На правах рукописи

ТИМОШЕНКО Егор Александрович

Т-РАДИКАЛЫ В КАТЕГОРИИ МОДУЛЕЙ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Томск — 2005

Работа выполнена на кафедре алгебры
Томского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Крылов Пётр Андреевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Левчук Владимир Михайлович

кандидат физико-математических наук, доцент
Пахомова Елена Григорьевна

Ведущая организация: Омский государственный педагогический университет

Защита диссертации состоится 19 ноября 2005 г. в 14.15 на заседании диссертационного совета К212.267.05 при Томском государственном университете по адресу: 634050, Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке
Томского государственного университета.

Автореферат разослан 18 октября 2005 г.

Учёный секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,
доцент _____ **А. Н. Малютина**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. При рассмотрении алгебраических систем основной задачей является построение структурной теории. Структурные теоремы сводят изучение алгебраических систем к изучению «более просто устроенных». Одну из конструкций, осуществляющих подобное сведение, представляет радикал. С тех пор, как в 1950-х гг. Курош [5] и Амицур [9] ввели понятие радикала для колец и алгебр, теория радикалов распространилась и на другие алгебраические структуры, в числе которых модули и группы.

Радикалы позволяют выделять классы модулей, обладающих различными свойствами, проводить их классификацию и дальнейшее более детальное изучение. На зрелость направления, связанного с радикалами модулей, указывает наличие заметного количества монографий по этой теме (Мишина и Скорняков [6], Кашу [1, 2], Ламбек [12], Голан [11] и ряд других). Во многих работах отечественных и зарубежных алгебраистов (Курош, Рябухин, Гарднер, Диксон и др.) рассматривались радикалы абелевых групп (т.е. модулей над кольцом целых чисел).

С другой стороны, интенсивно изучаются взаимосвязи между свойствами модулей и абелевых групп. К данному направлению относятся работы о E-кольцах и E-модулях. Первое из этих понятий появилось в 1973 г. в статье [14]: E-*кольцами* были названы кольца R, для которых $\mathrm{Hom}_R(R,R) = \mathrm{Hom}(R,R)$. Позже это определение было распространено на модули: E-*модуль* A_R задаётся равенством $\mathrm{Hom}_R(R,A) = \mathrm{Hom}(R,A)$. E-модули впервые появились в [10], где они были названы R-группами. Одной из самых полных работ, посвящённых E-модулям, является [13]. Применения E-колец и E-модулей в теории абелевых групп весьма разнообразны; в книге [4] содержится обзор наиболее важных результатов, связанных с данной проблематикой.

Многие современные исследования посвящены тензорным произведениям модулей и абелевых групп. Тензорное произведение $\otimes$ является

вторым по важности (после Hom) функтором категории модулей. До сих пор актуальной проблемой остаётся описание тензорных произведений модулей и абелевых групп. В работах Крылова и Приходовского [3, 7] введено понятие $\mathrm{T}(e)$-модуля, определяемое следующим образом. Пусть $e\colon S \to R$ — гомоморфизм колец, тогда всякий R-модуль можно естественным образом превратить в притягивающий S-модуль. Модуль A_R называется $\mathrm{T}(e)$-*модулем*, если имеет место канонический изоморфизм $A \otimes_S R \cong A \otimes_R R$. Параллельно в тех же работах изучались $\mathrm{E}(e)$-*модули*, задаваемые равенством $\mathrm{Hom}_R(R, A) = \mathrm{Hom}_S(R, A)$ и в некотором смысле двойственные $\mathrm{T}(e)$-модулям.

В диссертации вводится «обобщённый» E-радикал. Это понятие в определённом смысле сводит воедино аналогичный радикал, рассматривавшийся Пирсом в [13], и $\mathrm{E}(e)$-модули из работ [3, 7]. Двойственным образом определяется T-радикал. Кроме того, рассматриваются близкие (как станет ясно из результатов второй главы) к этим двум радикалам понятия «$\mathrm{T}(F)$-радикал» и «$\mathrm{E}(V)$-радикал», в том или ином виде ранее встречавшиеся в работах, связанных с радикалами модулей.

Настоящая диссертация посвящена исследованию $\mathrm{T}(F)$-радикалов и T-радикалов. Работа также содержит ряд результатов, связанных с $\mathrm{E}(V)$-радикалами и E-радикалами. Во-первых, это помогает лучше продемонстрировать двойственность между соответствующими объектами, а во-вторых, $\mathrm{E}(V)$-радикалы в силу своей многочисленности являются удобным и подчас незаменимым инструментом при проведении доказательств. Исследование развивается по двум основным направлениям:

- поиск взаимосвязи между T-радикалами и $\mathrm{T}(F)$-радикалами;
- изучение $\mathrm{T}(F)$-радикалов категории абелевых групп.

Цель работы: исследовать взаимосвязь между T-радикалами и $\mathrm{T}(F)$-радикалами (а также между E-радикалами и $\mathrm{E}(V)$-радикалами); изучить свойства $\mathrm{T}(F)$-радикалов категории абелевых групп и описать частично упорядоченное множество, которое эти радикалы образуют.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми. К основным результатам работы можно отнести следующие.

- Показано, что существуют модули ${}_RG$ и ${}_SF$ такие, что T-радикал совпадает с $\mathrm{T}(G)$-радикалом, а также с сужением $\mathrm{T}(F)$-радикала на категорию mod-R (предложения 4.5, 4.6). Если S — коммутативное кольцо, то всякий $\mathrm{T}(F)$-радикал категории mod-S, в свою очередь, можно представить в виде T-радикала (теорема 4.14). Аналогичные результаты имеют место для E-радикалов (предложения 4.9 и 4.10, теорема 4.14).
- Описаны все $\mathrm{T}(F)$-радикалы категории mod-$\mathbf{Z}$, выяснено строение образуемой ими решётки (§6).
- Доказано, что радикальный класс идемпотентного радикала категории mod-$\mathbf{Z}$ замкнут относительно сервантных подгрупп тогда и только тогда, когда этот радикал совпадает с $\mathrm{T}(F)$-радикалом для некоторой группы F (теорема 7.5).
- Установлено, что «решёточное» пересечение $\mathrm{T}(F)$-радикалов категории mod-$\mathbf{Z}$ совпадает с их «поточечным» пересечением (§8).

Практическая и теоретическая ценность. Результаты работы имеют теоретическое значение и могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории модулей и абелевых групп, а также при чтении спецкурсов.

Апробация результатов. Основные результаты настоящей диссертации докладывались на международных конференциях «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2001 и 2005 гг.), «Алгебра и её приложения» (Красноярск, 2002 г.), «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2002 г.), «Алгебра, логика и кибернетика» (Иркутск, 2004 г.), Международной конференции по математике и механике (Томск, 2003 г.) и Всероссийском симпозиуме «Абелевы группы» (Бийск, 2005 г.) и были

опубликованы в работах [15] – [25]. Кроме того, они докладывались на семинарах кафедры алгебры Томского государственного университета.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, списка литературы и списка обозначений. Главы I и III содержат по три параграфа, глава II — два параграфа. Работа изложена на 77 страницах.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение содержит обоснование актуальности решаемых в работе задач, а также изложение основных полученных результатов.

Глава I содержит предварительные сведения и общие результаты, используемые в последующих главах. В §1 приводятся основные определения и факты из теории радикалов модулей. §2 содержит ряд свойств функторов $\otimes$ и Hom, играющих в работе ключевую роль. В §3 вводятся основные исследуемые объекты: $\mathrm{T}(F)$-радикал W_F и $\mathrm{E}(V)$-радикал H_V, нейтрализатор n_F и след tr_V; устанавливаются некоторые связанные с этими объектами общие факты, имеющие и самостоятельный интерес.

Приведём основные определения. Зафиксируем S-модули ${}_SF$ и V_S. Через $\mathrm{W}_F(A)$ обозначается сумма всех подмодулей B модуля A таких, что $B \otimes_S F = 0$; через $\mathrm{H}_V(A)$ — пересечение всех подмодулей B модуля A, для которых $\mathrm{Hom}_S(V, A/B) = 0$. Получающиеся радикалы W_F и H_V назовём $\mathrm{T}(F)$-*радикалом* и $\mathrm{E}(V)$-*радикалом* соответственно.

Определение 3.5. Пусть A_S — модуль. Его F-*нейтрализатором* называется множество всех $a \in A$ таких, что в тензорном произведении $A \otimes_S F$ для всякого $f \in F$ выполнено равенство $a \otimes_S f = 0$. Обозначим это множество $\mathrm{n}_F(A)$. Возникающий при этом предрадикал n_F мы также будем называть (F-)нейтрализатором.

Определение 3.8. Пусть A_S — модуль. V-*следом* в этом модуле называется сумма образов всех S-модульных гомоморфизмов $\varphi\colon V \to A$.

Обозначим эту сумму $\mathrm{tr}_V(A)$. Возникающий при этом предрадикал tr_V мы также будем называть (V-)следом.

(Для удобства выбрано обозначение, несколько отличающееся от того, что принято, например, в [8].)

Последние два результата параграфа показывают, как связанные с идемпотентными радикалами категории mod-S решёточные операции действуют на $\mathrm{T}(F)$-радикалы и $\mathrm{E}(V)$-радикалы.

Предложение 3.12. *Пусть даны S-модули ${}_SF$ и V_S и их прямые разложения $F = \bigoplus\limits_{i\in I} F_i$, $V = \bigoplus\limits_{j\in J} V_j$. Тогда*

(а) $\bigwedge\limits_{i\in I} \mathrm{W}_{F_i} = \mathrm{W}_F$;

(б) $\bigvee\limits_{j\in J} \mathrm{H}_{V_j} = \mathrm{H}_V$.

Следствие 3.13. *Если совокупность всех $\mathrm{T}(F)$-радикалов категории mod-S образует множество, то относительно естественного порядка предрадикалов это множество является полной решёткой.*

В §6 будет показано, что описанная в данном следствии ситуация имеет место, в частности, в категории mod-$\mathbf{Z}$.

В главе II исследуются $\mathrm{T}(e)$-модули и $\mathrm{E}(e)$-модули (в смысле [3, 7]) и определяемые с их помощью T-радикал W и E-радикал H. В §4 устанавливаются некоторые связи между этими радикалами и радикалами, которые вводились в §3. В ситуации, когда дан кольцевой гомоморфизм $e\colon S \to R$, всякий R-модуль можно естественным образом превратить в S-модуль.

Пусть $e\colon S \to R$ — кольцевой гомоморфизм. R-модуль A назовём $\mathrm{T}(e)$-*модулем*, если канонический эпиморфизм $A \otimes_S R \to A \otimes_R R$ — изоморфизм. Модуль A называется $\mathrm{E}(e)$-*модулем*, если выполнено условие $\mathrm{Hom}_R(R, A) = \mathrm{Hom}_S(R, A)$.

Определение 4.3. T-*радикалом* модуля A_R назовём сумму $\mathrm{W}(A)$ всех его подмодулей B таких, что B есть $\mathrm{T}(e)$-модуль.

Определение 4.7. E-*радикалом* модуля A_R назовём пересечение $\mathrm{H}(A)$ всех его подмодулей B таких, что A/B есть $\mathrm{E}(e)$-модуль.

Если ${}_SF = R/e(S)$, то для удобства пишем $\mathrm{n} = \mathrm{n}_F$. Очевидно, что $\mathrm{n}(A)$ является S-подмодулем в A. Верно и более сильное утверждение.

Теорема 4.4. *Пусть A — R-модуль. Тогда нейтрализатор* $\mathrm{n}(A)$ *является его подмодулем.*

При помощи этой теоремы доказывается следующий результат.

Предложение 4.5. *Для произвольного R-модуля A имеет место равенство* $\mathrm{W}(A) = \mathrm{W}_F(A)$.

Кроме того, для левого R-модуля $G = R \otimes_S F$ выполняется

Предложение 4.6. *Для произвольного R-модуля A справедливы равенства* $\mathrm{n}(A) = \mathrm{n}_G(A)$ *и* $\mathrm{W}(A) = \mathrm{W}_G(A)$.

Таким образом, для подходящих модулей ${}_RG$ и ${}_SF$ можно утверждать, что T-радикал совпадает с $\mathrm{T}(G)$-радикалом категории mod-R, а также с сужением $\mathrm{T}(F)$-радикала категории mod-S на её подкатегорию mod-R. Аналогичные результаты справедливы и для E-радикала. Ниже используются обозначения $V_S = R/e(S)$, $\mathrm{tr} = \mathrm{tr}_V$, $U_R = V \otimes_S R$. Имеем следующий аналог теоремы 4.4.

Теорема 4.8. *Пусть A — R-модуль. Тогда след* $\mathrm{tr}(A)$ *является его подмодулем.*

Предложение 4.9. *Для произвольного R-модуля A имеет место равенство* $\mathrm{H}(A) = \mathrm{H}_V(A)$.

Предложение 4.10. *Для произвольного R-модуля A справедливы равенства* $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}_U(A)$ *и* $\mathrm{H}(A) = \mathrm{H}_U(A)$.

Учитывая предложения 4.5 и 4.9, получаем следующую теорему.

Теорема 4.11. *Значения* T-*радикала и* E-*радикала произвольного модуля A_R однозначно определяются его S-модульной структурой.*

Последние два результата параграфа свидетельствуют о том, что утверждения предложений 4.5 и 4.9 при определённых дополнительных условиях можно обратить.

Предложение 4.13. *Пусть S — кольцо, ${}_SF_S$ — бимодуль. Тогда существуют кольцо R и гомоморфизм $e\colon S \to R$ такие, что бимодуль $R/e(S)$ изоморфен бимодулю F.*

При помощи этого предложения доказывается

Теорема 4.14. *Пусть S — коммутативное кольцо. Тогда всякий $\mathrm{T}(F)$-радикал ($\mathrm{E}(V)$-радикал) категории mod-S имеет вид T-радикала (соответственно E-радикала) для подходящего кольца R и вложения $e\colon S \to R$.*

В §5 дополнительно рассматриваются $\mathrm{T}(\overline{e})$-модули и $\mathrm{E}(\overline{e})$-модули, где $\overline{e}$ есть композиция e и естественного гомоморфизма колец $R \to \overline{R}$ ($\overline{R} = R/I$ — некоторое факторкольцо кольца R), а также связанные с такими модулями радикалы.

Теорема 5.1. *Пусть A — модуль над кольцами R и $\overline{R}$. Следующие условия эквивалентны:*
1) A — $\mathrm{T}(e)$-модуль;
2) A — $\mathrm{T}(\overline{e})$-модуль, причём $I \subset \mathrm{n}_A(R)$.

Следствие 5.2. *Пусть A — модуль над кольцами R и $\overline{R}$. Тогда $\mathrm{W}(A) \subset \overline{\mathrm{W}}(A)$.*

Теорема 5.3. *Пусть A — модуль над кольцами R и $\overline{R}$. Следующие условия эквивалентны:*
1) A — $\mathrm{E}(e)$-модуль;
2) A — $\mathrm{E}(\overline{e})$-модуль, причём $I \subset \bigcap\bigl\{\mathrm{Ker}\,\varphi \mid \varphi \in \mathrm{Hom}_S(R, A)\bigr\}$.

Следствие 5.4. *Пусть A — модуль над кольцами R и $\overline{R}$. Тогда $\overline{\mathrm{H}}(A) \subset \mathrm{H}(A)$.*

Глава III посвящена изучению $\mathrm{T}(F)$-радикалов категории абелевых групп. В §6 даётся описание всех таких радикалов и решётки, которую они образуют. Для этого отдельно рассматриваются непериодические и периодические группы F. Символами $\mathbf{t}$ и $\mathbf{d}$ обозначаются предрадикалы, сопоставляющие всякой группе соответственно её периодическую часть и наибольшую делимую подгруппу; P — множество всех простых чисел.

В качестве вспомогательного инструмента используется трёхэлементная цепь $M_1 = \{l, m, n\}$, где $n < m < l$. Для всякой непериодической группы F можно определить функцию $\psi^F \colon P \to M_1$, полагая

$$\psi^F(p) = \begin{cases} l, & \text{если группа } F \text{ является } p\text{-делимой;} \\ m, & \text{если группа } F \text{ не является } p\text{-делимой,} \\ & \qquad \text{а факторгруппа } F/\,\mathbf{t}(F) \text{ является;} \\ n, & \text{если факторгруппа } F/\,\mathbf{t}(F) \text{ не является } p\text{-делимой.} \end{cases}$$

Через $\mathcal{L}_1$ обозначается множество всех $\mathrm{T}(F)$-радикалов, порождаемых непериодическими группами F; через M_1^P — множество, состоящее из всех последовательностей вида

$$\alpha = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \dots, \alpha_p, \dots), \tag{12}$$

члены которых занумерованы простыми числами и принадлежат M_1. Отображение $\varphi_1 \colon \mathcal{L}_1 \to M_1^P$ задаётся равенством

$$\varphi_1(\mathrm{W}_F) = \big(\psi^F(2), \psi^F(3), \psi^F(5), \dots, \psi^F(p), \dots\big).$$

Теорема 6.3. *Частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_1$ является полной дистрибутивной решёткой; отображение φ_1 есть изоморфизм решёток. Нулём и единицей решётки $\mathcal{L}_1$ служат радикалы $\mathrm{W}_{\mathbf{Z}} = 0$ и $\mathbf{t}$ соответственно.*

Пусть $M_2 = \{\lambda, \mu, \nu\}$ — ещё одна цепь из трёх элементов, причём $\lambda < \mu < \nu$. Функция $\psi^F \colon P \to M_2$ (для удобства функции $P \to M_2$ и $P \to M_1$ обозначены одинаково; это не вызывает путаницы, так как в одном случае группа F периодическая, а в другом — нет) строится так:

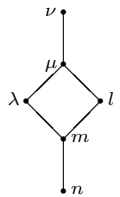
$$\psi^F(p) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } p\text{-компонента } F_p \text{ не является делимой;} \\ \mu, & \text{если } F_p \text{ — ненулевая делимая группа;} \\ \nu, & \text{если } F_p = 0. \end{cases}$$

Через $\mathcal{L}_2$ обозначается множество всех $\mathrm{T}(F)$-радикалов, которые порождаются периодическими группами F; через M_2^P — множество, состоящее из всех последовательностей вида (12) с членами из M_2. Отображение $\varphi_2\colon \mathcal{L}_2 \to M_2^P$ определяется по аналогии с φ_1:

$$\varphi_2(\mathrm{W}_F) = \big(\psi^F(2), \psi^F(3), \psi^F(5), \dots, \psi^F(p), \dots\big).$$

Теорема 6.6. *Частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_2$ является полной дистрибутивной решёткой; отображение φ_2 есть изоморфизм решёток. Нулём и единицей решётки $\mathcal{L}_2$ служат радикалы $\mathbf{d}$ и $\mathrm{W}_0 = 1$ соответственно.*

Далее рассматривается частично упорядоченное множество $M = M_1 \cup M_2 = \{l, m, n, \lambda, \mu, \nu\}$ (предполагается, что $m < \lambda$ и $l < \mu$, а элементы l и λ несравнимы). Подмножество $\mathcal{M} = M_1^P \cup M_2^P$ множества M^P есть полная дистрибутивная решётка. Биекция $\varphi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ из множества $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ всех $\mathrm{T}(F)$-радикалов категории абелевых групп в множество $\mathcal{M}$ строится как продолжение биекций $\varphi_i\colon \mathcal{L}_i \to M_i^P$, т.е.



$$\varphi(\mathrm{W}_F) = \big(\psi^F(2), \psi^F(3), \psi^F(5), \dots, \psi^F(p), \dots\big).$$

Теорема 6.10. *Частично упорядоченное множество $\mathcal{L}$ является полной дистрибутивной решёткой; отображение φ есть изоморфизм решёток. Нулём и единицей решётки $\mathcal{L}$ служат радикалы $\mathrm{W}_{\mathbf{Z}} = 0$ и $\mathrm{W}_0 = 1$ соответственно.*

Последний результат параграфа показывает, насколько «плотно» радикалы W_F расположены в *большой решётке* $\mathcal{IR}$ (она отличается от обычной решётки тем, что элементы $\mathcal{IR}$ не образуют множество) всех идемпотентных радикалов категории абелевых групп.

Предложение 6.12. *Пусть ρ — идемпотентный радикал. Тогда*
(а) если $\mathbf{d} \wedge \mathbf{t} \leqslant \rho \leqslant \mathbf{d}$, то $\rho = \mathbf{d} \wedge \mathbf{t}$ или $\rho = \mathbf{d}$;
(б) если $\mathbf{t} \leqslant \rho \leqslant \mathbf{d} \vee \mathbf{t}$, то $\rho = \mathbf{t}$ или $\rho = \mathbf{d} \vee \mathbf{t}$;

(в) если $\rho \leqslant \mathbf{t}$, то $\rho = \varphi^{-1}(\alpha)$, где α — некоторая последовательность вида (12) с членами из $\{l, m, n\}$;
(г) если $\mathbf{d} \leqslant \rho \leqslant \mathbf{d} \vee \mathbf{t}$, то $\rho = \varphi^{-1}(\alpha)$, где α — некоторая последовательность вида (12) с членами из $\{\lambda, \mu\}$.

В §7 рассматриваются различные свойства замкнутости классов $\mathcal{T}(F)$ всех $\mathrm{T}(F)$-групп. Так, доказывается, что условия «n_F — кручение» и «W_F — кручение» равносильны.

Предложение 7.2. *Пусть F — абелева группа. Эквивалентны следующие условия:*
1) n_F — кручение;
2) W_F — кручение;
3) $\psi^F(P) \subset \{l, n, \nu\}$.

Символом $\mathcal{R}(\rho)$ обозначается *радикальный класс* идемпотентного радикала ρ — класс всех абелевых групп (в общем случае — модулей) A таких, что имеет место равенство $\rho(A) = A$. Главным результатом параграфа является

Теорема 7.5. *Для идемпотентного радикала $\rho \in \mathcal{IR}$ следующие условия эквивалентны:*
1) класс $\mathcal{R}(\rho)$ замкнут относительно сервантных подгрупп;
2) $\mathcal{R}(\rho)$ замкнут относительно рациональных сервантных подгрупп;
3) существует группа F такая, что $\rho = \mathrm{W}_F$.

Из данной теоремы следует любопытный факт общего характера, касающийся тензорных произведений абелевых групп.

Следствие 7.6. *Пусть $\mathcal{F}$ — произвольный класс абелевых групп, $\mathcal{R}$ — класс всех групп A, для которых $A \otimes F = 0$ при всех $F \in \mathcal{F}$. Тогда существует группа F_0 такая, что $\mathcal{R} = \mathcal{T}(F_0)$.*

В §8 установлено, что «решёточное» (см. также предложение 3.12) пересечение $\mathrm{T}(F)$-радикалов и их «поточечное» («точки» — это абелевы группы) пересечение суть одно и то же, т.е. доказана

Теорема 8.7. *Пусть A, F — произвольные абелевы группы. Если $F = \bigoplus_{i\in I} F_i$, то $\mathrm{W}_F(A) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{W}_{F_i}(A)$.*

Следствие 8.8. *Если $F = G \oplus H$, то для произвольной группы A справедливо равенство $\mathrm{W}_F(A) = \mathrm{W}_G(\mathrm{W}_H(A))$. В частности, любые два* T*-радикала категории абелевых групп коммутируют друг с другом.*

Автор выражает признательность своему научному руководителю профессору Крылову Петру Андреевичу за постановку задач, внимание к работе и помощь в оформлении диссертации.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кашу А. И. Радикалы и кручения в модулях. Кишинёв: Штиинца, 1983.

[2] Кашу А. И. Функторы и кручения в категориях модулей. Кишинёв: Штиинца, 1997.

[3] Крылов П. А., Приходовский М. А. Обобщённые T-модули и E-модули // Универсальная алгебра и её приложения: Тр. участ. междунар. семинара, посвящ. памяти Л. А. Скорнякова (Волгоград, 6–11 сент. 1999 г.). — Волгоград, 2000. — С. 153–169.

[4] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. Томск: Томск. гос. ун-т, 2002.

[5] Курош А. Г. Радикалы колец и алгебр // Матем. сборн. — 1953. — Т. 33(75), № 1. — С. 13–26.

[6] Мишина А. П., Скорняков Л. А. Абелевы группы и модули. М.: Наука, 1969.

[7] Приходовский М. А. Изоморфизмы тензорных произведений модулей и T-модули. Кандидатская диссертация. Томск, 2002.

[8] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. М.: Мир, 1977. Т. 1.

[9] Amitsur S. A. A general theory of radicals II. Radicals in rings and bicategories // Amer. J. Math. — 1954. — V. 76, no. 1. — P. 100–125.

[10] Bowshell R. A., Schultz P. Unital rings whose additive endomorphisms commute // Math. Ann. — 1977. — V. 228, no. 3. — P. 197–214.

[11] Golan J. S. Torsion theories. New York: Longman Sci. Techn., 1986.

[12] Lambek J. Torsion theories, additive semantics and rings of quotients // Lect. Notes Math., 177. — Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1971.

[13] Pierce R. S. E-modules // Contemp. Math., 87. Abelian group theory. — Providence: Amer. Math. Soc., 1989. — P. 221–240.

[14] Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring // J. Austral. Math. Soc. — 1973. — V. 15, no. 1. — P. 60–69.

Работы автора по теме диссертации

[15] Тимошенко Е. А. E-модули и связанный с ними радикал // Абелевы группы и модули. — Томск, 2000. — Вып. 15. — С. 98–112.

[16] Тимошенко Е. А. T-модули и T-радикал // Материалы XXXIX Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. — Новосибирск, 2001. — С. 3.

[17] Тимошенко Е. А. T-радикалы в категории абелевых групп // Международная конференция «Алгебра и её приложения»: Тезисы докладов. — Красноярск, 2002. — С. 118.

[18] Тимошенко Е. А. T-радикалы в категории модулей // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: Тезисы докладов V Международной конференции (Тула, 19–24 мая 2003 г.). — Тула, 2003. — С. 214–215.

[19] Timoshenko E. A. T-radicals in the category of modules // International Conference on Radicals. Program and abstracts. — Kishinev, 2003. — P. 33–35.

[20] Тимошенко Е. А. Т-радикалы в категории модулей // Международная конференция по математике и механике: Тезисы докладов. — Томск, 2003. — С. 59.

[21] Тимошенко Е. А. Т-радикалы и Е-радикалы в категории модулей // Сиб. матем. ж. — 2004. — Т. 45, № 1. — С. 201–210.

[22] Тимошенко Е. А. Т-радикалы в категории абелевых групп // Алгебра, логика и кибернетика: Материалы Международной конференции. — Иркутск, 2004. — С. 107–108.

[23] Timoshenko E. A. T-radicals in the category of modules // Acta Appl. Math. — 2005. — V. 85, no. 1–3. — P. 297–303.

[24] Тимошенко Е. А. Т-радикалы в категории абелевых групп // Материалы XLIII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. — Новосибирск, 2005. — С. 14.

[25] Тимошенко Е. А. Радикальные классы, замкнутые относительно сервантных подгрупп // Абелевы группы: Труды Всероссийского симпозиума (Бийск, 22–25 авг. 2005 г.). — Бийск, 2005. — С. 37–39.