На правах рукописи

Яковлева Наталья Михайловна

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ РЫНКА ТРУДА РЕГИОНА

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Кемерово – 2006

Работа выполнена на кафедре математической кибернетики математического факультета Кемеровского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Данилов Николай Николаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Нагорский Петр Михайлович,

кандидат физико-математических наук, доцент
Змеева Елена Евдокимовна

Ведущая организация: Сибирский государственный аэрокосмический университет (г. Красноярск)

Защита состоится:
29 июня 2006 г. в 12 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.08 при Томском государственном университете по адресу:
654050, г. Томск, пр. Ленина, 36

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Томского государственного университета

Отзывы на автореферат (в двух экземплярах, заверенные печатью) просьба высылать по адресу: 654050, г. Томск, пр. Ленина, 36, Томский государственный университет, ученому секретарю университета Буровой Н.Ю.

Автореферат разослан «____» мая 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор технических наук, доцент А.В. Скворцов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Актуальность темы диссертационного исследования объясняется тем, что соблюдение равновесия на рынке труда региона является определяющим условием динамичного и стабильного развития экономики территории. Одним из наиболее эффективных способов изучения ситуации равновесия на региональном рынке труда является использование математических методов. Математическое моделирование рынка труда дает возможность обосновать условия существования ситуации равновесия на рынке труда региона и анализировать механизмы его реализуемости. В диссертационной работе изучается концепция равновесия на рынке труда с помощью теоретико-игрового подхода.

Вопросы регулирования рынка труда до недавнего времени преимущественно исследовались зарубежными авторами, причем модели предложения и спроса на труд рассматривались автономно.

Исследование рынка труда выполнено на описательном уровне в работах, в основном, экономистов (Л. Роббинс, Р. Гронау, Г. Беккер, Р. Лейнард, Е.Р. Лэйзера, Я. Минсера, Ш. Розена, Ч. Браун, Р.С. Смит, Р.Г. Эренберг, Р.Б. Фримен, М. Спенс), в то время как необходимо его детальное исследование методами математического моделирования.

До перехода к рыночной экономике в нашей стране математические исследования отдельных вопросов экономики труда проводились для плановой экономики. Тем не менее, в последние десятилетия в отечественной научной литературе появились работы И. Бушмарина, Н. Вишневской, М. Гарсии-Исер, В. Гипельсона, А. Кашепова, А. Котляра, Л. Немова, С. Рощина и др., охватывающие элементы рынка труда.

Несмотря на расширение круга исследований по рынку труда, практически отсутствуют работы, применяющие математические модели оптимизационного характера, а проводимый анализ спроса и предложения на рынке труда большей частью имеет вербальный характер. Отметим в этой связи работы Данилова Н.Н., Чернядьевой Н.В., в которых рынок труда формализован в виде оптимизационных задач участников рынка труда, исследовано равновесие по Вальрасу и взаимовлияние основных факторов рынка в моделях участников рынка, а также вычислены оптимальные траектории участников рынка труда. В имеющихся работах по математическому моделированию и исследованию рынка труда не рассматривается конкурентный характер взаимодействия участников рынка труда, а также принимаемых ими решений.

Диссертационное исследование проводилось в рамках гранта Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ Российской Федерации «Математический анализ конфликтно-управляемых систем» – НШ-2174.2003.1. (совместно с факультетом ПМ-ПУ Санкт-Петербургского государственного университета).

Целью данной работы является построение и исследование математических моделей развития рынка труда, позволяющих обосновать существование, найти необходимые и достаточные признаки равновесного состояния рынка труда, а также изучить условия его устойчивого функционирования.

Методика исследования. Диссертационное исследование проводилось с использованием методологии математической экономики, теории игр,

математического программирования, теории оптимального управления, математического анализа и линейной алгебры.

Кроме этого, в работе применялась новая концепция моделирования временного равновесия, основанная на принципе динамической устойчивости, впервые предложенного Л.А. Петросяном в работах по кооперативным дифференциальным играм, и получившая развитие во многих областях прикладной математики.

Научная новизна. Новизна диссертационного исследования заключается в разработке новой методологии исследования рынка труда и объясняется отсутствием в научной литературе математических моделей рынка труда в форме бескоалиционных и кооперативных игр, как в статическом, так и в динамическом аспектах, и вытекающей отсюда новизной всех полученных результатов.

Теоретическая ценность работы. Предлагаются модели и концепции нахождения равновесия на рынке труда, т.е. разработана теоретическая база таких исследований. Предложенные математические модели рынка труда и полученные результаты могут быть перенесены на отраслевые рынки труда, являющиеся подсистемами регионального рынка.

Практическая ценность работы. Практическая значимость работы заключается в том, что предложенные модели и найденные условия существования равновесий на рынке труда региона и их динамической устойчивости могут быть полезны при выработке стратегий социально-экономического развития территории.

Результаты, выносимые на защиту.

1. Впервые предложен теоретико-игровой подход к математическому моделированию рынка труда региона.
2. В разработанной взаимосвязанной совокупности оптимизационных задач всех участников рынка доказано существование равновесного состояния по Вальрасу.
3. В модели рынка труда в виде бескоалиционной игры его участников найдены достаточные условия существования ситуации равновесия по Нэшу, разработан способ ее нахождения и проведен сравнительный анализ условий существования экономического (по Вальрасу), теоретико-игрового (по Нэшу) и олигополистических равновесий (по Курно и Штакельбергу) на рынке труда.
4. Сформулирован критерий непустоты *c*-ядра и критерий принадлежности дележа *c*-ядру, найдены формулы для вычисления компонент вектора Шепли в явном виде в разработанной модели рынка труда региона в виде кооперативной игры в форме характеристической функции.
5. С применением принципа динамической устойчивости исследован вопрос о состоятельности во времени равновесных траекторий развития рынка труда: найдены необходимые и достаточные условия динамической устойчивости ситуаций равновесия по Вальрасу и Нэшу, множества недоминируемых дележей (*c*-ядро) и вектора Шепли.

Апробация работы. Основные положения диссертации и отдельные ее результаты докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

1. Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование» (г. Анжеро-Судженск, 15 ноября 2002 г.);
2. Всероссийской научной конференции «Наука и образование» (г. Белово, 20-21 февраля 2003 г.);
3. VIII Всероссийской научно-практической конференции «Научное творчество

молодежи» (г. Анжеро-Судженск, 2004 г.);

4. III Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование» (г. Анжеро-Судженск, 11-12 декабря 2004 г.);

5. III Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование» (г. Анжеро-Судженск, 11-12 декабря 2004 г.);

6. IX Всероссийской научно-практической конференции «Научное творчество молодежи» (г. Анжеро-Судженск, 15-16 апреля 2005 г.);

7. IV Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование» (г. Анжеро-Судженск, 18-19 ноября 2005 г.),

а также на научных семинарах кафедры математической кибернетики математического факультета Кемеровского государственного университета.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы из 59 наименований. Общий объем работы составляет 155 страниц, в том числе основной текст – 145 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность проблемы, сформулирована цель диссертационного исследования, определена научная новизна, теоретическая и практическая ценность результатов, приведен краткий обзор и анализ существующих моделей рынка труда, описана методология исследования и изложены основные результаты работы.

В первой главе рассматриваются математические модели рынка труда региона как совокупность оптимизационных задач его участников и в виде бескоалиционной игры $n+m$ лиц, рассматриваются соответствующие им концепции равновесия.

В § 1 полагаем, что целью фирмы i, $i=1,\dots,n$, является максимизация прибыли, определяемой как разность между выручкой $\langle p, y^i\rangle$ от продажи продукции в количествах y^i и издержками производства $\langle z^i, u^i\rangle + \mu K^i$, где z_k^i – почасовая цена (оплата) труда по виду труда k на фирме i, u_k^i – трудовые ресурсы на фирме i по k-му виду труда, $\mu > 0$ – цена капитала (доля изнашивания основных фондов), $K^i > 0$ – основные фонды фирмы i. Технологический процесс в модели фирмы – работодателя описывается с помощью производственной функции $f^i(u^i, K^i)$. Сумма выплаченной заработной платы $\langle z^i, u^i\rangle$ и платы за капитал μK^i не превышает фиксированной величины Z^i (фонда затрат на факторы производства). Кроме того, трудовые ресурсы u_k^i не превышают количества вакантных мест a_k^i на фирме i по k-му виду труда. С учетом выше сказанного задача фирмы, как участника рынка труда, формализована с помощью следующей оптимизационной модели:

$$P_1^i(u^i, K^i) = \langle p, y^i\rangle - \langle z^i, u^i\rangle - \mu K^i \to \max \qquad (1)$$

при ограничениях

$$y^i = f^i(u^i, K^i), \qquad (2)$$

$$\langle z^i, u^i\rangle + \mu K^i \le Z^i, \quad 0 \le u_k^i \le a_k^i, \quad k = 1,\dots,l. \qquad (3)$$

Задачу i-ой фирмы (1)-(3) обозначим символом $\mathcal{F}_1^i$.

Допустимое решение u^{i*}, при котором достигается максимум в (1), будем называть оптимальным решением задачи $\mathcal{F}_1^i$.

При формализации задачи индивида предполагается, что целью каждого индивида j, $j=1,\dots,m$, является максимизация прибыли как разности между заработанными средствами $\sum_{i=1}^{n}\langle z^i, v^{ij}\rangle$ и затратами $\langle p, x^j\rangle$ на потребление товаров в количествах x^j. Потребление индивида описывается вектор-функцией $h^j(v^j, p)$, где $v^{ij}=(v_1^{ij},\dots,v_l^{ij})$, v_k^{ij} – трудовые ресурсы индивида j по k-му виду труда, направленные на фирму i. Доход индивида, складывающийся из его заработной платы, средств $\langle p, b^j\rangle$ от продажи начального запаса товаров и доли $\sum_{i=1}^{n}\alpha^{ij}P^i$ от прибыли фирм, не меньше суммы $\langle p, c^j\rangle$, необходимой для достижения им определенного уровня благосостояния. Суммарное время работы индивида $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}v_k^{ij}$ не превышает свободного времени ϑ^j, имеющегося в его распоряжении. С учетом этих предположений задача j-го индивида формализуется с помощью следующей модели:

$$P_2^j(v^j, x^j)=\sum_{i=1}^{n}\langle z^i, v^{ij}\rangle-\langle p, x^j\rangle\to\max \qquad (4)$$

при ограничениях

$$x^j=h^j(v^j, p), \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\langle z^i, v^{ij}\rangle+\sum_{i=1}^{n}\alpha^{ij}P^i+\langle p, b^j\rangle\geq\langle p, c^j\rangle, \qquad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}v_k^{ij}\leq\vartheta^j,\ v_k^{ij}\geq 0,\quad k=1,\dots,l,\quad i=1,\dots,n. \qquad (7)$$

Обозначим задачу j-го индивида (4)-(7) символом $\mathcal{F}_2^j$.

Допустимое решение v^{j*}, при котором достигается максимум в (4), будем называть оптимальным решением задачи $\mathcal{F}_2^j$.

Рассматривая задачи $\mathcal{F}_1^i$, $i=1,\dots,n$, и $\mathcal{F}_2^j$, $j=1,\dots,m$, содержащие общие ценовые $z=\{z^i, i=1,\dots,n\}$ и другие параметры, воедино, получаем статистическую модель рынка труда региона

$$\mathrm{M}=\langle\ \{\mathcal{F}_1^i\}_{i=1}^{n},\ \{\mathcal{F}_2^j\}_{j=1}^{m}\ \rangle. \qquad (8)$$

Для фиксированных $p\in R_+^q$ и k числа

$$u_k^*(z)=u_k^*(z,p)=\sum_{i=1}^{n}u_k^{i*}(z^i,p),\quad v_k^*(z)=v_k^*(z,p)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}v_k^{ij*}(z,p),$$

являющиеся решением оптимизационных задач (1)-(3) и (4)-(7), называются совокупным (рыночным) спросом и совокупным (рыночным) предложением по k-му виду труда, соответствующие набору цен труда $z=\{z^i, i=1,\dots,n\}$.

Совокупность $(u^{1*},\dots,u^{n*},v^{1*},\dots,v^{m*},z^*)$ называется равновесным по Вальрасу состоянием рынка труда M, а $z^*=\{z^{i*}, i=1,\dots,n\}$ – набором равновесных цен, если выполняются равенства

$$u_k^*(z^*)=v_k^*(z^*)\ \text{для всех}\ k=1,\dots,l. \qquad (9)$$

Очевидно, что в условиях равновесия по Вальрасу все фирмы имеют желаемое количество трудовых ресурсов, все индивиды реализовывают свои предложения, и все участники рынка добиваются намеченной цели – максимизации своей прибыли. Поэтому ни у кого из участников рынка нет основания для отклонения от равновесного состояния, т.е. выбора иных решений, чем те, которые образуют

равновесие.

Доказано, что на рынке труда м существует равновесное состояние, если в задачах $\mathcal{F}_1^i$, $i=1,...,n$, $\mathcal{F}_2^j$, $j=1,...,m$, выполнены следующие условия:

1) производственные функции f_s^i, $s=1,...,q$, непрерывны по u^i и K^i $(i=1,...,n)$; функции потребления h_s^j, $s=1,...,q$, непрерывны по v^j $(j=1,...,m)$;

2) функции спроса u^{i^*}, $i=1,...,n$, и функции предложения v^{j^*}, $j=1,...,m$, непрерывны по z^i и z соответственно;

3) оплата труда, основные фонды и производственные затраты индексируются пропорционально повышению цен на товары потребления;

4) для всех $j=1,...,m$ справедливы неравенства

$$\langle p,c^j\rangle-\langle p,b^j\rangle-\sum_{i=1}^{n}\alpha^{ij}P^i\le\vartheta^j z_k^i,\quad k=1,...,l;\ i=1,...,n. \qquad (10)$$

Первые два условия теоремы имеют технический характер. Третье условие говорит о защищенности финансовых средств от инфляции. Четвертое условие ограничивает сверху «выходное пособие» индивида достаточно большими средствами. Таким образом, в целом, условия существования равновесия на рынке труда достаточно прозрачны и реалистичны.

После того как построены оптимизационные задачи участников рынка труда, в которых во внимание принимались лишь собственные трудовые ресурсы участников рынка труда, возникает вопрос об изучении того же рынка труда с учетом пересечения интересов фирм и индивидов. Обоснованием выбора такого подхода является наличие на рынке труда тех элементов и принципов, которые методологически схожи с конфликтными ситуациями, изучаемыми в рамках математической теории игр.

Конфликтность принятия решений участниками объясняется признаками конкурентного рынка труда. Для достижения своих целей на рынке труда каждая из сторон оперирует своей стратегией: фирмы нанимают работников на имеющиеся вакантные должности; индивиды распоряжаются распределением своих трудовых ресурсов согласно своей профессии и квалификации. Пересечение интересов всех участников рынка труда формально отражается в зависимости величин их прибылей от стратегий всех участников. Действительно, во-первых, оплата труда зависит от вида труда и от квалификации работника; во-вторых, по законам рынка, чем выше спрос по профессии k, тем выше цены z_k^i для всех $i=1,...,n$.

Таким образом, $z_k^i=z_k^i(u_k)=z_k^i(u_k^1,...,u_k^n)$, $\dfrac{\partial z_k^i}{\partial u_k}>0$, $k=1,...,l$, $i=1,...,n$.

Аналогично, чем меньше предложение на нужную профессию k, тем выше цены z_k^i для всех $i=1,...,n$. Поэтому мы можем заключить, что оплата труда z_k^i для любых k и i, кроме прочих других факторов, зависит от трудовых ресурсов v_k: $z_k^i=z_k^i(v_k)=z_k^i(v_k^1,...,v_k^m)$, $\dfrac{\partial z_k^i}{\partial v_k}<0$, $k=1,...,l$, $i=1,...,n$.

Поэтому для изучения взаимоотношений между всеми участниками рынка труда естественно рассматривать функциональные зависимости

$$z_k^i=z_k^i(u_k^1,...,u_k^n;v_k^1,...,v_k^m),\quad k=1,...,l,\quad i=1,...,n.$$

В § 2 при построении теоретико-игровых моделей взаимодействия в разных группах участников рынка труда различаются следующие функциональные зависимости целевых функций (для фиксированных K^i и x^j):

– для фирм – работодателей –

$$P_1^i = P_1^i(u^1,...,u^n), \quad i=1,...,n; \qquad (11)$$

– для индивидов – наемных работников) –

$$P_2^j = P_2^j(v^1,...,v^m), \quad j=1,...,m; \qquad (12)$$

– для всех участников рынка труда –

$$P_1^i = P_1^i(u^1,...,u^n;v^1,...,v^m), \quad i=1,...,n; \qquad (13)$$

$$P_2^j = P_2^j(u^1,...,u^n;v^1,...,v^m), \quad j=1,...,m. \qquad (14)$$

С учетом зависимостей (13)-(14) на основе моделей $\mathcal{F}_1^i$, $i=1,...,n$, $\mathcal{F}_2^j$, $j=1,...,m$, строится нормальная форма бескоалиционной игры $n+m$ лиц в виде:

$$\Gamma = \left\langle N, \{U^s\}_{s\in N}, \{P^s\}_{s\in N} \right\rangle,$$

где $N=\{1,...,n+m\}$ – множество игроков, U^s – множество чистых стратегий, а P^s – функция выигрыша игрока s, $s=1,...,n+m$, причем

$$U^s = \begin{cases} U_1^s, & \text{если } s\in N_1, \\ U_2^s, & \text{если } s\in N_2; \end{cases} \quad P^s = \begin{cases} P_1^s, & \text{если } s\in N_1, \\ P_2^s, & \text{если } s\in N_2. \end{cases}$$

В обозначениях этой игры задача s-го игрока выглядит так:

$$P^s(u^1,...,u^{n+m}) =$$

$$= \begin{cases} \left\langle p, f^s(u^s,K^s)\right\rangle - \left\langle z^s(u^1,...,u^{n+m}),u^s\right\rangle - \mu K^s \to \max, \text{ если } s=1,...,n; \\ \sum_{i=1}^{n}\left\langle z^i(u^1,...,u^{n+m}),v^{is}\right\rangle - \left\langle p, h^s(v^s,p)\right\rangle \to \max, \text{ если } s=n+1,...,n+m \end{cases} \qquad (15)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \left\langle z^s(u^1,...,u^{n+m}),u^s\right\rangle + \mu K^s \le Z^s,\ 0\le u_k^s \le a_k^s, k=1,...,l, \text{ если } s=1,...,n; \\ \sum_{i=1}^{n}\left\langle z^i(u^1,...,u^{n+m}),v^{is}\right\rangle + \sum_{i=1}^{n}\alpha^{is}P_1^i + \left\langle p,b^s\right\rangle \ge \left\langle p,c^s\right\rangle, \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} v_k^{is} \le \vartheta^s,\ v_k^{is}\ge 0,\ k=1,...,l,\ i=1,...,n, \text{ если } s=n+1, \end{cases} \qquad (16)$$

Здесь $u^s=(u^{1s},...,u^{ns})$, $u^{is}=(u_1^{is},...,u_l^{is})$.

Наряду с игрой Γ, для изучения конкуренции между фирмами, определена бескоалиционная игра n лиц

$$\Gamma_1 = \left\langle N_1, \{U_1^i\}_{i\in N_1}, \{P_1^i\}_{i\in N_1} \right\rangle,$$

а для изучения конкуренции между индивидами – наемными работниками – бескоалиционная игра m лиц

$$\Gamma_2 = \left\langle N_2, \{U_2^j\}_{j\in N_2}, \{P_2^i\}_{j\in N_2} \right\rangle.$$

В § 3 изучены ситуации равновесия по Нэшу в играх Γ_1, Γ_2 и Γ.

Ситуация $u^*=(u^{1*},...,u^{n+m*})\in U_1^1\times...\times U_1^{n+m}$ называется равновесием по Нэшу в игре Γ, если для каждого $s\in N$ и любой стратегии $u^s\in U^s$ выполняется неравенство $P^s(u^*)\ge P^s(u^*\|u^s)$, где $(u^*\|u^s)=\left(u^{1^*},...,u^{i-s^*},u^s,u^{s+1^*},...,u^{n+m^*}\right)$.

Превосходство ситуации u^* над ситуацией $u^*\|\tilde{u}^s$ для фирмы s, $s=1,..,n$ означает, что все «лучшие» (с точки зрения определенных критериев каждой фирмы) кадры разобраны другими фирмами. Невыгодность уклонения от такой ситуации равновесия для индивида s, $s=n+1,..,n+m$ может означать, что в рамках оставшихся (после выбора стратегий v^{e*} $(e\ne s)$ остальными индивидами) вакансий фирм нет стратегии $v^s\in U^s$ «лучшей», чем $v^{s\,*}$.

Установлено, что если в игре Γ существует ситуация равновесия по Нэшу $u^*=(u^{1*},...,u^{n+m*})$, тогда в играх Γ_1 и Γ_2 существуют ситуации равновесия по Нэшу, являющиеся двумя составными частями ситуации u^*: $(u^{1*},...,u^{n*})$ и $(u^{n+1*},...,u^{n+m*})$. Кроме того, если Γ – игра с полной информацией, то в играх Γ, Γ_1, Γ_2 существуют ситуации

равновесия.

Доказаны также следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть в каждой из игр Γ_1 и Γ_2 существует ситуация равновесия и на рынке труда каждая фирма имеет полную информацию обо всех индивидах, а каждый индивид имеет полную информацию обо всех фирмах. Тогда в игре Γ существует ситуация равновесия. Если при этом ситуации равновесия в играх Γ_1 и Γ_2 единственные, то в игре Γ существует ситуация равновесия, состоящая из этих двух ситуаций, как из составных частей.

Пусть в каждой из $n+m$ задач (15)-(16) существует единственная точка максимума. Ситуация $u^* = (u^{1*},...,u^{n+m*}) \in U^1 \times ... \times U^{n+m}$ является равновесной по Нэшу в игре Γ тогда и только тогда, когда она имеет полную информацию и каждый вектор u^{s*}, $s = 1,...,n+m$, есть точка максимума задач (15)-(16).

Теорема 2. Пусть в задачах (15)-(16) функция f^s строго вогнута, функция z^s выпукла по $u^s \in U^s$, $s = 1,...,n$; функция z^i строго вогнута, функция h^s выпукла по $u^s \in U^s$, $s = n+1,...,n+m$. Тогда ситуация $u^* = (u^{1*},...,u^{n+m*}) \in U^1 \times ... \times U^{n+m}$ в Γ является равновесной по Нэшу тогда и только тогда, когда выполнены равенства

$$p \left.\frac{\partial f^s}{\partial u^s}\right|_{u^s = u^{s*}} = \left.\left(u^s \frac{\partial z^s}{\partial u^s} + z^s \right)\right|_{u^s = u^{s*}}, \quad s = 1,...,n;$$

$$p \left.\frac{\partial h^s}{\partial v^s}\right|_{v^s = v^{s*}} = \left.\left(v^{is} \frac{\partial z^i}{\partial v^s} + z^s \right)\right|_{v^s = v^{s*}}, \quad s = n+1,...,n+m, \quad i = 1,...,n.$$

Теорема 2 уточняет общее экономическое положение о стремлении оплаты труда к величине предельного продукта и говорит о том, что в состоянии равновесия по Нэшу цена любого вида труда равна стоимости предельного продукта за вычетом предельной почасовой оплаты.

В § 4 рынок труда проанализирован с использованием олигополистического подхода. Рассмотрены равновесия Курно и Штакельберга для фирм – работодателей. Приведен пример вычисления описанных равновесий в дуополии фирм.

В § 5, с использованием результатов § 1-4, проведен сравнительный анализ условий существования экономического (по Вальрасу), теоретико-игрового (по Нэшу) и олигополистических равновесий (по Курно и Штакельбергу) на рынке труда.

В § 6 рассматриваются вопросы вычисления равновесных по Нэшу оплат труда в игре Γ.

Теорема 3. Если в бескоалиционной игре Γ между участниками рынка труда существует единственная ситуация равновесия по Нэшу, то она вычисляется по формулам

$$u^{s*} = \frac{Z^s - \mu K^s}{z^{s*}}, \quad s = 1,...,n,$$

$$u^{s*} = \frac{\langle p, c^s \rangle - \sum_{i=1}^{n} \alpha^{is} P_1^i - \langle p, b^s \rangle}{z^{s*}}, \quad s = n+1,...,n+m, \quad i = 1,...,n,$$

а соответствующий вектор цен труда – по формулам

$$z^{s*} = -u^{s*} \left.\frac{\partial z^s}{\partial u^s}\right|_{u^s = u^{s*}}, \quad s = 1,...,n,$$

$$z^{s*} = -v^{is} \left.\frac{\partial z^i}{\partial v^s}\right|_{v^s = v^{s*}}, \quad s = n+1,...,n+m, \quad i = 1,...,n.$$

Таким образом, ситуация равновесия по Нэшу для всех фирм – работодателей и всех индивидов – наемных работников вычисляется исходя из условия равенства средних и предельных оплат труда.

Приводятся алгоритмы и блок-схемы вычисления оплаты труда, соответствующей ситуации равновесия в играх между фирмами и между индивидами.

Вторая глава посвящена изучению рынка труда региона в виде кооперативной игры. В ней найдены условия существования, а также необходимые и достаточные признаки распределения трудовых ресурсов, соответствующих дележам из *c*-ядра и компонентам вектора Шепли.

Характеристическая функция υ игры (15)-(16) построена как отображение, ставящее в соответствие каждой коалиции S значение $val\,\Gamma_{S/N\setminus S}$ соответствующей антагонистической игры между S и остальными игроками. Предполагая существования таких значений для разных сегментов рынка труда и обозначая оптимальные (минимаксные) стратегии верхними черточками, характеристическую функцию игры (15)-(16) можно представить так:

$$\upsilon(S)=\begin{cases} val\,\Gamma^1_{S/N_1\setminus S}=\max\limits_{u^S\in U_1^S}\ \min\limits_{u^{N_1\setminus S}\in U_1^{N_1\setminus S}} P_1^S(u^S,\ u^{N_1\setminus S})=P_1^S(\bar{u}^S,\ \bar{u}^{N_1\setminus S}),\quad \text{если}\quad S\subset N_1;\\ val\,\Gamma^2_{S/N_2\setminus S}=\max\limits_{v^S\in U_2^S}\ \min\limits_{v^{N_2\setminus S}\in U_2^{N_2\setminus S}} P_2^S(v^S,\ v^{N_2\setminus S})=P_2^S(\bar{v}^S,\ \bar{v}^{N_2\setminus S}),\quad \text{если}\quad S\subset N_2;\\ val\,\Gamma^3_{S/N\setminus S}=\max\limits_{\eta^S\in U^S}\ \min\limits_{\eta^{N\setminus S}\in U^{N\setminus S}}\left[\sum\limits_{i\in S\cap N_1} P_1^i(u^1,\dots,u^n)+\sum\limits_{j\in S\cap N_2} P_2^j(v^1,\dots,v^m)\right]=\\ =\sum\limits_{i\in S\cap N_1} P_1^i(\bar{u}^1,\dots,\bar{u}^n)+\sum\limits_{j\in S\cap N_2} P_2^j(\bar{v}^1,\dots,\bar{v}^m),\quad \text{если}\quad S:S\cap N_1\neq\varnothing,\quad S\cap N_2\neq\varnothing;\\ P^{N_1}(\hat{u}^{N_1})+P^{N_2}(\hat{v}^{N_2}),\quad \text{если}\ S=N;\\ 0,\quad \text{если}\quad S=\varnothing. \end{cases}$$

Показано, что такая характеристическая функция обладает свойством супераддитивности.

Кооперативная игра в форме характеристической функции $\Gamma_\upsilon=\langle N,\upsilon\rangle$ представляет собой математическую модель рассматриваемого рынка труда в случае возможности и выгодности образования коалиций, т. е. сговора, объединения усилий, обмена информацией и принятия совместных решений их участниками.

Наряду с общей кооперативной игрой Γ_υ всех участников рынка труда исследовались две ее подигры: $\Gamma_{\upsilon_1}=\langle N_1,\upsilon_1\rangle$ – кооперативная игра между фирмами и $\Gamma_{\upsilon_2}=\langle N_2,\upsilon_2\rangle$ – кооперативная игра между индивидами, в которых характеристические функции υ_1 и υ_2 определены аналогично характеристической функции υ.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 4. Для того, чтобы дележ $\xi\in E(\upsilon)$ принадлежал c-ядру $C(\upsilon)$ игры Γ_υ, необходимо и достаточно выполнения для всех собственных коалиций $S\subset N$ неравенств

$$\sum_{i\in S}\xi_i\geq P_1^S\left(\bar{u}^S,\ \bar{u}^{N_1\setminus S}\right),\ \text{если}\ S\subset N_1; \qquad (17)$$

$$\sum_{j\in S}\xi_j\geq P_2^S\left(\bar{v}^S,\ \bar{v}^{N_2\setminus S}\right),\ \text{если}\ S\subset N_2; \qquad (18)$$

$$\sum_{j\in S}\xi_j\geq \sum_{i\in S\cap N_1} P_1^i(\bar{u}^1,\dots,\bar{u}^n)+\sum_{j\in S\cap N_2} P_2^j(\bar{v}^1,\dots,\bar{v}^m),\quad \text{если}\quad S:S\cap N_1\neq\varnothing,\quad S\cap N_2\neq\varnothing. \qquad (19)$$

Данная теорема указывает на способ нахождения c-ядра на рынке труда.

Теорема 5. c-ядро игры Γ_υ не пусто тогда и только тогда, когда для любой коалиции S из сбалансированного множества 2^N в этой игре выполняются неравенства

$$\sum_{S\in 2^{N_1}} \beta_S P_1^S(\bar{u}^S, \bar{u}^{N_1\setminus S}) \le P^{N_1}\left(\hat{u}^{N_1}\right), \text{ если } S\subset N_1; \qquad (20)$$

$$\sum_{S\in 2^{N_2}} \beta_S P_2^S(\bar{v}^S, \bar{v}^{N_2\setminus S}) \le P^{N_2}\left(\hat{v}^{N_2}\right), \text{ если } S\subset N_2; \qquad (21)$$

$$\sum_{S\in 2^N} \beta_S \left[P_1^S(\tilde{u}^S, \tilde{u}^{N_1\setminus S}) + P_2^S(\tilde{v}^S, \tilde{v}^{N_2\setminus S})\right] \le P^{N_1}\left(\hat{u}^{N_1}\right) + P^{N_2}\left(\hat{v}^{N_2}\right), \qquad (22)$$

$$\text{если } S: S\cap N_1 \ne \varnothing,\ : S\cap N_2 \ne \varnothing.$$

Показано, что вектор выигрыша в бескоалиционной игре Γ, определяемый ситуацией равновесия по Нэшу, не принадлежит c-ядру $C(\upsilon)$ кооперативной игры Γ_υ.

В кооперативной игре Γ_υ всех участников рынка труда построен вектор Шепли

$$\Phi(\upsilon) = \left(\Phi_1(\upsilon),\ \ldots,\ \Phi_{n+m}(\upsilon)\right),$$

компоненты которого есть априори вычисленные ожидаемые значения прибылей фирм – работодателей и индивидов – наемных работников:

$$\Phi_i(\upsilon) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{S\subset N\\ (i\in S)}} \dfrac{(n-s)!(s-1)!}{n!}\left[P_1^S\left(\bar{u}^S, \bar{u}^{N_1\setminus S}\right) - P_1^{S\setminus i}\left(\bar{u}^{S\setminus i}, \bar{u}^{N_1\setminus (S\setminus i)}\right)\right], & \text{если } S\subset N_1; \\ \sum\limits_{\substack{S\subset N\\ (i\in S)}} \dfrac{(m-s)!(s-1)!}{m!}\left[P_2^S(\bar{v}^S, \bar{v}^{N_2\setminus S}) - P_2^{S\setminus i}(\bar{v}^{S\setminus i}, \bar{v}^{N_2\setminus (S\setminus i)})\right], & \text{если } S\subset N_2; \\ \sum\limits_{\substack{S\subset N\\ (i\in S)}} \dfrac{(n+m-s)!(s-1)!}{(n+m)!}\left[P_1^S(\tilde{u}^S, \tilde{u}^{N_1\setminus S}) + P_2^S(\tilde{v}^S, \tilde{v}^{N_2\setminus S})\right], \\ \text{если } S: S\cap N_1 \ne \varnothing,\ : S\cap N_2 \ne \varnothing. \end{cases}$$

Вектор Шепли является дележом и если для всех $S, R\subset N$, таких, что $S\setminus R\ne\varnothing$, $R\setminus S\ne\varnothing$, выполнены неравенства

$$P_1^S(\bar{u}^S,\ \bar{u}^{N_1\setminus S}) + P_1^R(\bar{u}^R,\ \bar{u}^{N_1\setminus R}) < P_1^{S\cup R}\left(\bar{u}^{S\cup R},\ \bar{u}^{N_1\setminus (S\cup R)}\right) + P_1^{S\cap R}\left(\bar{u}^{S\cap R},\ \bar{u}^{N_1\setminus (S\cap R)}\right),$$

$$\text{если}\quad S,\ R\subset N_1;$$

$$P_2^S(\bar{v}^S,\ \bar{v}^{N_2\setminus S}) + P_2^R(\bar{v}^R,\ \bar{v}^{N_2\setminus R}) < P_2^{S\cup R}\left(\bar{v}^{S\cup R},\ \bar{v}^{N_2\setminus (S\cup R)}\right) + P_2^{S\cap R}\left(\bar{v}^{S\cap R},\ \bar{v}^{N_2\setminus (S\cap R)}\right),$$

$$\text{если}\quad S,\ R\subset N_2;$$

$$\sum_{i\in S\cap N_1} P_1^i(\vartheta^{\gamma}_1,\ldots,\vartheta^{\gamma}_n) + \sum_{j\in S\cap N_2} P_2^j(\vartheta^{\gamma}_1,\ldots,\vartheta^{\gamma}_n) + \sum_{i\in R\cap N_1} P_1^i(\vartheta^{\gamma}_1,\ldots,\vartheta^{\gamma}_n) + \sum_{j\in R\cap N_2} P_2^j(\vartheta^{\gamma}_1,\ldots,\vartheta^{\gamma}_n) <$$

$$< \sum_{i\in (S\cup R)\cap N_1} P_1^i(\vartheta^{\gamma}_1,\ldots,\vartheta^{\gamma}_n) + \sum_{j\in (S\cup R)\cap N_2} P_2^j(\vartheta^{\gamma}_1,\ldots,\vartheta^{\gamma}_n) + \sum_{i\in (S\cup R)\cap N_1} P_1^i(\vartheta^{\gamma}_1,\ldots,\vartheta^{\gamma}_n) + \sum_{j\in (S\cup R)\cap N_2} P_2^j(\vartheta^{\gamma}_1,\ldots,\vartheta^{\gamma}_n),$$

$$\text{если}\quad S, R:\ S\cap N_1\ne\varnothing,\ S\cap N_2\ne\varnothing,\ R\cap N_1\ne\varnothing,\ R\cap N_2\ne\varnothing,$$

то вектор Шепли является центром тяжести c-ядра.

Аналогичные вопросы относительно c-ядра и вектора Шепли исследованы в кооперативных играх между фирмами – работодателями (Γ_{υ_1}) и индивидами – наемными работниками (Γ_{υ_2}).

В третьей главе построена динамическая модель рынка труда с дискретным временем, исследованы вопросы динамической устойчивости ситуаций равновесия по Вальрасу, Нэшу, c-ядра и вектора Шепли в различных моделях рынка труда.

В § 1 построена динамическая модель рынка труда в виде совокупности задач оптимального управления на дискретном интервале времени $[0,T]$.

Задача оптимального управления фирмы i имеет вид:

$$u_i^t = u_i^{t-1} + \varphi_i^t, \quad t = 1,\ldots,T; \qquad (23)$$

$$u_i^0 = \left(u_{i1}^0,\ldots,u_{il}^0\right); \qquad (24)$$

$$-u_i^{t-1} \le \varphi_i^t \le a_i^t - u_i^{t-1}, \quad t = 1,\ldots,T; \qquad (25)$$

$$\left\langle z_i^t, u_i^t \right\rangle + \mu^t K_i^t \le Z_i^t, \quad t = 0,1,...,T; \tag{26}$$

$$u_i^t \ge 0, \quad t = 0,1,...,T \tag{27}$$

$$\sum_{t=0}^{T} \left[\left\langle p^t,\ f_i(u_i^t,\ K_i^t) \right\rangle - \left\langle z_i^t,\ u_i^t \right\rangle - \mu^t K_i^t \right] \to \max, \tag{28}$$

где $\varphi_i^t = \left(\varphi_{i1}^t, ..., \varphi_{il}^t\right)$ – управляющий параметр (в момент времени t) фирмы i: $\varphi_{ik}^t \ge 0$ – увеличение трудовых ресурсов (в часах) по k-му виду труда в момент t (прием на работу); $\varphi_{ik}^t < 0$ – уменьшение трудовых ресурсов (в часах) по k-му виду труда в момент t (увольнение с работы).

Допустимым управлением фирмы i на отрезке $[0,T]$ называется любая последовательность $\varphi_i(\cdot) = \left(\varphi_i^1, ..., \varphi_i^T\right)$, удовлетворяющая условию (25). Множество всех допустимых управлений фирмы i обозначим Φ_i. Последовательность $u_i(\cdot)$, удовлетворяющая фазовым ограничениям (26)-(27), называется допустимой траекторией фирмы i, соответствующей допустимому управлению $\varphi_i(\cdot)$.

Допустимое управление $\varphi_i^*(\cdot) \in \Phi_i$ называется оптимальным управлением i-ой фирмы, если вдоль соответствующей ей допустимой траектории $u_i^*(\cdot) = \left\{u_i^0, u_i^{1*}, ..., u_i^{T*}\right\}$ системы (23)-(24) достигается максимальное значение функционала качества. В этом случае траектория $u_i^*(\cdot)$ называется оптимальной траекторией фирмы i.

Задача оптимального управления индивида j имеет вид:

$$v_j^t = v_j^{t-1} + \psi_j^t, \quad t = 1,...,T; \tag{29}$$

$$v_j^0 = \left(v_{j1}^0, ..., v_{jl}^0\right); \tag{30}$$

$$-v_j^{t-1} \le \psi_j^t \le \vartheta_j^t - v_j^{t-1}, \quad t = 1,...,T; \tag{31}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\langle z_i^t, v_j^t \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}^t P_{1i}^t + \left\langle p^t, b_j^t \right\rangle \ge \left\langle p^t, c_j^t \right\rangle, \quad t = 0,1,...,T; \tag{32}$$

$$v_j^t \ge 0, \quad t = 0,1,...,T \tag{33}$$

$$\sum_{t=0}^{T} \left[\sum_{i=1}^{n} \left\langle z_i^t, v_j^t \right\rangle - \left\langle p^t, h_j(v_j^t, p^t) \right\rangle \right] \to \max, \tag{34}$$

где $\psi_j^t = \left(\psi_{j1}^t, ..., \psi_{jl}^t\right)$ – управляющий параметр (в момент времени t) индивида j: $\psi_{jk}^{it} \ge 0$ – соответствует увеличению трудовых ресурсов индивидом j по k-му виду труда на фирме i в момент времени t; $\psi_{jk}^{it} < 0$ – соответствует уменьшению трудовых ресурсов индивида j по k-му виду труда на фирме i в момент времени t.

Допустимым управлением индивида j на отрезке $[0,T]$ называется любая последовательность $\psi_j(\cdot) = \left(\psi_j^1, ..., \psi_j^T\right)$, удовлетворяющая условиям (31). Множество всех допустимых управлений j-го индивида обозначим Ψ_j. Последовательность $v_j(\cdot)$, удовлетворяющую фазовым ограничениям (32)-(33), называется допустимой траекторией индивида j, соответствующей допустимому управлению $\psi_j(\cdot)$.

Допустимое управление $\psi_j^*(\cdot) \in \Psi_j$ называется оптимальным управлением j-го индивида в задаче (29)-(34), если вдоль соответствующей ей допустимой траектории $v_j^*(\cdot) = \left\{v_j^0, v_j^{1*}, ..., v_j^{T*}\right\}$ системы (29)-(30) достигается максимальное значение функционала качества (34). В этом случае траектория $v_j^*(\cdot)$ называется оптимальной траекторией индивида j.

Построим множество

$$\Phi_i^t = \left\{ \varphi_i^t:\ \varphi_i^t = \sum_{\xi=1}^{l+1} \sigma_\xi \vartheta_{i\xi}^t - u_i^{t-1},\ \sum_{\xi=1}^{l+1} \sigma_\xi = 1,\ \sigma_\xi \ge 0 \right\},$$

состоящее из всех управляющих параметров φ_i^t, удовлетворяющих неравенствам (25)-(27), и составим следующую задачу оптимального управления:

$$u_i^t = u_i^{t-1} + \varphi_i^t, \quad t = 1,...,T; \tag{35}$$

$$u_i^0 = \left(u_{i1}^0,...,u_{il}^0\right); \tag{36}$$

$$\varphi_i^t \in \Phi_i^t, \quad t = 1,...,T \tag{37}$$

$$\sum_{t=0}^{T}\left[\left\langle p^t,\ f_i(u_i^t,\ K_i^t)\right\rangle - \left\langle z_i^t,\ u_i^t\right\rangle - \mu^t K_i^t\right] \to \max, \tag{38}$$

которую обозначим символом $\mathcal{F}_{1i}^{[0,T]}$.

Доказывается, что если в задаче i-ой фирмы (23)-(28) в любой момент времени фонд оплаты труда неотрицателен

$$Z_i^t - \mu^t K_i^t \ge 0, \ t = 0,1,...,T,$$

тогда исходная задача (23)-(28) эквивалентна задаче оптимального управления (35)-(38) без фазовых ограничений.

Построим множество

$$\Psi_j^t = \left\{\psi_j^t:\ \psi_j^t = \sum_{\xi=1}^{l+1}\delta_\xi \vartheta_{j\xi}^0 - v_j^{t-1},\ \sum_{\xi=1}^{l+1}\delta_\xi = 1,\ \delta_\xi \ge 0\right\}.$$

Множество Ψ_j^t состоит из всех управляющих параметров ψ_j^t, которые удовлетворяют неравенствам (31)-(33). Составим следующую задачу оптимального управления:

$$v_j^t = v_j^{t-1} + \psi_j^t, \quad t = 1,...,T; \tag{39}$$

$$v_j^0 = \left(v_{j1}^0,...,v_{jl}^0\right); \tag{40}$$

$$\psi_j^t \in \Psi_j^t, \quad t = 1,...,T \tag{41}$$

$$\sum_{t=0}^{T}\left[\sum_{i=1}^{n}\left\langle z_i^t, v_j^t\right\rangle - \left\langle p^t, h_j(v_j^t, p^t)\right\rangle\right] \to \max, \tag{42}$$

которую обозначим символом $\mathcal{F}_{2j}^{[0,T]}$.

Доказывается, что если в задаче j-го индивида (29)-(34) в любой момент времени t выполнено условие

$$\left\langle p^t,\ c_j^t\right\rangle - \left\langle p^t,\ b_j^t\right\rangle - \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}^t P_{1i}^t \le \vartheta_j^t \max_k z_k^t, \quad t = 0,1,...,T,$$

тогда исходная задача (29)-(34) эквивалентна задаче оптимального управления (39)-(42) без фазовых ограничений.

Рассматривая воедино (35)-(38) и (39)-(42), мы получаем динамическую модель рынка труда:

$$\mathrm{M}^{[0,T]} = \left\langle \left\{\mathcal{F}_{1i}^{[0,T]}\right\}_{i=1}^{n}, \left\{\mathcal{F}_{2j}^{[0,T]}\right\}_{j=1}^{m}\right\rangle.$$

Спросом на трудовые ресурсы i-ой фирмы – работодателя в текущем состоянии $u_i^t = \left\{u_{i1}^t,\ ...,u_{il}^t\right\}$ называется вектор

$$u_{iC}^t = \left(\max\left\{0,\ u_{i1}^{t*} - u_{i1}^t\right\},...,\max\left\{0,\ u_{il}^{t*} - u_{il}^t\right\}\right).$$

Предложением трудовых ресурсов i-ой фирмы – работодателя в текущем состоянии $u_i^t = \left\{u_{i1}^t,\ ...,u_{il}^t\right\}$ называется вектор

$$u_{iH}^t = \left(\max\left\{0,\ u_{i1}^t - u_{i1}^{t*}\right\},...,\max\left\{0,\ u_{il}^t - u_{il}^{t*}\right\}\right).$$

Предложением трудовых ресурсов j-го индивида – наемного работника в текущем состоянии $v_j^t = \left\{v_{j1}^t,\ ...,v_{jl}^t\right\}$ называется вектор

$$v_{jC}^t = \left(\max\left\{0,\ v_{j1}^{t*} - v_{j1}^t\right\},...,\max\left\{0,\ v_{jl}^{t*} - v_{jl}^t\right\}\right).$$

Дополнительным спросом на трудовые ресурсы, инициированным j-ым индивидом – наемным работником в текущем состоянии $v_j^t = \{v_{j1}^t, ..., v_{jl}^t\}$ называется вектор

$$v_{jC}^t = \left(\max\{0, v_{j1}^t - u_{j1}^{*t}\}, ..., \max\{0, v_{jl}^t - v_{jl}^{t*}\}\right).$$

Векторы

$$C^t(u^t, v^t, z^t) = \sum_{i=1}^{n} u_{iП}^t + \sum_{i=1}^{n} v_{iC}^t, \quad П^t(u^t, v^t, z^t) = \sum_{j=1}^{m} u_{jП}^t + \sum_{j=1}^{m} v_{jП}^t$$

называются соответственно рыночным спросом и рыночным предложением в текущем состоянии (u^t, v^t) рынка труда $М^{[0,T]}$.

Будем говорить, что на рынке $М^{[0,T]}$ существует равновесие по Вальрасу, если существует такая последовательность векторов

$$\{u_1^{t*}, ..., u_n^{t*}, v_1^{t*}, ..., v_m^{t*}, z^{t*}\}_{t=0}^{T},$$

для которой для каждого допустимого состояния (u^t, v^t) в момент времени t, $t = 0,1,...,T$, выполнено равенство:

$$\sum_{t=0}^{T} C^t(u^{t*}, v^{t*}, z^{t*}) = \sum_{t=0}^{T} П^t(u^{t*}, v^{t*}, z^{t*}).$$

В этом случае траекторию $\{u^*(\cdot), v^*(\cdot), z^*(\cdot)\}$ будем называть равновесной траекторией на рынке труда $М^{[0,T]}$. Рассматривается также понятие ε-равновесия по Вальрасу.

В § 2 установлена справедливость следующих утверждений.

1) пусть в задаче i-ой фирмы (23)-(28) в любой момент времени фонд оплаты труда неотрицателен $Z_i^t - \mu^t K_i^t \geq 0$, $t = 0,1,...,T$, производственные функции f_i, $i = 1,...,n$ непрерывны по u_i^t и K_i^t, тогда задача оптимального управления (35)-(38) разрешима;

2) пусть в задаче j-го индивида (29)-(34) выполнено условие $B_j^t = \langle p^t, c_j^t \rangle - \langle p^t, b_j^t \rangle - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}^t P_{1i}^t \leq \vartheta_j^t \max_k z_k^t$, $t = 0,1,...,T$, функции потребления h_j, $i = 1,...,n$ непрерывны по v_j^t и p^t, тогда задача оптимального управления (39)-(42) разрешима.

На основе моделей (35)-(38) и (39)-(42) определена бескоалиционная многошаговая игра $n+m$ лиц в нормальной форме

$$\Gamma(\eta^0, T) = \left\langle \Sigma(\eta^0, T), \{W_s\}_{s=1}^{n+m}, \{P_s\}_{s=1}^{n+m} \right\rangle$$

на интервале времени $[0,T]$ ($\Sigma(\eta^0, T)$ – символическое обозначение системы (43)-(44)):

$$\eta_s^t = \eta_s^{t-1} + \omega_s^t, \quad s = 1,...,n+m, \quad t = 1,...,T; \tag{43}$$

$$\eta_s^0 = (\eta_{s1}^0, ..., \eta_{sl}^0), \quad s = 1,...,n+m, \quad t = 1,...,T; \tag{44}$$

$$\omega_s^t \in W_s^t, \quad s = 1,...,n+m, \quad t = 1,...,T \tag{45}$$

$$P_s(\eta_s^0, \omega_1(\cdot), ..., \omega_{n+m}(\cdot)) \to \max, \quad s = 1,...,n+m, \tag{46}$$

где для всех $t = 1,...,T$

$$\omega_s^t = \begin{cases} \varphi_s^t, & \text{если} \quad s \in N_1, \\ \psi_s^t, & \text{если} \quad s \in N_2, \end{cases} \qquad \omega_s(\cdot) = \begin{cases} \varphi_s(\cdot), & \text{если} \quad s \in N_1, \\ \psi_s(\cdot), & \text{если} \quad s \in N_2, \end{cases}$$

$$W_s^t = \begin{cases} \Phi_s^t, & \text{если} \quad s \in N_1, \\ \Psi_s^t, & \text{если} \quad s \in N_2, \end{cases} \qquad P_s(\cdot) = \begin{cases} P_{1s}(\cdot), & \text{если} \quad s \in N_1, \\ P_{2s}(\cdot), & \text{если} \quad s \in N_2. \end{cases}$$

Последовательность $\omega_s(\cdot) = \{\omega_s^1, ..., \omega_s^T\}$, элементы которой удовлетворяют условиям (45) будем называть допустимой стратегией игрока s в игре $\Gamma(\eta^0, T)$. Множество всех допустимых стратегий игрока s обозначим через $W_s = W_s^1 \times ... \times W_s^T$, $s = 1,...,n+m$.

Для изучения конкуренции отдельно между фирмами – работодателями, а также между индивидами – наемными работниками определены две динамические

подигры: бескоалиционная игра n лиц $\Gamma_1(u^0,T)$ (между фирмами) и бескоалиционная игра m лиц $\Gamma_2(v^0,T)$ (между индивидами).

Принцип, определяющий оптимальное поведение участников рынка труда (43)-(46), в общем случае обозначим символом Q (например, принцип равновесия по Нэшу, Вальрасу, c-ядра, вектора Шепли и др.).

Вдоль траектории $\eta^*(\cdot)$, «оптимальной» в смысле выбранного принципа Q, погрузим исходную модель $\Gamma(\eta^0,T)$ в семейство аналогичных игр

$$\{\Gamma(\eta^{t*},T-t),\ t=0,1,...,T\},$$

где η^{t*} – сечение траектории $\eta^*(\cdot)$ в момент t. Текущая игра $\Gamma(\eta^{t*},T-t)$ отличается от исходной игры $\Gamma(\eta^0,T)$ лишь начальным состоянием и продолжительностью.

Пусть Q – принцип равновесия по Нэшу, а $\omega^*(\cdot)=(\omega_1^*(\cdot),...,\omega_{n+m}^*(\cdot))$ – любая ситуация равновесия по Нэшу в игре $\Gamma(\eta^0,T)$.

Принцип равновесия по Нэшу называется динамически устойчивым в игре $\Gamma(\eta^0,T)$, если для любых $\omega_s(\cdot)\big|_{[t,T]}\in \mathrm{W}_s\big|_{[t,T]}$ и любого $s=1,...,n+m$ выполняются неравенства

$$P_s\left(\eta^{t*},\omega^*(\cdot)\big|_{[t,T]}\right)\geq P_s\left(\eta^{t*},\omega^*(\cdot)\big|_{[t,T]}\|\ \omega_s(\cdot)\big|_{[t,T]}\right),\ t=1,...,T-1,$$

где $\omega_s(\cdot)\big|_{[t,T]}$, $\mathrm{W}_s\big|_{[t,T]}$ – сужения стратегии $\omega_s(\cdot)$ и множества стратегий W_s игрока s на отрезке $[t,T]$, а $\eta^*(\cdot)$ – траектория системы (43)-(44), соответствующая ситуации $\omega^*(\cdot)$.

Теорема 6. Для того, чтобы в бескоалиционной игре $\Gamma(\eta^0,T)$ ситуация равновесия $\omega^*(\cdot)$ по Нэшу была динамически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы $|Q(\eta^{t*},T-t)|=1$ для всех $t=0,1,...,T$, где $|Q(\cdot)|$ – мощность множества $Q(\cdot)$.

Аналогичные утверждения справедливы и для подигр $\Gamma_1(u^0,T)$, $\Gamma_2(v^0,T)$.

Если же Q является принципом равновесия по Вальрасу в модели (23)-(28), (29)-(34) то, его динамическая устойчивость означает существование такой равновесной по Вальрасу траектории $(u^*(\cdot),v^*(\cdot),z^*(\cdot))$, что для любого $t=0,1,...,T$

$$\sum_{\tau=t}^{T}C^{\tau}\left(u^{\tau*},v^{\tau*},z^{\tau*}\right)=\sum_{\tau=t}^{T}\Pi^{\tau}\left(u^{\tau*},v^{\tau*},z^{\tau*}\right).$$

Теорема 7. Для того, чтобы в модели (23)-(28), (29)-(34) рынка труда равновесие по Вальрасу $(u^{t*}(\cdot),v^{t*}(\cdot),z^{t*}(\cdot))$ было динамически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы

$$Q\left(\left(u^{t*},v^{t*},z^{t*}\right),T-t\right)\neq\varnothing$$

для всех $t=0,1,...,T$.

В § 3 на основе игры $\Gamma(\eta^0,T)$ определена динамическая кооперативная игра $n+m$ игроков

$$\Gamma_{\upsilon}\left(\eta^0,T\right)=\left\langle\Sigma\left(\eta^0,T\right),N,\upsilon\right\rangle.$$

на рынке труда в форме характеристической функции.

Исследована динамическая устойчивость c-ядра и вектора Шепли в игре $\Gamma(\eta^0,T)$.

Теорема 8. c-ядро в игре $\Gamma_{\upsilon}(\eta^0,T)$ является динамически устойчивым тогда и только тогда, когда в каждый момент $t=0,1,...,T$ существует вектор $\lambda^T=(\lambda_1^t,...,\lambda_{n+m}^t)$ такой, что

$$\sum_{s\in S}\lambda_s^t\geq\alpha^t(S)[\alpha^t(N)]^{-1}\ \text{ для всех }\ t=0,1,...,T,$$

где $\alpha^t(S)=\overline{\upsilon}(S,T-t)-\sum_{s\in S}\overline{\upsilon}(s,T-t)$.

Теорема 9. Вектор Шепли

$$\Phi(\eta^0,T)=\left\{\Phi_s(\eta^0,T)=\sum_{\substack{S\subseteq N\\(i\in S)}}\gamma^S(n+m)\left[\upsilon(S,\eta^0,T)-\upsilon(S\setminus s,\eta^0,T)\right],s=1,\ldots,n+m\right\}$$

динамически устойчив в кооперативной модели $\Gamma_\upsilon(\eta^0,T)$ рынка труда, где $\gamma^S(n+m)=\frac{((n+m)!-|S|)!(|S|-1)!}{(n+m)!}$ – постоянный коэффициент вектора Шепли в игре $\Gamma_\upsilon(\eta^0,T)$.

Аналогичные теоремам 8 и 9 результаты получены и в подыграх $\Gamma_{\upsilon_1}=\langle N_1,\upsilon_1\rangle$ между фирмами – работодателями и $\Gamma_{\upsilon_2}=\langle N_2,\upsilon_2\rangle$ между индивидами – наемными работниками.

Условия теорем имеют достаточно реалистичную с практической точки зрения интерпретацию на языке рынка труда региона.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Яковлева, Н.М. Об одной математической модели рынка труда, учитывающей временные факторы [Текст] / Н.Н. Данилов, Н.М. Яковлева // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование». – Томск: Изд-во «Твердыня», 2002. С.92-94.
2. Яковлева, Н.М. Об одной модели равновесия на рынке труда, учитывающей рабочее и досуговое время [Текст] / Н.М. Яковлева // Обработка данных и управление в сложных системах: Сборник статей / Под ред. А.Ф. Терпугова. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 212-221.
3. Яковлева, Н.М. Математическая модель равновесия на рынке труда [Текст] / Н.М. Яковлева // Наука и образование: Материалы Всероссийской научной конференции: В 4 ч. / Кемеровский государственный университет. Беловский институт (филиал). – Белово: Беловский полиграфист, 2003 С. 589-595.
4. Яковлева, Н.М. Необходимое условие позиционной динамической устойчивости оптимальных решений в задачах конфликтного управления [Текст] / Н.Н. Данилов, Е.А. Смолин, Н.М. Яковлева // Вестник КемГУ. Математика. 2004 №1 (17). С.15-20.
5. Яковлева, Н.М. Применение принципа равновесия по Нэшу в качестве нормативного поведения на рынке труда [Текст] / Н.М. Яковлева // Научное творчество молодежи: Материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции (16-17 апреля 2004 г.) Ч.1. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. С. 70-73.
6. Яковлева, Н.М. Формализация рынка труда региона посредствам бескоалиционной игры [Текст] / Н.М. Яковлева // Информационные технологии и математическое моделирование: Материалы III Всероссийской научно-практической конференции (11-12 декабря 2004 г.) Ч.2. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. С. 168-171.
7. Яковлева, Н.М. Моделирование рынка труда в виде игры в форме характеристической функции [Текст] / Н.М. Яковлева // Информационные технологии и математическое моделирование: Материалы III Всероссийской научно-практической конференции (11-12 декабря 2004 г.) Ч.2. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. С. 166-168.
8. Яковлева, Н.М. Существование состояния равновесия по Вальрасу в региональной модели рынка труда [Текст] / Н.Н. Данилов, Н.М. Яковлева //

Обработка данных и управление в сложных системах: Сборник статей / Под ред. А.Ф. Терпугова. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2005. – Вып. 7. С.92-101.

9. Яковлева, Н.М. Исследование равновесия по Нэшу в теоретико-игровых моделях участников рынка труда [Текст] / Н.М. Яковлева // Научное творчество молодежи: Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции (15-16 апреля 2005 г.). – Ч. 1. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2005. С. 56-58.

10. Яковлева, Н.М. Сравнительный анализ ситуаций равновесия в математической модели рынка труда [Текст] / Н.М. Яковлева // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2005): Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции (18-19 ноября 2005 г.). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2005. Ч.2. С.122-124.

11. Яковлева, Н.М. Вычисление равновесной по Нэшу оплаты труда в теоретико-игровой модели рынка труда [Текст] / Н.М. Яковлева // Приложение Вестника ТГУ: «Материалы международных, всероссийских и региональных научных конференций, симпозиумов, школ, проводимых в ТГУ». Серия «Математика. Кибернетика. Информатика». – №16. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. С. 239-246.