминологии Гильберта), определяемые принципами систематизации знания, не извлекаются из опыта и не направлены на объекты. Этот важнейший аспект использования идеальных элементов определяет возможность конструирования теоретических картин мира, определяет *принципиально иной подход к трактовке теоретического знания*. Теоретическое познание не сводится к обработке, суммированию данных опыта. Это создает относительную независимость теоретических конструктов, возможность их «отрыва» от эмпирии. Речь идет не просто об «отображении» того, что имеет место, а о возможности построения теоретических картин мира. Таким образом, важнейший момент теоретической познавательной деятельности связан с активностью мышления, активностью мыслящего субъекта. Однако вопросы активности мышления получают совершенно иное, особое освещение. Во-первых, конструирование согласно «схеме» (познание посредством конструирования понятий) позволяет порождать объекты (созерцания), соответствующие понятиям. И тем самым обосновывать аподиктическую достоверность получаемого знания. С другой стороны, конструирование картины мира с помощью идеальных образов (идеальных элементов) выводит за рамки данного в опыте, позволяет существенно шире трактовать теоретическое знание.

Литература

1. *Гёдель К.* Об одном ещё не использованном расширении финитной точки зрения // Математическая теория логического вывода. М., 1967.

2. *Гильберт Д.* Естествознание и логика // Кантовский сборник. Вып. 15. Калининград.

3. *Гильберт Д.* О бесконечном // Основания геометрии. М.; Л., 1948.

4. *Кант И.* Сочинения: В 6 т. М., 1964. Т. 3.

5. *Смирнова Е.Д.* Непротиворечивость и элиминируемость в теории доказательств // Философия в современном мире. Философия и логика. М., 1974.

6. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия. М.: Роспэн, 1996.

7. *Смирнова Е.Д.* Кант и финитная установка Д. Гильберта // Логические исследования. М., 2003. Вып. 4.

8. *Сухотин А.К.* Философия математики. Томск, 2004.