На правах рукописи

Лячин Александр Владимирович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ В НЕЛИНЕЙНОМ КОЛЬЦЕВОМ ИНТЕРФЕРОМЕТРЕ: ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ И ВРЕМЕННЫЕ ХАОТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

01.04.05 – Оптика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2005

Работа выполнена на кафедре квантовой электроники и фотоники Томского государственного университета (ТГУ)

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
доцент Пойзнер Борис Николаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Шандаров Станислав Михайлович.

кандидат физико-математических наук,
доцент Владимиров Сергей Николаевич

Ведущая организация: Институт оптики атмосферы СО РАН

Защита состоится “ 22 ” декабря 2005 г. в 14 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д. 212.267.04 при Томском государственном университете по адресу:
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, ауд. 119.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан “ **21** ” **ноября** **2005** г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, Пойзнер Б.Н.

1. Общая характеристика работы

1.1. Состояние вопроса и актуальность темы диссертации.

Развитие современной нелинейной оптики происходит под воздействием нескольких тенденций. Сказывается влияние синергетической парадигмы с её вниманием к проблеме сложного, в том числе – сложного поведения в нелинейных системах[1]. Расширяется выбор подходов к решению проблем обработки информации. В частности, это касается задач адаптивной оптики (включая атмосферную[2]), задач управления параметрами оптических полей[3,4], разработки принципов и оптических устройств обработки информации[5].

Самостоятельным научно-техническим направлением становится создание методов и систем конфиденциальной связи, использующих явление детерминированного хаоса[6]. В оптических системах этот феномен исследован недостаточно как в теоретическом, так и экспериментальном плане, хотя изучение его ведётся регулярно[7-11]. Детерминированный хаос обнаружен в системах различной природы[12-18]. Фундаментальное значение исследований хаоса подчёркивает лауреат Нобелевской премии академик В.Л. Гинзбург. В его списке «проблем, представляющихся особенно важными и интересными с учётом ситуации на конец XX века» 11-е по важности место (из 30-ти) занимают: «Нелинейная физика. Турбулентность. Солитоны. Хаос. Странные аттракторы»[19].

Среди оптических систем, представляющих интерес в указанных ранее аспектах, выделяется нелинейный кольцевой интерферометр (НКИ) – рис. 1. Начиная с работ К. Икеды и его соавторов (1979-1986), проводятся теоретические и экспериментальные исследования поведения кольцевого интерферометра с керровской нелинейностью и запаздыванием. Этой теме посвятили работы многие авторы, например С.А. Ахманов и М.А. Воронцов с коллегами; П.С. Ланда; *H. Adachihara*, *H. Faid*; *V.J. Firth*; Н.Н. Розанов; *J. Garcia-Ojalvo*, *R. Roy*; С.С. Чесноков, А.А. Рыбак, В.И. Станичук; Н.М. Рыскин, А.А. Балякин. Их работы различаются по содержанию, что связано с выбором физических приближений и математического аппарата, а также по методам получения результатов.

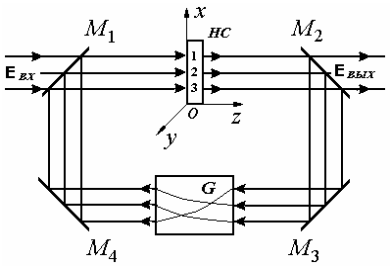


Рис. 1. Схема нелинейного кольцевого интерферометра и ход лучей в НКИ при повороте светового поля на $\Delta=120^{o}$ в плоскости *x0y*. Траектории лучей 1, 2, 3, замыкающиеся после трех обходов. M_1, M_2 – светоделители, M_3, M_4 – зеркала, *НС* – нелинейная среда., *G* – линейный оптический элемент

До сих пор в текущей литературе незаметна тенденция сравнительного анализа результатов, полученных в рамках различных подходов и моделей, в контексте систематизации закономерностей, выявляемых на их основе. Показательно также, что количество работ, в которых обсуждаются возможности применения полученных результатов, весьма мало.

Насколько можно судить по литературе, внимание специалистов по вопросам распространения лазерного излучения в нелинейных средах постепенно начинает переключаться на изучение факторов и механизмов, ограничивающих рост процессов, лежащих в основе нелинейных явлений. В работах (В.Е. Семенов и др., 2000; А.П. Сухоруков с коллегами, 2000; *N.N Rosanov et al.*, 2001) подчёркивается необходимость учёта подобных механизмов при теоретических исследованиях и моделировании процессов распространения лазерного излучения в нелинейных средах. Однако в литературе неизвестны работы, в которых учтено влияние ограничения нелинейности применительно к каким-либо кольцевым системам.

---

[1] Малинецкий Г.Г. Синергетика, нелинейность и концепция Роджера Пенроуза // Пенроуз Р. Новый ум короля. – М.: Едиториал УРСС, 2005. С. 4-25.

[2] Лукин В.П., Фортес Б.В. Адаптивное формирование пучков и изображений в атмосфере. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. – 214 с.

[3] *Carmon T., Buljan H., Segev M. // Optics Express*, 2004. *V.* 12. № 15. *P.* 3481-3487.

[4] *Schwartz T., Fleischer J.W., Cohen O., et al. // J. Opt. Soc. Am. B*, 2004. *V.* 21. № 12. *P.* 2197-2205.

[5] Закиров Р.З., Павлов А.В. Оптические и лазерные технологии: Сб. статей / Под ред. В.Н. Васильева. – СПб: СПбГИТМО (ТУ), 2001. С. 33-50.

[6] *Garcia-Ojalvo J., Roy R. // Proc. SPIE*, 2002. *P.* 1-8.

[7] *Ikeda K. // Opt. Comm*, 1979. *V.* 30. № 2. *P.* 257-260.

[8] Новые физические принципы оптической обработки информации: Сб.ст. / Под ред. С.А. Ахманова, М.А. Воронцова. – М.: Наука, 1990. С. 13-33; 263-326.

[9] Розанов Н.Н. Оптическая бистатбильность и гистерезис в распределённых нелинейных системах. – М.: Наука, 1997. – 336 с.

[10] *Chesnokov S.S., Rybak A.A. // Laser Physics*, 2000. *V.* 10. № 5. *P.* 1-8.

[11] Балякин А.А., Рыскин Н.М. // Изв. РАН Сер. физ., 2001. Т. 65. № 12. С. 1741-1744.

[12] Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

[13] Ермолаев Ю.Л., Санин А.Л. Электронная синергетика. – Л.: Изд-во Ленигр. ун-та, 1989. – 248 с.

[14] Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику. – М.: Наука, 1997. – 255 с.

[15] Трубецков Д.И. Введение в синергетику: Хаос и структуры / Предисл. Г.Г. Малинецкого. М.: Едиториал УРСС, 2004. – 240 с.

[16] Владимиров С.Н. // Изв. вузов. Физика, 1998. № 4. С. 91-97.

[17] Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. – 368 с.

[18] Кузнецов С.П. Динамический хаос. Курс лекций. Учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по физическим специальностям. – М.: Физматлит, 2001. – 296 с.

[19] Гинзбург В.Л. Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными (тридцать лет спустя, причем уже на пороге XXI века)? // Успехи физических наук, 1999. Т. 169. № 4. С. 419-442.

Возможность использования нелинейного кольцевого интерферометра для управления лазерным излучением изучается с начала 1990-х гг. (*S.A. Akhmanov et al.*, 1992; *T. Carmon et al.*; *T. Schwartz et al.*). В статье *R. Martin et al.*, 1997 рассматривается вариант НКИ с дополнительным контуром обратной связи (КОС), содержащим фурье-фильтр для управления формообразованием структур и подавления турбулентного режима.

Однако не приводится каких-либо результатов по изучению сложной динамики в подобной оптической системе, в частности, режима детерминированного хаоса. Так, не изучен вопрос о том, как влияют на бифуркационное поведение параметры НКИ с дополнительным контуром обратной связи. Это ограничивает дальнейшее рассмотрение подобного устройства в плане применения его для обработки оптической информации (в том числе – её скрытой передачи), управления параметрами лазерного излучения.

Кроме того, в литературе не был проявлен интерес к изучению особенностей пространственных распределений величин каких-либо значимых характеристик (например, показателя преломления среды, амплитуды, фазы волны) оптической системы, функционирующей в статическом режиме.

Следовательно, представляется актуальным дополнить изучение – в указанных выше аспектах – закономерностей нелинейной динамики и бифуркационного поведения в моделях НКИ.

Актуальность избранной темы диссертации подтверждается и поддержкой исследований автора Федеральным агентством по образованию Минобрнауки РФ (Программа: «Развитие научного потенциала высшей школы»), проект № 60321.

1.2. Цели и задачи диссертационной работы

1) Построение моделей процессов в интерферометре в виде обыкновенных дифференциальных уравнений и на языке дискретных отображений, а также соответствующих компьютерных программ, учитывающих ряд физических факторов и выяснение их влияния на сложную динамику.

2) Выяснение действия различных групп параметров в моделях интерферометра на сложную динамику процессов в нём.

3) Разработка теории, моделей и изучение особенностей пространственных распределений характеристик оптического поля на выходе НКИ, функционирующего в статическом режиме.

4) Аналитическое и численное исследование устойчивости решений и выяснение условий наступления бифуркаций различных типов в модели процессов в НКИ с дополнительным контуром обратной связи.

5) Изучение возможности использования различных схем интерферометра для целей скрытой передачи информации.

1.3. Методы исследования.

Для решения поставленных задач использованы методы теории устойчивости Ляпунова, теории колебаний и бифуркаций; применялось численное моделирование, основанное на решении систем нелинейных алгебраических уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных; техника вычислительного эксперимента; понятия нелинейной оптики, теории множеств, теории графов и криптологии.

1.4. Научные положения, выносимые на защиту

I. В модели динамики нелинейного фазового набега в нелинейном кольцевом интерферометре (с поворотом оптического поля в поперечной плоскости лазерного пучка на угол $\Delta = 120^{\circ}$) в приближении отсутствия диффузии имеют место − в зависимости от параметров нелинейности K и видности γ – мягкая бифуркация Андронова–Хопфа (бифуркация рождения предельного цикла) либо жёсткое разрушение предельного цикла.

II. Пространственный детерминированный хаос – это статическое состояние нелинейной динамической системы с распределенными параметрами такое, что последовательность подмножеств P_i множества скалярных динамических переменных P, выделяемая «наблюдателем» по некоторому (обусловленному особенностями динамической системы) регулярному алгоритму, является нерегулярной, апериодической, обладающей основными свойствами случайного процесса. Причём подмножества P_i равномощны, не совпадают ($\mathrm{P}_i \neq \mathrm{P}_j$ при $i \neq j$), покрывают множество динамических переменных P ($\mathrm{P} = \cup_i \mathrm{P}_i$), и пересечения $\mathrm{P}_i \cap \mathrm{P}_{i+1}$ равномощны.

III. Для m-мерной динамической системы, описываемой совокупностью m ($m >> 1$) эволюционных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектора динамических переменных $\mathbf{q}(t) \equiv \{q_1(t), q_2(t), ..., q_m(t)\}$, в случае статического режима ($\mathrm{d}\mathbf{q}/\mathrm{d}t = 0$) возможен переход к j-мерному дискретному отображению с пространственной эволюционной переменной, где $j \leq m$, а количество итераций ограничено и не превышает m–1. При таком переходе в модели нелинейного кольцевого интерферометра для замкнутой цепочки транспозиционных точек имеет место (не)устойчивость в дискретном отображении, если статическое состояние системы (не)устойчиво.

IV. Для модели изменения нелинейного фазового набега в кольцевом интерферометре проявляется чувствительность сложной динамики к трёхфотонному процессу, когда интенсивность низкочастотного компонента b^2 в спектре велика настолько, что верно условие $2\, b^2 (l\beta_{\mathrm{b}})^{1/2} \geq 1$, где β_{b} – размерный параметр, характеризующий долю потерь энергии на единицу длины нелинейной среды протяжённостью l. При $2\, b^2 (l\beta_{\mathrm{b}})^{1/2} << 1$ влиянием трёхфотонного процесса можно пренебречь.

V. Для «точечной» модели двухконтурного нелинейного кольцевого интерферометра (ДНКИ) в приближении больших потерь и пренебрежении временами $t_{\mathrm{e}\,i}$ запаздывания поля в контурах обратной связи, в которых потери равны, когда оптическое поле в поперечной плоскости лазерного пучка поворачивается на угол $\Delta_i = 2\pi M_i/m$ (где i=1, 2; m и M_i – целые числа, определяющие количество транспозиционных точек и шаг перемещения по ним), причем $\Delta_i = 0$, $\Delta_j \neq 0$:

– если m – *чётное*, то строение бифуркационных диаграмм (БД) такое же, что и для модели одноконтурного НКИ с $\Delta=0$;

– если m – *нечётное*, то структуры БД для модели ДНКИ существенно отличаются от аналогичных для моделей НКИ как с $\Delta=\Delta_i$, так и с $\Delta=\Delta_j$.

VI. В качестве основы устройства конфиденциальной связи двухконтурный нелинейный кольцевой интерферометр с различными временами запаздывания t_{ei}, произвольной комбинацией углов Δ_1, Δ_2 поворота оптического поля в поперечной плоскости лазерного пучка и удвоенных коэффициентов потерь/передачи γ_1, γ_2 в контурах обратной связи более устойчив к «взлому» (методами корреляционного анализа) значений t_{ei}, Δ_i, γ_i, чем одноконтурный НКИ, где i=1, 2.

1.5. Достоверность защищаемых положений

Достоверность **I** положения обеспечивается, во-первых, результатами моделирования процессов в нелинейном кольцевом интерферометре на основе программ, испытанных на тестовых задачах, а также подвергнутых проверке с помощью независимо созданных программ; во-вторых, согласием с известными представлениями о причинах сложной динамики; в-третьих, согласием со структурой бифуркационных диаграмм, построенных С.А. Ахмановым, М.А. Воронцовым (1990) для случая $\Delta=180^o$ и А.Л. Магазинниковым (1998) для случая $\Delta=120^o$ в НКИ.

Достоверность **II** и **III** положений основывается, во-первых, на строгом математическом выводе дискретного отображения с пространственной эволюционной переменной; во-вторых, в пользу корректности этих положений говорит следующий факт. Детерминированное, но нерегулярное распределение нелинейного фазового набега U, (т.е. пространственный детерминированный хаос) в поперечной плоскости выходного лазерного пучка в НКИ формируется тогда и только тогда, когда множество P разбивается на подмножества P_i, которые удовлетворяют условиям, указанным в выдвинутом теоретико-множественном определении пространственного детерминированного хаоса (ПДХ). Данное утверждение базируется на комплексе расчётов и построений: с одной стороны структур $U(\mathbf{r})$, генерируемых в НКИ, а с другой – дискретного пространственного распределения U_i (эквивалент временной реализации), фазового портрета, спектра Фурье, ляпуновских характеристических показателей Λ (ЛХП), фрактальной размерности D_0.

Корректность модели, методики и данных вычислительных экспериментов доказывает сходство карт $D_0(K, \gamma)$, $\Lambda(K, \gamma)$ с картой динамических режимов (С.П. Кузнецов, 2001) и с картой распределения старшего ляпуновского показателя Λ на плоскости параметров отображения Икеды.

Достоверность **IV** положения подтверждается данными моделирования, послужившими основой для построения комплекса карт ЛХП, а его содержание согласуется с классическими представлениями нелинейной оптики о трёхфотонных процессах в керровских средах (С.А. Ахманов, Р.В. Хохлов, 1964).

Достоверность **V** положения доказывается анализом комплекса построенных бифуркационных диаграмм. Модели, алгоритмы и компьютерные программы, использовавшиеся, для построения БД, протестированы путём сведения к случаю одноконтурного НКИ.

Достоверность **VI** положения подтверждается серией вычислительных экспериментов. Построение авто- и кросскорреляционных функций для временных реализаций амплитуд в точках поперечного сечения лазерного пучка на выходе ДНКИ демонстрирует невозможность восстановления значений параметров модели. Кроме того, содержание шестого положения согласуется с результатами компьютерной имитации процесса шифрации и дешифрации информационного сигнала с помощью ДНКИ и НКИ.

1.6. Научная новизна

Содержание **I** положения есть результат исследования характера переходов между динамическими режимами в точечной модели процессов в НКИ для широкого интервала значений параметров нелинейности и потерь.

II и **III** положения отражают содержание понятия пространственного детерминированного хаоса и идеи рассматривать дискретное отображение с *пространственной* эволюционной переменной – в противоположность традиционному подходу (например, К. Икеды), оперирующему временн**о**й переменной. Новизну положению **III** придаёт ещё и демонстрация (на конкретном примере) того свойства, что устойчивость статического состояния НКИ обусловливает устойчивый режим в дискретном отображении и наоборот. В литературе подобные выводы не обнаружены.

Оригинальность **IV** положения связана с предложением учёта влияния трёхфотонного процесса; с построением соответствующей математической модели; с выдвижением адекватных приёмов изучения влияния физических факторов и представления результатов моделирования.

Новизна **V** и **VI** положений обусловлена тем, что до сих пор никем не строились бифуркационные диаграммы, а также не исследовалась устойчивость ДНКИ как шифратора к «взлому» значений его параметров.

1.7. Научная ценность работы

Ценность **II** положению придаёт математическая строгость определения пространственного детерминированного хаоса, которое необходимо для идентификации ПДХ в контексте анализа пространственных распределений параметров оптического излучения, НКИ и других нелинейных систем.

III положение ценно тем, что, во-первых, в общем случае для многомерной динамической системы в статическом режиме обоснован переход от её модели в виде обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) к многомерному дискретному отображению. Во-вторых, анализ устойчивости системы (на примере НКИ) в статическом состоянии сводится к анализу дискретных отображений (ДО). Поэтому он не требует обращения к

модели в форме ОДУ, и отпадает необходимость в привлечении методов вычислительной математики для решения ОДУ.

IV положение указывает условия, при которых начинается влияние генерации третьей гармоники на сложную динамику в модели НКИ, когда на его вход поступает лазерное излучение высокой интенсивности.

V положение позволяет для «точечной» модели двухконтурного НКИ раскрыть зависимость расположения стационарных решений с учётом их устойчивости от управляющего параметра, а также предсказать влияние параметров модели на структуру бифуркационных диаграмм для ДНКИ.

1.8. Практическая значимость

Практичность **I** положения способна проявиться при создании оптической системы обработки информации.

V положение указывает условия, при которых модели двух- и одноконтурного НКИ равносильны с точки зрения бифуркационного поведения.

VI положение раскрывает преимущество двухконтурного НКИ как основы криптосистемы оптического диапазона. Например, результат дешифрации чувствителен к несовпадению углов поворота поля в контурах обратной связи интерферометра-шифратора и в дешифраторе, причём значения этих углов не вскрываются средствами корреляционного анализа.

1.9. Внедрение результатов диссертации и рекомендации по их дальнейшему использованию.

Большинство результатов получены автором в период 1998–2005 гг. Ряд результатов внедрён в учебный процесс (на кафедре квантовой электроники и фотоники ТГУ): в курсы «Основы синергетики», «Функциональная электроника» и «Нелинейная оптика», в содержание научно-исследовательской подготовки студентов 3–6-го курсов. Результаты, касающиеся содержания модели процессов в нелинейном кольцевом интерферометре с учётом трёхфотонных явлений, а также методики построения и интерпретации карт дробной размерности аттракторов, использованы на кафедре общей физики Российского государственного профессионально-педагогического университета (г. Екатеринбург).

1.10. Апробация работы.

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на:

– научных семинарах кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ;

– научных семинарах кафедры электронных приборов Томского университета систем управления и радиоэлектроники;

– международных и всероссийских конференциях: «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 1999-2004), «Циклы. Cycles» (Ставрополь, 1999, 2002, 2005), «Современные проблемы физики и технологии» (Томск, 2001-2004), «Моделирование неравновесных систем» (Красноярск, 2001-2002), «Восьмая всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых ученых» (Екатеринбург, 2002), «Математика. Компьютер. Образование.» (Дубна, 2002), «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика» (Москва, 2002), «Организация структур в открытых системах» (Алматы, 2002), «Оптика и образование» и «Фундаментальные проблемы оптики» (Санкт-Петербург, 2002, 2004), «Оптика-2003» и «Оптика-2005» (Санкт-Петербург), «Кристаллофизика 21-го века» (Москва, 2003), «*Atomic and Molecular Pulsed Lasers*» (Томск, 2003, 2005), «Современные проблемы физики и высокие технологии» (Томск, 2003–2005), «58-я Республиканская научная конференция молодых ученых, магистрантов и студентов» (Алматы, 2004), «Анализ и синтез как методы научного познания» (Таганрог, 2004), «*IV International young scientists' conference on applied physics*» (Киев, 2004, 2005), «*Frontiers of nonlinear physics*» (Нижний Новгород, 2004), «*Fundamental Problems of Opto- and Microelectronics*» APCOM'2004 (Хабаровск, 2004), «Хаотические автоколебания и образование структур» (Саратов, 2004), «*Physics and Control*» (Санкт-Петербург, 2005), «*Systems of Optical Security*» (Варшава, 2005).

Ряд результатов диссертации вошел в работы за которые автор был награждён дипломом Минобразования РФ по итогам Всероссийского открытого конкурса 2002 г. на лучшую научную студенческую работу по естественным, техническим и гуманитарным наукам в ВУЗах РФ; дипломом стипендиата 2004 года (стипендия им. Д.И. Менделеева для аспирантов естественных факультетов ТГУ. Стипендия учреждена в 2004 году); дипломом лауреата конкурса Томской области в сфере образования и науки.

1.11. Публикации

По теме диссертации опубликовано 50 печатных работ: 12 статей (из них 5 – в журналах РАН и журналах серии «Известия вузов», 1 – в российском научно-методическом журнале, 3 – депонировано в ВИНИТИ, 2 – в трудах SPIE, 1 – в трудах IEEE), материалы 38-ми докладов на конференциях (в том числе – 29-ти – на международных).

1.12. Личный вклад диссертанта.

В диссертации использованы только те результаты, в получении которых автору принадлежит определяющая роль. Опубликованные работы написаны либо без соавторов, либо в соавторстве с членами научной группы, а также со студентами: С.М. Авдеевым, П.Е. Денисовым, С.В. Лесиной, М.Е. Назаровым, И.В. Романовым, Д.А. Шергиным. В совместных работах диссертант принимал участие в расчётах, объяснении и интерпретации результатов моделирования. Постановка задач исследований осуществлялась научным руководителем, в ряде случаев – к.ф.-м.н. И.В. Измайловым или к.ф.-м.н. А.Л. Магазинниковым.

1.13. Структура и объем диссертации.

Приведённые цели и задачи определили структуру и содержание исследования. Диссертация состоит из Введения, четырёх глав, Заключения, списка литературы и Приложений. Общий объём диссертации 217 страниц

текста, в том числе 86 рисунков и 4 таблицы, 5 Приложений. Библиографический список включает 262 наименования.

2. Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследования явлений и процессов в нелинейном кольцевом интерферометре. Формулируется цель и задачи работы, методы исследований, положения, выносимые на защиту.

2.1. В **I главе «Применение представлений нелинейной динамики для разработки принципов и устройств информационной оптики»** систематизирована литература, позволяющая оценить современное состояние исследований, которым посвящена диссертация. Литературный обзор свидетельствует, в частности, об отсутствии результатов, касающихся важных аспектов нелинейной динамики в НКИ. Он позволил уточнить задачи исследования. Часть материалов обзора использована при составлении методических указаний для студентов РФФ ТГУ, использующихся в учебном процессе в курсе «Функциональная электроника».

2.2. II глава «Методы исследований процессов в нелинейной динамике (на примере изучения модели нелинейного кольцевого интерферометра)» содержит инструментальную часть, излагающую основные математические методы исследования сложной динамики в моделях нелинейных систем. Рассмотрены принципы анализа устойчивости по Ляпунову, корреляционного анализа и гипотеза Каплана–Йорке. Построена классификация дробных размерностей аттракторов.

Изложен вывод базовой математической модели, описывающей динамику двухчастотного оптического поля ($a_{нс}$, $b_{нс}$, $\varphi_{нс}$, $\psi_{нс}$) и нелинейного фазового набега $U(\mathbf{r}, t)$ в НКИ (предложенной И.В. Измайловым с соавторами в 2002 г.):

$$\tau_n(\mathbf{r})\,\partial U(\mathbf{r},t)/\partial t = D_e(\mathbf{r})\,\Delta U(\mathbf{r},t) - U(\mathbf{r},t) + f(\mathbf{r},t),$$
$$f(\mathbf{r},t) = n_2(\mathbf{r})\,lk\,an\,\langle \mathbf{E}^2{}_{нс}(\mathbf{r},t)\rangle_T = an\;n_2(\mathbf{r})\,lk\,[a^2{}_{нс}(\mathbf{r},t) + b^2{}_{нс}(\mathbf{r},t)] =$$
$$= Kab(\mathbf{r},t,\mathbf{r}) + p\,Kab(\mathbf{r}',t-\tau,\mathbf{r}) + [\gamma(\mathbf{r}',t)/\sigma]\times$$
$$\times\{\,Ka(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t-\tau)\cos[(1+q)\,\omega\tau + \varphi(\mathbf{r},t) - \varphi(\mathbf{r}',t-\tau) + \psi(\mathbf{r},t) - \psi(\mathbf{r}',t-\tau)] +$$
$$+Kb(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t-\tau)\cos[(1-q)\,\omega\tau + \varphi(\mathbf{r},t) - \varphi(\mathbf{r}',t-\tau) - \psi(\mathbf{r},t) + \psi(\mathbf{r}',t-\tau)]\,\}. \quad (1)$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; $\tau \equiv \tau(\mathbf{r}',t) = t_e(\mathbf{r}',t) + U(\mathbf{r}',t-t_e(\mathbf{r}',t))/\omega$; $t_e(\mathbf{r},t) \equiv n_0(\mathbf{r})\,l/c + t_0(\mathbf{r},t)$ – эквивалентное время запаздывания или время распространения светового поля в НКИ, обусловленное значением линейной части $n_0(\mathbf{r})$ показателя преломления нелинейной среды (НС) и временем запаздывания $t_0(\mathbf{r}, t)$ в контуре обратной связи (КОС) НКИ; l – длина НС, c – скорость света; $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ – координаты точек в поперечном сечении светового пучка откуда начинается луч и куда он попадает после обхода КОС; $\gamma(\mathbf{r}',t)$ – удвоенный амплитудный коэффициент потерь излучения за проход через НКИ; σ – коэффициент растяжения пучка в элементе G; $D_e(\mathbf{r})$ – коэффициент диффузии молекул НС, нормированный ко времени релаксации $\tau_n(\mathbf{r})$ НС; Kab и Ka, Kb – «смешанный» и «парциальные» параметры нелинейности; q – параметр бихроматичности.

«Точечный» аналог модели (1) имеет вид:

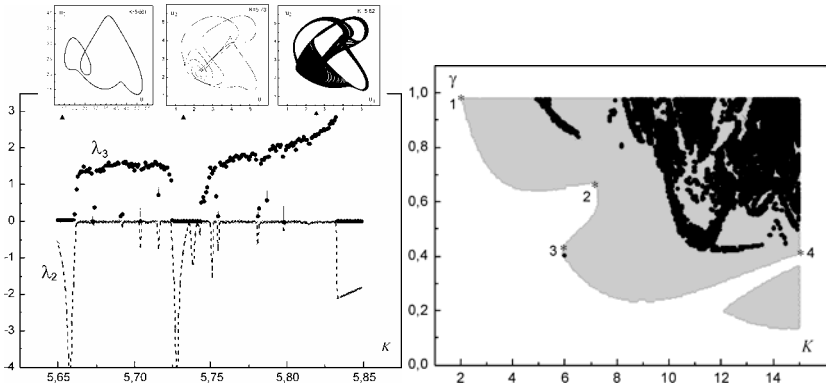
$$\tau_{n\,i}\mathrm{d}U_i(t)/\mathrm{d}t = -\,U_i(t) + f_i,$$
$$f_i \equiv f_i(t) = Kab_{i,i}(t) + p\,Kab_{i-1,i}(t-\tau) + [\gamma_{i-1}(t)/\sigma]\times$$
$$\times\{\,Ka_{i,i-1}(t,t-\tau)\cos[(1+q)\,\omega\tau + \varphi_i(t) - \varphi_{i-1}(t-\tau) + \psi_i(t) - \psi_{i-1}(t-\tau)] +$$
$$+\,Kb_{i,i-1}(t,t-\tau)\cos[(1-q)\,\omega\tau + \varphi_i(t) - \varphi_{i-1}(t-\tau) - \psi_i(t) + \psi_{i-1}(t-\tau)]\,\}, \quad (2)$$

В оригинальной части **II главы** сформулированы соответствующие приближения, описаны частные случаи моделей (2) и (1):

$$\tau_{n\,i}\mathrm{d}U_i(t)/\mathrm{d}t + U_i(t) = K_i\,[1 + \gamma_i\cos(U_j(t) + \varphi_{0\,i})], \quad (3)$$
$$j = 1, 2, \ldots, m;\; i = 2, 3, \ldots, m, 1$$
$$\tau_n\,\partial U(x,y,t)/\partial t + U(x,y,t) = D_e\,\{\partial^2 U/\partial x^2 + \partial^2 U/\partial y^2\} +$$
$$+\,K\,[1 + \gamma\cos(U(x,y,t) + \varphi_0)]. \quad (4)$$

Составлены программы для изучения моделей (3) и (4), произведена их отладка и тестирование. Проведён цикл вычислительных экспериментов. Построены типичные фазовые портреты, зависимости двух старших ЛХП от K (рис. 2, *а*), карта динамических режимов на плоскости параметров модели $K(\gamma)$ (рис. 2, *б*), распределения фазы лазерного пучка в поперечной плоскости (рис. 3), зависимости порогового значения параметра нелинейности (при котором наступает бифуркация удвоения периода) от времени запаздывания в контуре обратной связи НКИ (рис. 4, *б*).

Идентифицированы динамические режимы в модели (3), выяснено влияние на них параметра нелинейности K и видности γ. Построенная карта динамических режимов позволяет установить, в каких областях параметров системы реализуется устойчивая стационарная точка, предельный цикл, странный хаотический аттрактор (рис. 2, *б*), а также характер перехода между ними (защищаемое положение **I**). Зависимость порогового параметра нелинейности $K_п$ от времени запаздывания (рис. 4, *б*) показывает границу устойчивости режима, соответствующего стационарной точке. Построение распределения фазы лазерного пучка в поперечной плоскости (рис. 3) позволило выявить зависимость длительности формирования структур от параметров нелинейности и диффузии.



а *б*

Рис. 2. Зависимость двух старших ЛХП от параметра нелинейности K для γ=0.9 и вид фазовых портретов для трёх типичных режимов (*а*). Карта динамических режимов НКИ с Δ=120° на плоскости: параметр нелинейности K – видность γ (*б*)

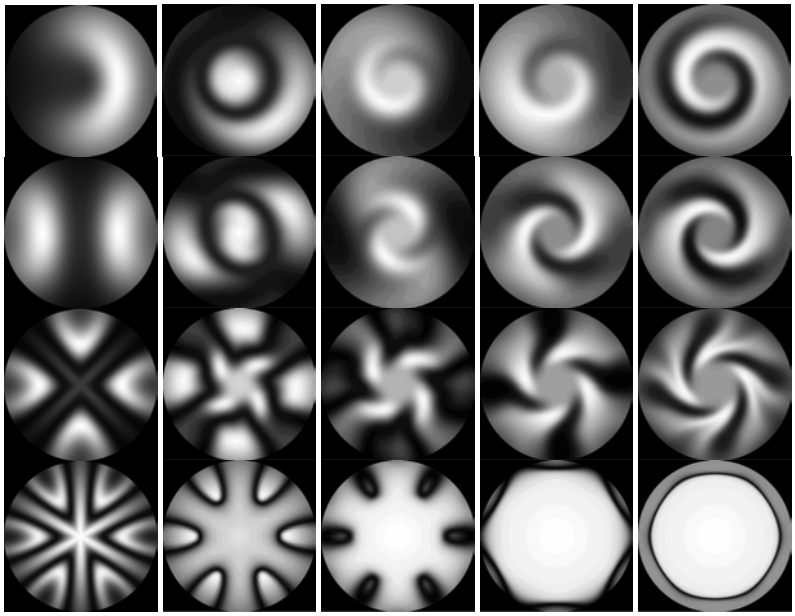
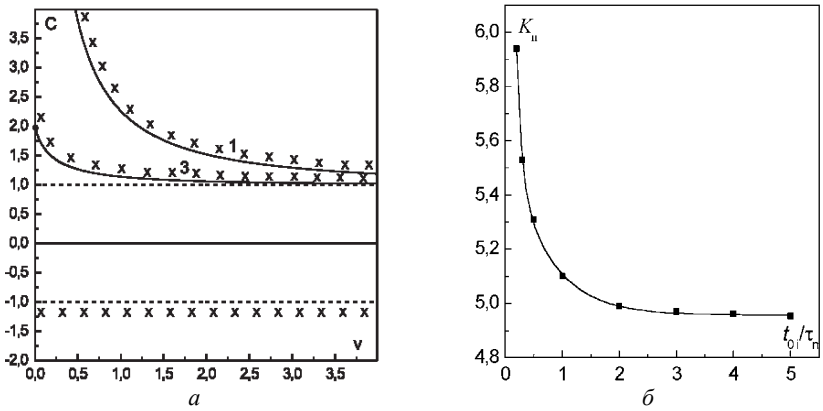


Рис. 3. Структуры в поперечном сечении светового пучка, полученные в вычислительном эксперименте при соответствующем начальном профиле пучка на входе и параметрах системы в моменты времени t. Первый ряд кадров K=10, D_e=0.005 (t=0.0, 0.025, 0.05, 0.075, 0.125 с); второй ряд K=10, D_e=0.001 (t=0.0, 0.025, 0.05, 0.1, 0.125 с); третий ряд K=15, D_e=0.001 (t=0.0, 0.01, 0.02, 0.04, 0.06 с); четвертый ряд K=20, D_e=0.0005 (t=0.0, 0.015, 0.03, 0.075, 0.12 с)



а *б*

Рис. 4. Области и границы устойчивости на плоскости: запаздывание − нелинейность (*а*). Переменная C зависит от параметра нелинейности K: $C_i=K\gamma\sin(u_i^*+\varphi_0)$, υ − время запаздывания, нормированное к времени релаксации нелинейной части показателя преломления: $\upsilon=T/\tau$. «Крестики» обозначают переход в область неустойчивости. Цифры 1 и 3 есть значения N, определяющие угол поворота поля $\Delta=2\pi/N$. Кривая 1 соответствует случаю, рассмотренному К. Икедой, 3 – рассмотренному А.Л. Магазинниковым и др. Зависимость порогового параметра нелинейности $K_п$ от времени запаздывания, нормированного к времени релаксации нелинейной части показателя преломления $t_{0\,i}/\tau_п$ (*б*)

2.3. III глава «Пространственный детерминированный хаос, условия его возникновения в нелинейном кольцевом интерферометре и роль физических факторов» содержит оригинальный материал. Раскрыт физический смысл явления пространственного детерминированного хаоса (ПДХ) и предложено его теоретико-множественное определение. При описании содержания пространственного детерминированного хаоса как физического явления предложено рассматривать пространственные распределения величин значимых

характеристик (например, показателя преломления среды, амплитуды, фазы волны) *аналогично* процессам, протекающим во времени в колебательных системах. Такое рассмотрение возможно, если удаётся ввести понятие *наблюдателя*, который регистрирует эти величины в точках пространства, последовательно «перебирая» точки по некоторому алгоритму, т.е. формирует некую последовательность.

Сложность введения математического определения ПДХ проиллюстрируем примером. На рис. 5 изображено двумерное распределение нелинейного набега фазы, на фоне которого показано два варианта алгоритма перебора точек. В зависимости от алгоритма дискретная реализация u_i имеет регулярный либо хаотический вид.

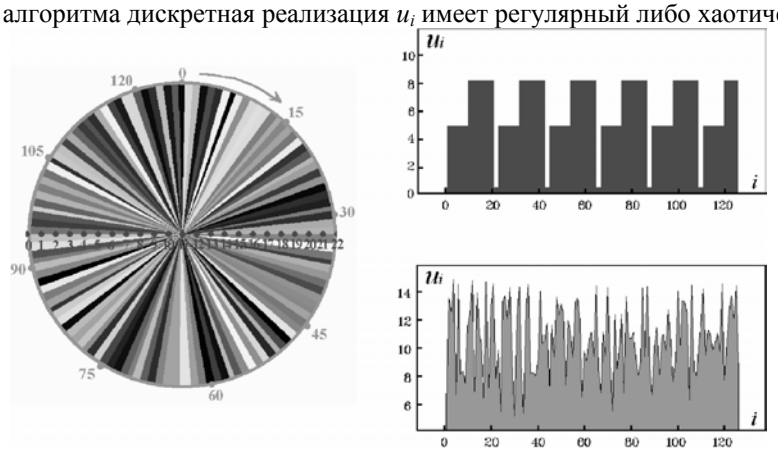
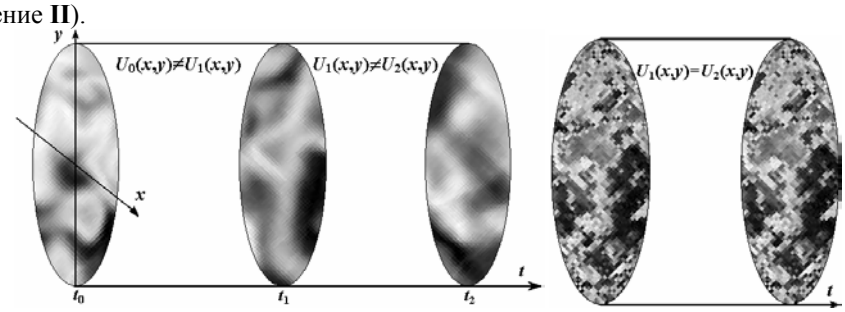


Рис. 5. К понятию пространственной последовательности значений нелинейного фазового набега $u(i)$ в точках i=0...126 поперечной плоскости при двух различных алгоритмах сканирования. Распределение $u(x, y)$ в поперечной плоскости лазерного пучка получено на выходе НКИ в статическом режиме при угле поворота в КОС НКИ Δ=360/126°

Рассмотрим поперечное сечение лазерного пучка на выходе НКИ (рис. 6). В случае *временной* динамики значения нелинейного набега фазы $U(x, y)$ во всех точках поперечного сечения с координатами x, y составляют *континуум* скалярных динамических переменных **P**. В случае статического режима ($d/dt = 0$) значения $U(x, y)$ зависят только от координат (x, y).

В зависимости от пространственного преобразования поля в элементе G всё множество **P** скалярных динамических переменных разбивается на последовательность подмножеств P_i (рис. 7). Выбор «наблюдателем» алгоритма перебора P_i (алгоритма нумерации) также определяется пространственным преобразованием поля (защищаемое положение **II**).



а *б*

Рис. 6. Пояснение к поведению нелинейного фазового набега $U(x, y)$ в поперечной плоскости лазерного пучка на выходе кольцевого интерферометра в случае временной динамики (*а*) и в статическом режиме (*б*)

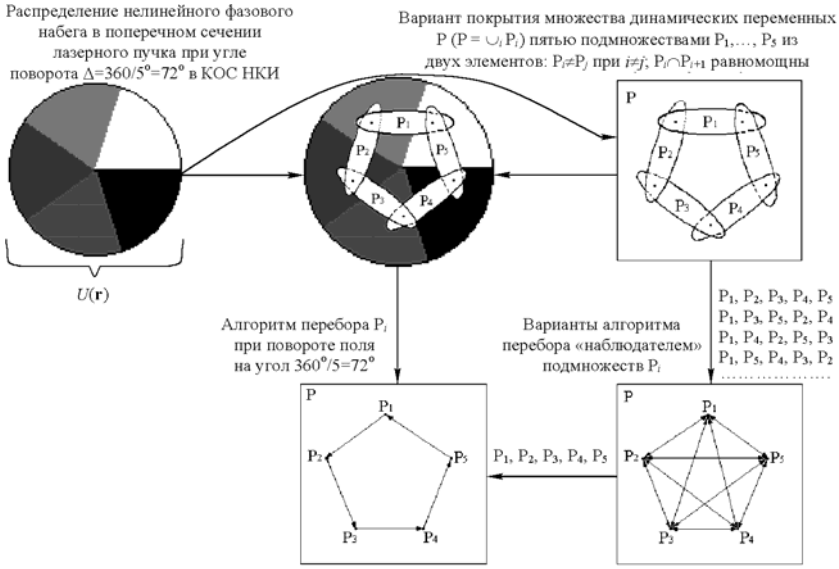


Рис. 7. Пояснение к формулировке второго защищаемого научного положения

В контексте изучения ПДХ обоснован – для статического режима – переход от обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) к дискретным отображениям (ДО). Оценена область допустимых значений начальных условий ДО. Выявлены ограничения на число итераций и размерность системы, вытекающие из алгоритма перебора точек пространства, в которых регистрируются значения характеристик поля либо среды (защищаемое положение **III**). Пространственное изменение характеристик оптического поля и нелинейного фазового набега в поперечном сечении светового пучка на выходе НКИ описано комплексом дискретных отображений, учитывающих влияние ряда физических факторов:

– случай **бихроматического** излучения на входе НКИ

$$U_{i+1} = K\,\{1 + p + \gamma\{Q_a \cos[(1+q)(\Phi+U_i)] + (1-Q_a)\cos[(1-q)(\Phi+U_i)]\}/\sigma\}, \quad (5)$$

– случай **монохроматического** излучения на входе НКИ

$$U_{i+1} = K\,[1+\gamma\cos(U_i + \Phi)], \quad (6)$$

– учёт ***N*-фотонных процессов**

$$U_i/K = 1 + p\{Q_a + (1-Q_a)[\eta(1-F_b)+F_b]\} + \\ + (\gamma/\sigma)\,\{\{Q_a+\eta Q_a(1-Q_a)(1-F_b)\}^{1/2}\cos[(1+q)(\Phi+U_{i-1})] + \\ + (1-Q_a)F_b^{1/2}\cos[(1-q)(\Phi+U_{i-1})]\}, \quad (7)$$

где $F_b=1/[1+(K(1-Q_a)/K_{b0\,s})^{N-1}]^{1/(N-1)}$, $K_{b0\,s} \equiv (1-R)\,n_2 lk\,[2\beta_b l(N-1)]^{-1/(N-1)}$,

– случай **насыщения нелинейности**

$$U_{i+1} = F_i / (1 + F_i/K_s), \quad (8)$$

где $F_i = K\,\{1 + p + \gamma\{Q_a \cos[(1+q)(\Phi+U_i)] + (1-Q_a)\cos[(1-q)(\Phi+U_i)]\}/\sigma\}$,

– учёт **многих проходов поля** через контур обратной связи НКИ

$$a_{нс\,i} = (Ac_{a\,i}^2 + As_{a\,i}^2)^{0,5},\ \varphi_{нс\,i}+\psi_{нс\,i} = \arg(Ac_{a\,i}, As_{a\,i}), \\ b_{нс\,i} = (Ac_{b\,i}^2 + As_{b\,i}^2)^{0,5},\ \varphi_{нс\,i}-\psi_{нс\,i} = \arg(Ac_{b\,i}, As_{b\,i}), \quad (9)$$

где

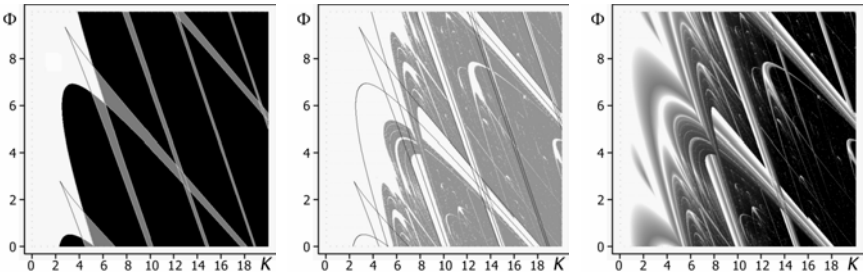
$$Ac_{a\,i}=(1-R)^{0,5}\,a\cos(\varphi+\psi) + [\gamma/(2\sigma)]\,a_{нс\,i-1}\cos[\varphi_{нс\,i-1}+\psi_{нс\,i-1}-(1+q)(\Phi+U_{i-1})], \\ As_{a\,i}=(1-R)^{0,5}\,a\sin(\varphi+\psi) + [\gamma/(2\sigma)]\,a_{нс\,i-1}\sin[\varphi_{нс\,i-1}+\psi_{нс\,i-1}-(1+q)(\Phi+U_{i-1})], \\ Ac_{b\,i}=(1-R)^{0,5}\,b\cos(\varphi-\psi) + [\gamma/(2\sigma)]\,b_{нс\,i-1}\cos[\varphi_{нс\,i-1}-\psi_{нс\,i-1}-(1-q)(\Phi+U_{i-1})], \\ As_{b\,i}=(1-R)^{0,5}\,b\sin(\varphi-\psi) + [\gamma/(2\sigma)]\,b_{нс\,i-1}\sin[\varphi_{нс\,i-1}-\psi_{нс\,i-1}-(1-q)(\Phi+U_{i-1})] \\ U_{i-1} = [K/(1-R)]\,\{Q_a\,[a_{нс\,i-1}/a]^2 + (1-Q_a)\,[b_{нс\,i-1}/b]^2\}.$$

$$\arg(Ac, As) \equiv \begin{cases} \operatorname{arctg}(As/Ac) + \pi, & Ac < 0 \\ \operatorname{arctg}(As/Ac), & Ac > 0 \\ 3\pi/2, & Ac = 0,\ As \le 0 \\ \pi/2, & Ac = 0,\ As > 0 \end{cases} \in(-\pi/2;\ 3\pi/2].$$

Здесь K – коэффициент нелинейности среды; γ – удвоенный коэффициент потерь излучения за один проход КОС НКИ; $q \equiv \Omega/\omega$ – параметр бихроматичности (мера расстройки между частотами); Q_a – интенсивность высокочастотного компонента в спектре; Φ – линейная часть фазового набега в КОС НКИ; K_{b0s} – параметр, характеризующий уровень интенсивности низкочастотного компонента спектра излучения, начиная с которого проявляется влияние N-фотонного поглощения на сложную динамику в модели процессов в НКИ; K_s – коэффициент нелинейности среды, соответствующий интенсивности насыщения; $a_{нс\,r\,i}$, $b_{нс\,r\,i}$, $\varphi_{нс\,i}$, $\psi_{нс\,i}$ – амплитуды и фазы двухчастотного оптического поля.

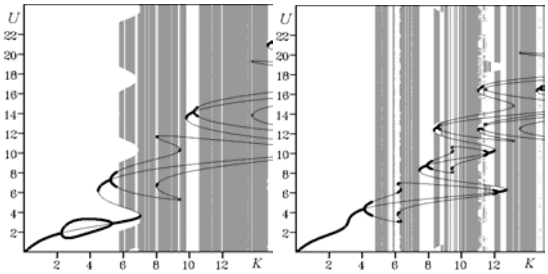
Предпринят численный анализ моделей (5) – (9) с целью изучения влияния этих физических факторов на характеристики ПДХ.

Предложен исследовательский приём: построение линий бифуркаций на основе бифуркационных диаграмм. Выполнено сравнение структуры карт ляпуновских характеристических показателей (ЛХП), соответствующих модели на языке дискретных отображений (5), с линиями бифуркаций для модели (1) в виде обыкновенных дифференциальных уравнений (рис. 8). Продемонстрировано, что объединение карт ЛХП с бифуркационными диаграммами облегчает морфологическую интерпретацию карт и позволяет объяснить наличие регулярной либо хаотической динамики в модели (рис. 9). Показана обусловленность строения карты ЛХП для ДО структурой семейств линий бифуркаций для ОДУ: структура карт повторяет конфигурацию участков между линиями бифуркаций (рис. 8). Этот факт свидетельствует о правомерности описания динамики нелинейного фазового набега U в НКИ на языке дискретных отображений (защищаемое положение **III**).



а *б* *в*

Рис. 8. Линии бифуркаций (*а*), контрастные карты ЛХП (*sgn* Λ) с аппликацией линий бифуркаций (*б*), карты ЛХП (Λ) (*в*) на плоскости *KO*Φ при q=0.1, Q_a=0.1, γ=0.5



б *в*

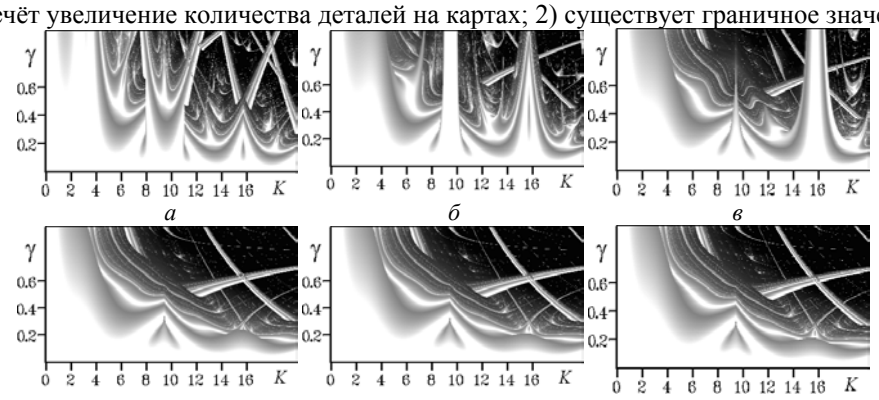
Рис. 9. Совместное построение контрастных карт (*sgn* Λ) и БД в тех же координатах при q=0.1; Q_a=0.1 (*а*), q=0.5; Q_a=0.5 (*б*). Во всех случаях γ=0.5; Φ=0

Сходство карт $D_0(K, \gamma)$, $\Lambda(K, \gamma)$ с картой динамических режимов в книге С.П. Кузнецова и с картой распределения старшего ляпуновского показателя Λ на плоскости параметров отображения Икеды доказывает корректность модели, методики и данных вычислительных экспериментов. Для количественной характеристики карты как некой целостности предложено вычислять долю P площади карты, соответствующей хаотическому режиму. Продемонстрировано, что структура карт, а, следовательно, и тип динамики (для определённого набора параметров модели НКИ) существенно зависит от строения спектра входного излучения.

На основе справочных данных для RbCl: Na-лазера, He-Ne-лазера, широкополосного CO-лазера, AlGaAs/GaAs-лазера оценено значение расстройки спектральных компонентов (q), входящей в ключевые модели.

Выполнен численный анализ модели (7) для случая N=3. Построены карты ляпуновских характеристических показателей и дробной размерности аттракторов (рис. 10). Для выяснения границы влияния трёхфотонного поглощения в нелинейной среде на сложную динамику в НКИ предложено строить карты с координатой $K_{b0\,s} \equiv (1-R)\, n_2 l k\, b_s^2$ (рис. 11). Здесь $b_s = (4\beta_b l)^{-1/4}$ – размерный параметр, характеризующий нелинейную пластинку длиной l: он численно равен амплитуде b_{in} светового поля на входе НС, при которой $b_{out}/b_{in}=0{,}5^{1/4}\approx 0{,}84$). Здесь b_{out} определяется как $b_{out} = b_{in}/\{1+(b_{in}/b_s)^4\}^{1/4}$.

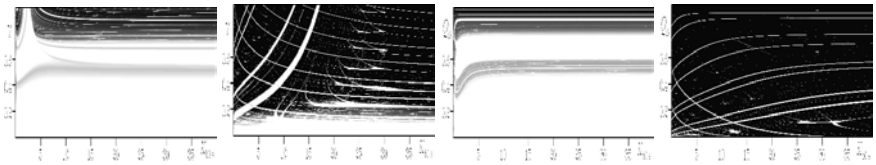
Показано, что появление трёхфотонного процесса обогащает нелинейные эффекты в модели НКИ благодаря генерации третьей световой гармоники (защищаемое положение **IV**). Анализ структуры карт на рис. 10, 11 показал, что: 1) рост $K_{b0\,s}$ влечёт увеличение количества деталей на картах; 2) существует граничное значение параметра $K_{b0\,s}$.



а *б* *в*

г *д* *е*

Рис. 10. Распределение ляпуновских характеристических показателей Λ(K, γ). Чёрные области соответствуют положительным значениям Λ, при которых имеет место ПДХ. Параметр $K_{b0\,s}$ принимает значения: 1 (*а*), 5 (*б*), 10 (*в*), 50 (*г*), 500 (*д*), ∞ (*е*)



а *б* *в* *г*

Рис. 11. Распределение ляпуновских характеристических показателей $\Lambda(K_{b0\,s}, \gamma)$ (*а*, *б*) и $\Lambda(K, Q_a)$ (*в*, *г*) для параметра нелинейности K равного 5 (*а*, *в*), 50 (*б*, *г*)

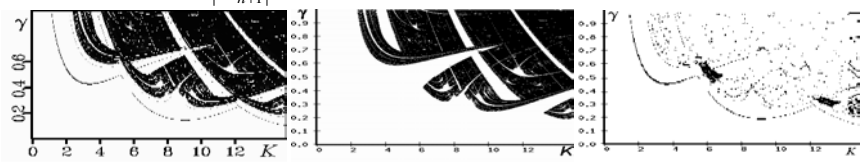
Выдвинуты соображения о возможности расширения границы применения гипотезы Каплана–Йорке. Предложена процедура *экструзии* (от лат. *extrusum* < *ex* – из + *trudo* – толкать, т.е. выталкивать, выдавливать) фазового пространства в дополнительное измерение и соответствующая ей экстраполяция спектра ЛХП. Найдено ограничение на численное значение дополнительного ляпуновского показателя Λ_{N+1}. Благодаря этому сделан вывод о неединственности «экструзированной» системы и о том, что всего одна система из этого набора (с $\Lambda_{N+1} = -\infty$) является идентичной исходной.

Правомерность процедуры экструзии проверена на примере модели процессов в нелинейном кольцевом интерферометре (5), и на примере отображения окружности:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega - K/(2\pi)\sin(2\pi\varphi_n). \qquad (10)$$

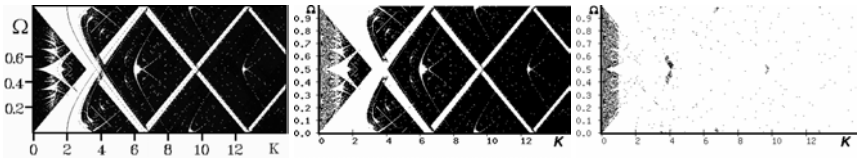
На основе независимых расчётов ляпуновской размерности D_λ и фрактальной размерности (ёмкости) D_0 построены соответствующие карты на плоскости параметров модели (рис. 12, *а*, *б* и 13, *а*, *б*). Дополнительными исследовательскими методами служило построение графиков плотностей распределения значений D_0 для этих карт, а также карт разности δD значений D_0 и D_λ (рис. 12, *в* и 13, *в*). Эти результаты говорят в пользу выдвинутой ранее процедуры экструзии фазового пространства с $\Lambda_2 \to -\infty$, позволяющей рассчитать ляпуновскую размерность по формуле (11) согласно гипотезе Каплана–Йорке. И тем самым оценить верхнюю границу размерности динамической системы. Построением карты периодов (рис. 14) для отображения окружности и сравнением её с аналогичными картами в литературе тестирована моделирующая программа.

$$D_\lambda \equiv n + \frac{\sum_{i=1}^{n} \Lambda_i}{|\Lambda_{n+1}|}. \qquad (11)$$



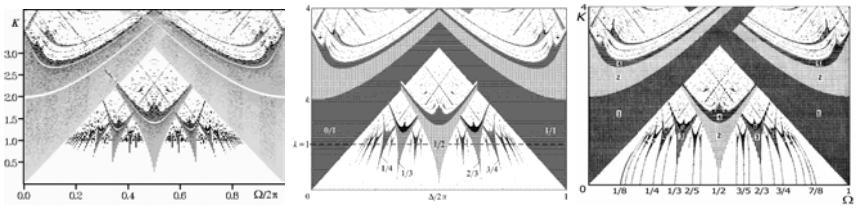
а *б* *в*

Рис. 12. Карты фрактальной $D_0(K, \gamma)$ (*а*) и ляпуновской $D_\lambda(K, \gamma)$ (*б*) размерностей, карта разности $\delta D(K, \gamma) \equiv |D_0(K, \gamma) - D_\lambda(K, \gamma)|$ (*в*). При Φ=0 и параметрах бихроматического излучения: q=0.1, Q_a=0.1



а *б* *в*

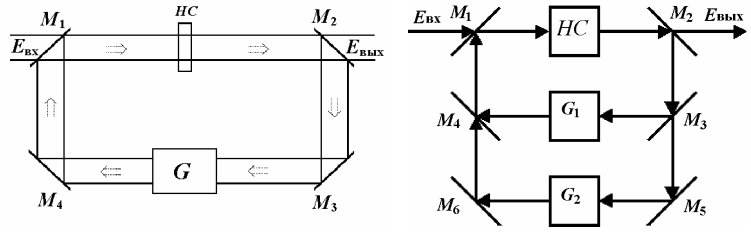
Рис. 13. Карты фрактальной $D_0(K, \Omega)$ (*а*) и ляпуновской $D_\lambda(K, \Omega)$ (*б*) размерностей, карта периодов (*в*) и карта разности $\delta D(K, \Omega) \equiv |D_0(K, \Omega) - D_\lambda(K, \Omega)|$ (*в*), построенные для отображения окружности (10)



а *б* *в*

Рис. 14. Карты динамических режимов на плоскости параметров отображения окружности $\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta + k\sin\theta \pmod{2\pi}$. Области, изображённые различными тонами серого цвета, отвечают периодическим режимам (языки Арнольда), для нескольких из них указаны числа вращения. Области квазипериодичности и хаоса показаны белым: k=1 − критическая линия. *а* – карта, построенная нами; *б* − С.П. Кузнецовым и *в* − В.С. Анищенко

2.4. IV глава «Модификация моделей нелинейного кольцевого интерферометра для решения задач информационной оптики» содержит оригинальный материал, посвящённый изучению сложной динамики амплитуды $a(\mathbf{r}, t)$, фазы $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и нелинейного фазового набега $U(\mathbf{r}, t)$ в нелинейном кольцевом интерферометре с *дополнительным контуром обратной связи* (рис. 15). Описана оптическая схема двухконтурного нелинейного кольцевого интерферометра (ДНКИ) и построена соответствующая математическая модель. Рассмотрена также модель в «точечном» приближении, т.е. при отсутствии диффузии молекул нелинейной среды (D_e=0).



а *б*

Рис. 15. Оптические схемы традиционного (четырёхзеркального) НКИ (*а*) и модифицированного (двухконтурного) НКИ (*б*)

$$\tau_{\text{п}}(\mathbf{r})\,\partial U(\mathbf{r},t)/\partial t = D_{\text{e}}(\mathbf{r})\,\Delta U(\mathbf{r},t) - U(\mathbf{r},t) + K\,n_2(\mathbf{r})\,a^2(\mathbf{r},t)/(1-R_1), \qquad (12)$$

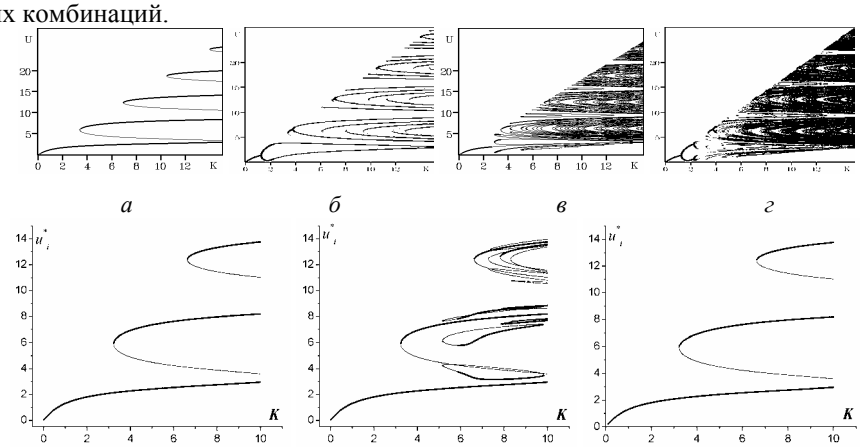
$$a(\mathbf{r},t)=(Ac^2+As^2)^{0.5},$$

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\begin{cases}(\pi/2)-\operatorname{arctg}(Ac/As), & As>0\\ (3\pi/2)-\operatorname{arctg}(Ac/As), & As<0\\ 0, & As=0,\ Ac\ge 0\\ 3\pi/2, & As=0,\ Ac<0\end{cases}\in[0;\,2\pi),$$

$$Ac=(1-R_1)^{1/2}a_{\text{вх}}(\mathbf{r},t)\cos[\varphi_{\text{вх}}(\mathbf{r},t)]+$$
$$+0.5\gamma_1(\mathbf{r}_1',t)\,a(\mathbf{r}_1',t-\tau_1)\cos[\varphi(\mathbf{r}_1',t-\tau_1)-\omega\tau_1]/\sigma_1+$$
$$+0.5\gamma_2(\mathbf{r}_2',t)\,a(\mathbf{r}_2',t-\tau_2)\cos[\varphi(\mathbf{r}_2',t-\tau_2)-\omega\tau_2]/\sigma_2,$$
$$As=(1-R_1)^{1/2}a_{\text{вх}}(\mathbf{r},t)\sin[\varphi_{\text{вх}}(\mathbf{r},t)]+$$
$$+0.5\gamma_1(\mathbf{r}_1',t)\,a(\mathbf{r}_1',t-\tau_1)\sin[\varphi(\mathbf{r}_1',t-\tau_1)-\omega\tau_1]/\sigma_1+$$
$$+0.5\gamma_2(\mathbf{r}_2',t)\,a(\mathbf{r}_2',t-\tau_2)\sin[\varphi(\mathbf{r}_2',t-\tau_2)-\omega\tau_2]/\sigma_2,$$

где $\tau_i\equiv\tau_i(\mathbf{r}_i',t)=t_{\text{e}\,i}(\mathbf{r}_i',t)+U(\mathbf{r}_i',t-t_{\text{e}\,i}(\mathbf{r}_i',t))/\omega$. Физический смысл параметров модели (12) тот же, что и для модели (1). Индексы 1, 2 – номера контуров.

Для «точечной» модели ДНКИ в приближении больших потерь или одного прохода и пренебрежении временами $t_{\text{e}\,i}$ запаздывания поля в контурах обратной связи найдены стационарные решения, и выполнен анализ их устойчивости, построены серии бифуркационных диаграмм (БД). Проведено сравнение структур БД для одно- и двухконтурной (рис. 16, 17) схем НКИ (защищаемое положение **V**). Структура БД существенно зависит от значений параметров КОС и их комбинаций.



а *б* *в* *г*

д *е* *ж*

Рис. 16. Бифуркационные диаграммы (на плоскости стационарное решение − параметр нелинейности *K* для γ=0.8) для одноконтурного НКИ при углах поворота поля в контуре: *а* − Δ=0°; *б* − Δ=180°; *в* − Δ=120°; *г* − Δ=90°; и для двухконтурного интерферометра при: *д* − Δ_1=180°, Δ_2=0°; *е* − Δ_1=120°, Δ_2=0°; *ж* − Δ_1=90°, Δ_2=0°. Более жирными линиями показаны устойчивые участки ветвей. Существенно, что положение ветвей БД, соответствующих одинаковым значениям фазовых набегов U_i, остаётся неизменным для любых комбинаций Δ_1 и Δ_2

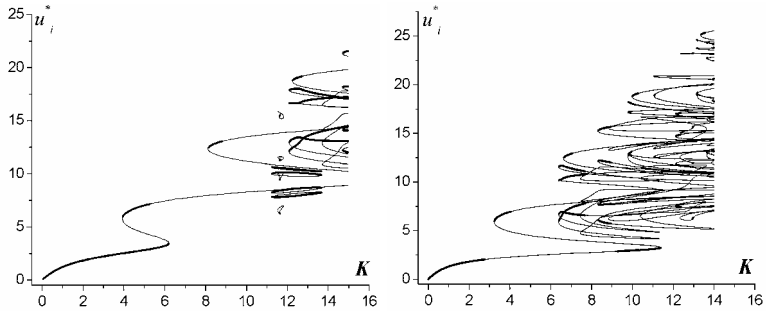
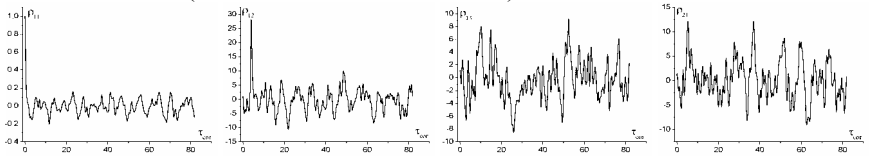


Рис. 17. Бифуркационные диаграммы (на плоскости стационарное решение − параметр нелинейности *K*) для двухконтурного интерферометра при углах поворота поля в контурах Δ_1=90°, Δ_2=180° для γ=0.5 (*а*); для γ=0.8 (*б*). Отличия структуры БД от её

аналогов для соответствующих моделей одноконтурных НКИ (рис. 16, *б*, *г*) проявляются в том что: отсутствует бистабильность; существенно изменяется конфигурация устойчивых и неустойчивых ветвей БД

В рамках точечной модели ДНКИ с учётом многих проходов поля через КОС проведён корреляционный анализ динамики амплитуд поля в точках поперечного сечения пучка (рис. 18). Он демонстрирует, что совместное построение авто- и кросскорреляционных функций позволяет: 1) при произвольных, но *a priori* известных (криптоаналитику) комбинациях углов поворота поля в первом и втором контурах ДНКИ легко выявить разность времён запаздывания $\Delta t_e = |t_{e2} - t_{e1}|$, но не сами величины t_{e2}, t_{e1}; 2) ценой больших вычислительных затрат определить принадлежность точек к одной цепочке транспозиционных точек (ЦТТ) (произвести разбиение точек поперечного сечения пучка по множеству ЦТТ). Но определить саму структуру ЦТТ (углы поворота поля Δ_1, Δ_2 в КОС ДНКИ) невозможно. Значит, ДНКИ более устойчив по сравнению с НКИ к «взлому» её параметров с помощью корреляционного анализа (защищаемое положение **VI**).



а *б* *в* *г*

Рис. 18. Авто- (*а*) и кросскоррелограммы (*б–г*) для модели ДНКИ при углах поворота поля $\Delta_1 = 180^o$, $\Delta_2 = 90^o$, временах запаздывания в первом и во втором контурах $t_{e1}/\tau_n=1$ и $t_{e2}/\tau_n=5$, $\Delta t_e/\tau_n=4$, где $\tau_n=10^{-9}$с; потерях $\gamma_1 = \gamma_2 = \sqrt{0{,}125}$, коэффициенте нелинейности K=10

В Заключении приводятся и обобщаются основные результаты диссертации по следующим аспектам: методологический, модельный, теоретический, прикладной, постановочно-проблемный. В методологическом плане наиболее важными представляются следующие результаты.

1. Через категории теории множеств раскрыт смысл понятия пространственного детерминированного хаоса, разработано соответствующее определение. 2. Для *m*-мерной динамической системы обоснован переход к описанию её дискретным отображением с пространственной эволюционной переменной. 3. Предложена процедура *экструзии*. 4. В контексте изучения роли ограничения керровской нелинейности введён ряд параметров. 5. Предложены исследовательские приёмы, ориентированные на анализ, интерпретацию, количественную оценку структуры карт динамических режимов.

В прикладном плане наиболее важной является рекомендация использования ДНКИ как основы оптических криптосистем.

В пяти **приложениях** размещены: 1) документы о внедрении результатов; 2) описание методики нахождения стационарных решений и анализа их устойчивости; 3) описание процедуры верификации результатов моделирования и тестирования программ; 4) результаты имитации процедуры (де)шифрации изображения в статическом режиме НКИ; 5) данные корреляционного анализа амплитуд для модели одноконтурного НКИ.

3. Список основных публикаций по теме диссертации

1. Лячин А.В., Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н. Идентификация режимов в модели кольцевого интерферометра с поворотом оптического поля на 120° // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10. № 6. С. 71-80

2. Измайлов И.В., Лячин А.В., Пойзнер Б.Н. Описание процессов в кольцевом интерферометре дискретным отображением: бифуркации и размерности аттрактора // Вестник Томского гос. университета. Сер. «Физика». 2003. № 278. Сентябрь. С. 111-115.

3. Лячин А.В., Пойзнер Б.Н. Хаотичность и странность как аспекты сложной динамики (на примере кольцевого интерферометра) // Преподавание физики в высшей школе. Научно-методический журнал (Москва, МПГУ). 2003. № 26. С. 101-105.

4. Лячин А.В., Пойзнер Б.Н. Моделирование преобразования лазерного пучка в кольцевом интерферометре: фрактальная геометрия хаотического аттрактора в плане обработки информации // Оптика атмосферы и океана. 2004. Т. 17. № 02-03. С. 146-150.

5. Измайлов И.В., Лячин А.В., Пойзнер Б.Н., Шергин Д.А. Пространственный детерминированный хаос: Модель и демонстрация явления в вычислительном эксперименте // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13. № 1-2. С. 123-136.

6. Измайлов И.В., Лячин А.В., Пойзнер Б.Н., Шергин Д.А. Моделирование поведения нелинейного фазового набега поля в кольцевом интерферометре: случай двухчастотного воздействия // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13. № 1-2. С. 137-151.

7. Лячин А.В. Моделирование процессов структурообразования, описываемых уравнением параболического типа / Изв. вузов. Физика. 2000. Депонирована в ВИНИТИ 22.11.00, рег. №2975-В00. 8 с. (Аннотация опубликована в журнале Изв. вузов. Физика. 2001. № 1).

8. Лячин А.В. Переход от стационарного к динамическому режиму в модели процессов в нелинейном кольцевом интерферометре / Изв. вузов. Физика. 2002. Депонирована в ВИНИТИ 25.12.02, рег. №2244-В02. 8 с. (Аннотация опубликована в журнале Изв. вузов. Физика. 2003. № 2).

9. Лесина С.В., Лячин А.В. Анализ фрактальной размерности аттракторов в модели кольцевого интерферометра с двухчастотным воздействием / Изв. вузов. Физика. 2004. Депонирована в ВИНИТИ 26.02.04, рег. №333-В04. 8 с. (Аннотация опубликована в журнале Изв. вузов. Физика. 2004. № 3).

10. *Three-photons absorption as a regulator of Kerr's effect strength in ring interferometer: a model and regimes analysis / I.V. Izmailov, A.V. Lyachin, B.N. Poizner // Proc. of SPIE.* 2005. *V.* 5851. *P.* 74-81.

11. *Nonlinearity with saturation in the ring interferometer model: stability, bifurcation behaviour, attractor dimension / P.E. Denisov, I.V. Izmailov, A.V. Lyachin, D.A. Shergin, B.N. Poizner // Proc. of SPIE.* 2005. *V.* 5851. *P.* 82-89.

12. *Second circuit of two-dimensional feedback loop in ring interferometer as a way to create coupled oscillators system or couplings in a oscillator / I.V. Izmailov*, *A.V. Lyachin*, *M.E. Nazarov*, *B.N. Poizner*, *D.A. Shergin // Proc. of IEEE / Ed. by A.L. Fradkov and A.N. Churilov. Cat. № 05EX1099C: Proc. of 2-nd Int. Conference «Physics and Control» (August 20-22, 2005, S.-Petersburg)*. 2005. *P*. 841-846.

13. Измайлов И.В., Лячин А.В., Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н. Изменение структуры предельного цикла вследствие запаздывания в нелинейном кольцевом интерферометре // Циклы. Cycles. Материалы 1-й Международной конференции (25–30 октября 1999 г., г. Ставрополь). Ч.2. – Ставрополь, 1999. С. 68-69.

14. Лячин А.В., Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н. Регулярная и хаотическая динамика процессов в модели кольцевого интерферометра // «Математика. Компьютер. Образование»: Сборник тезисов девятой международной конференции (28 января – 2 февраля 2002 г., г. Дубна). – М. 2002. С. 99.

15. Лячин А.В., Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н. Сложная динамика в модели открытой оптической системы // Организация структур в открытых системах: тезисы докладов шестой международной конференции (21–24 октября 2002 г., г. Алматы). – Алматы. 2002. С. 5-6.

16. Лячин А.В., Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н. Режим, напоминающий странный нехаотический аттрактор, в модели нелинейного кольцевого интерферометра // Фундаментальные проблемы оптики – 02: Труды конференции. (16–17 октября 2002 г., г. Санкт-Петербург). – СПб.: СПбГИТМО (ТУ). 2002. С. 56-58.

17. Лесина С.В., Лячин А.В. О связи между мерой странности аттрактора и структурой его фазового портрета в модели кольцевого интерферометра // Современные проблемы физики и высокие технологии: Материалы международной конференции, посвященной 125-летию ТГУ, 75-летию СФТИ и 50-летию РФФ ТГУ (29 сентября – 4 октября 2003 г., г. Томск). – Томск: Изд-во НТЛ, 2003. С. 238-241.

18. Измайлов И.В., Лячин А.В. Фрактальная размерность аттрактора в модели процессов в нелинейном кольцевом интерферометре // Оптика 2003. Труды третьей международной конференции молодых ученых и специалистов «Оптика-2003» (20–23 октября 2003 г., г. Санкт-Петербург) / Под ред. проф. С.А. Козлова. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2003. С. 90-91.

19. Измайлов И.В., Лячин А.В., Пойзнер Б.Н. Пространственный детерминированный хаос как объект полидисциплинарного исследования в нелинейной кристаллооптике // Тезисы докладов второй международной конференции по физике кристаллов «Кристаллофизика 21-го века» (28–30 октября 2003 г., г. Москва). – М.: МИСиС, 2003. С. 51-53

20. Шергин Д.А., Измайлов И.В., Лячин А.В., Пойзнер Б.Н. Методика анализа регулярной и хаотической динамики на примере модели оптической системы // Материалы международной научной конференции «Анализ и синтез как методы научного познания». Ч. 2. - Таганрог: ТРТУ, 2004. С. 73-75.

21. *Izmailov I.V., Lyachin A.V. Multiphoton phenomena in presence of kerr's effect: simulation of processes in ring interferometer // Proc. of IV Int. young scientists conf. on applied physics* (*June* 21–23, 2004, *Kiev*). – *Kiev*, 2004. P. 28-29.

22. Лесина С.В., Лячин А.В. Фрактальная размерность аттракторов в модели кольцевого интерферометра для случая двухчастотного излучения // Материалы VII международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур» (1-6 октября 2004 г., г. Саратов). – Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2004. С. 62-63.

23. Измайлов И.В., Лячин А.В., Пойзнер Б.Н. Моделирование сложной динамики в кольцевом интерферометре с учетом многофотонных процессов // Материалы VII международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур» (1-6 октября 2004 г., г. Саратов). – Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2004. С. 116-117.

24. Измайлов И.В., Лячин А.В., Пойзнер Б.Н., Шергин Д.А. Пространственный детерминированный хаос как понятие и объект исследования // Материалы VII международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур» (1-6 октября 2004 г., г. Саратов). – Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2004. С. 146-147.

25. Лячин А.В. Влияние многофотонных процессов на нелинейную динамику в модели кольцевого интерферометра с керровской средой // Труды третьей международной конференции «Фундаментальные проблемы оптики» (18–21 октября 2004 г., г. Санкт-Петербург) / Под ред. проф. В.Г. Беспалова, проф. С.А. Козлова. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2004. С. 74-75.

26. *Izmailov I.V.*, *Lyachin A.V. Simulation of complex dynamics in the ring resonator with account of multi-photons processes // Proc. of II Int. Conference «Frontiers of nonlinear physics»* (*July* 5−12, 2004, *Nizhny Novgorod − St. Petersburg*). – *Nizhny Novgorod*, 2004. P. 64-65.

27. Измайлов И.В., Лячин А.В. О возможности управления сложной динамикой в модели двухконтурного интерферометра // Оптика-2005. Труды четвёртой международной конференции молодых учёных и специалистов «Оптика-2005» (17–21 октября 2005 г., г. Санкт-Петербург) / Под ред. проф. В.Г. Беспалова, проф. С.А. Козлова. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2005. С. 66-67.

28. Измайлов И.В., Лячин А.В., Магазинников А.Л. Особенности бифуркационного поведения нелинейного фазового набега в модели двухконтурного интерферометра // Оптика-2005. Труды четвёртой международной конференции молодых учёных и специалистов «Оптика-2005» (17–21 октября 2005 г., г. Санкт-Петербург) / Под ред. проф. В.Г. Беспалова, проф. С.А. Козлова. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2005. С. 68-69.