На правах рукописи

ЧИСТЯКОВ Денис Сергеевич

ЭНДОМОРФИЗМЫ И БЛИЗКИЕ ИМ ОТОБРАЖЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП И МОДУЛЕЙ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Томск — 2006

Работа выполнена в Нижегородском государственном педагогическом университете на кафедре алгебры и геометрии

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Себельдин Анатолий Михайлович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Чехлов Андрей Ростиславович

кандидат физико-математических наук, доцент
Подберезина Елена Ивановна

Ведущая организация: Московский педагогический государственный университет

Защита диссертации состоится „____“ _____ 2006 года в ____ часов на заседании диссертационного совета К212.267.05 при Томском государственном университете по адресу: 634050, Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Томского государственного университета

Автореферат разослан „_____“ _____ 2006 года

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент _____ Малютина А.Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Абелевы группы составляют один из важнейших классов групп, и их теория достаточно хорошо разработана. Глубокие структурные результаты были получены Прюфером, Ульмом, Куликовым для периодических абелевых групп, что позволяет решать многие задачи для этого класса абелевых групп. Иное положение для абелевых групп без кручения. Даже для групп без кручения конечного ранга не известно никакой удобной полной системы инвариантов. Начало теории абелевых групп без кручения положили работы Понтрягина [12], Мальцева [10], Куроша [7], Куликова [6], Дэрри [33].

Серьезное влияние на развитие теории абелевых групп оказала монография Л. Фукса [26] — [27]. Результаты последних лет, касающиеся связей абелевых групп и их колец эндоморфизмов, можно найти в книге Крылова П.А., Михалева А.В., Туганбаева А.А. [5].

Важнейшей задачей теории абелевых групп является поиск точных соотношений между абелевой группой и ее кольцом эндоморфизмов, в частности, какое влияние оказывает кольцевая структура кольца эндоморфизмов на соответствующие группы. Имеется ряд классов колец, строение которых достаточно хорошо изучено. Можно было бы исследовать их роль как колец эндоморфизмов. Эта программа была предложена Селе [41] и послужила началом многочисленных исследований в этом направлении. Значительных успехов в рассмотрении связей между свойствами группы и свойствами ее кольца эндоморфизмов достигли Шульц, Альбрехт, Рангсвами, Иванов, Крылов и другие авторы (см. [5], [26], [27]).

Представляет интерес вопрос о взаимоотношении абелевой группы и центра ее кольца эндоморфизмов. Ясно, что центр кольца эндоморфизмов дает, вообще говоря, меньше сведений о группе, чем ее кольцо эндоморфизмов. Несмотря на этот факт в данном направлении также получен ряд интересных результатов.

Например, центр кольца эндоморфизмов абелевой p-группы состоит из умножений на целые p-адические числа или на вычеты по модулю p^k в зависимости от того, является ли эта группа неограниченной или p^k служит наименьшей верхней гранью порядков ее элементов [27].

Оказывается, что для большинства абелевых групп факт принадлежности некоторого отображения группы в себя центру кольца эндоморфизмов следует из перестановочности данного отображения со всеми

эндоморфизмами группы. При этом абелева группа рассматривается как левый модуль над своим кольцом эндоморфизмов. Абелевы группы, обладающие этим свойством, будем называть эндоморфными. Изучению эндоморфных модулей над произвольным кольцом посвящены работы [34] — [36].

К изучению центра кольца эндоморфизмов абелевых групп можно подойти с другой стороны.

Известный результат Бэра и Капланского [27, теорема 108.1.] об определяемости периодических абелевых групп своим кольцом эндоморфизмов в классе периодических групп положил начало многочисленным исследованиям в этом направлении. Классы абелевых групп, в которых имеет место теорема Бэра — Капланского, А.М. Себельдин называет EI-классами и описывает один достаточно широкий EI-класс. Заметим, что класс всех групп без кручения таковым не является. Об определяемости групп их кольцами эндоморфизмов см. также [15] — [19].

Такой же вопрос, как для кольца эндоморфизмов $E(A)$ группы A, стоит для его мультипликативной полугруппы $E^{\bullet}(A)$, называемой полугруппой эндоморфизмов группы A. Проблему определяемости абелевых групп их мультипликативными полугруппами рассматривали Пуусемп ([13], [14]) и Себельдин (см., например, [20]). В связи с вышеуказанным представляется естественным изучать вопрос определяемости абелевых групп центром их кольца эндоморфизмов.

А.В. Михалев указал на важную роль мультипликативных свойств в структурной теории колец (т.е. свойств, выразимых в языке мультипликативной полугруппы кольца). С этой точки зрения особый интерес представляет вопрос о том, когда все мультипликативные изоморфизмы кольца являются кольцевыми изоморфизмами [11]. Такие кольца называются кольцами с однозначным сложением, или кратко UA-кольцами (см. [11], [37], [42]).

Обобщением понятия UA-кольца служит понятие UA-модуля или модуля с однозначным сложением. Для такого модуля все взаимно однозначные отображения, коммутирующие с элементами кольца, в любой другой модуль над этим же кольцом являются изоморфизмами модулей. Основные результаты по данной теме можно найти в работе [38]. Согласно определению, на аддитивной группе UA-модуля невозможно задать новое сложение, не изменяя при этом правила умножения элементов кольца на элементы группы.

Работа посвящена поиску эндоморфных групп в некоторых известных классах абелевых групп, описанию групп, которые являются UA-модулями над кольцом целых чисел и кольцом эндоморфизмов, а также решению близких вопросов.

Цель работы: исследовать абелевы группы, которые являются UA-модулями над своим кольцом эндоморфизмов, кольцом целых чисел, описать эндоморфные абелевы группы, рассмотреть вопрос определяемости абелевой группы центром ее кольца эндоморфизмов в некоторых классах абелевых групп.

Научная новизна: все результаты диссертации являются новыми. В работе:

1. Найдены все абелевы группы, которые являютсяUA-модулями над кольцом целых чисел.

2. Описаны все эндоморфные абелевы группы без кручения ранга 2 и 3, показано, что любая периодическая группа, а также любая сепарабельная группа без кручения является эндоморфной.

3. Исследуется вопрос определяемости абелевых групп центром своего кольца эндоморфизмов в различных классах абелевых групп.

Практическая и теоретическая ценность. Работа имеет теоретическое значение. Результаты работы могут быть использованы при изучении взаимосвязей абелевой группы и ее кольца эндоморфизмов, центра кольца эндоморфизмов.

Апробация результатов. Основные результаты настоящей диссертации докладывались на международной конференции „Мальцевские чтения“ (Новосибирск, 2004 г.), на симпозиуме по теории абелевых групп (Бийск, 2005, 2006 г.), на алгебраических семинарах МПГУ (март, 2005 г.), ТГУ (май, 2005 г., октябрь, 2006 г.), НГПУ, на Нижегородской сессии молодых ученых (Саров, 2003 - 2006 гг.).

Публикации. Основное содержание диссертации отражено в 7 публикациях ([44] — [50]). В совместных работах [46], [47], [50] постановка задачи и выбор метода исследования принадлежит О.В. Любимцеву, в работе [48] — А.М. Себельдину. Диссертанту принадлежат формулировки и доказательства всех теорем.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, трех глав, списка литературы, списка обозначений. Глава I содержит пять параграфов, глава II — три параграфа, глава III — два параграфа. Работа изложена на 81 странице.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Далее под словом „группа“ понимается „абелева группа“. Все кольца, рассматриваемые в работе, — ассоциативные с 1.

Во введении обосновывается актуальность выбранного направления исследования, приводится краткий обзор работ по теме диссертации и смежным вопросам, а также кратко излагаются полученные в диссертации результаты.

В специальном разделе собраны основные определения и некоторые известные результаты, используемые в работе.

Первая глава посвящена эндоморфным группам.

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей и V, W — унитарные левые R-модули. Множество

$$M_R(V,W) = \{f : V \to W | f(rx) = rf(x), r \in R, x \in V\}$$

является почтикольцом относительно операций сложения и композиции отображений.

Элементы множества $M_R(V,W)$ называются *R-однородными отображениями*. Если $V = W$, то вместо $M_R(V,V)$ будем писать $M_R(V)$.

Ясно, что множество $M_R(V)$ содержит кольцо $E_R(V)$ всех эндоморфизмов R-модуля V.

R-модуль V *эндоморфен*, если

$$M_R(V) = E_R(V)([35]).$$

Абелева группа называется *эндоморфной*, если она является эндоморфным модулем над своим кольцом эндоморфизмов. Понятно, что в этом случае

$$M_{E(G)}(G) = Z(E(G)).$$

Лемма 10. *Пусть $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ — абелева группа и все слагаемые G_i $(i \in I)$ эндоморфны. Тогда группа G эндоморфна.*

В первом параграфе доказывается, что всякая периодическая группа, а также любая сепарабельная группа без кручения являются эндоморфными. В доказательстве этого существенно используется лемма 10, которая, в первом случае позволяет перейти к примарным компонентам группы, а во втором — к прямым слагаемым ранга 1. Стоит отметить, что при доказательстве самой леммы 10 решающую роль играет наличие в кольце эндоморфизмов группы, являющейся прямой суммой эндоморфных групп, полной ортогональной системы идемпотентов (проекций на прямые слагаемые) и тот факт, что всякое однородное отображение переводит прямое слагаемое группы в себя. Вообще говоря, лемма 10 служит достаточно сильным инструментом при доказательстве многих утверждений диссертации. Например, из данной леммы и теорем 1.1. и 1.2. сразу следует, что абелева группа является эндоморфной, если ее редуцированная часть эндоморфна. Или, расщепляющаяся абелева группа эндоморфна, если ее часть без кручения эндоморфна.

Теорема 1.1. *Сепарабельные группы без кручения эндоморфны.*

Теорема 1.2. *Периодические группы эндоморфны.*

Следствие 1.3. *Если редуцированная часть $R(G)$ группы*

$$G = R(G) \bigoplus D(G)$$

является эндоморфной группой, то группа G эндоморфна.

Следствие 1.4. *Смешанная расщепляющаяся группа эндоморфна, если ее часть без кручения эндоморфна.*

Второй параграф целиком посвящен группам без кручения конечного ранга. Здесь доказываются общие утверждения для групп данного класса. Например, свойство эндоморфности группы сохраняется при переходе к квазиравной группе. Более того, квазиравные группы имеют квазиравные почтикольца E-однородных отображений (теорема 1.5.). Из этого факта, а также теоремы 1.1. следует, что почти вполне разложимые группы без кручения эндоморфны. Особый интерес здесь вызывает теорема 1.7., поскольку она охватывает достаточно большой класс групп — сильно неразложимых абелевых групп без кручения конечного ранга, совпадающих со своим обобщенным псевдоцоколем, и позволяет описать еще больший класс — класс неприводимых групп конечного ранга.

Теорема 1.5. *Пусть A и B — квазиравные группы без кручения и A — эндоморфная группа. Тогда группа B эндоморфна.*

Следствие 1.6. *Почти вполне разложимые группы эндоморфны.*

Теорема 1.7. *Пусть G — сильно неразложимая группа без кручения конечного ранга и $G = Soc\ G$. Группа G эндоморфна тогда и только тогда, когда G неприводима.*

Следствие 1.8. *Неприводимые группы без кручения конечного ранга эндоморфны.*

В третьем параграфе описываются эндоморфные группы без кручения ранга 2. При этом существенно используется описание таких групп и их колец квазиэндоморфизмов, полученное Арнольдом [31]. Оказывается, что жесткие группы без кручения ранга 2 не являются эндоморфными, и только они. Более того, любая жесткая группа ранга больше 1 не является эндоморфной.

Теорема 1.12. *Пусть G — группа без кручения ранга 2.*

Следующие условия эквивалентны:

1) Группа G эндоморфна,

2) Группа G не является жесткой.

В четвертом параграфе исследованию подвергаются абелевы группы без кручения ранга 3. Доказательство основных утверждений данного параграфа опирается на описание колец квазиэндоморфизмов абелевых групп без кручения ранга 3, полученное Чередниковой [28] — [30].

Теорема 1.14. *Пусть G — сильно неразложимая группа без кручения ранга 3 такая, что $G \neq Soc\ G$. Группа G не является эндоморфной тогда и только тогда, когда $dim\mathcal{E}(G) = 2$.*

Теорема 1.22. *Пусть $G = A \bigoplus B$, где A — абелева группа без кручения ранга 1, B — сильно неразложимая группа ранга 2.*

Группа G не является эндоморфной тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:

1. $\mathcal{E}(B) \cong \mathbb{Q}$,
2. $Hom(B, A) = 0$,
3. $r(Hom(A, B)) = 1$ *или* $Hom(A, B) = 0$.

Далее заметим, что результаты параграфов 3 и 4 позволяют провести аналогию со свойством чистоты модулей, понимаемой по П. Кону.

Следствие 1.13. *Абелева группа без кручения ранга 2 эндоморфна тогда и только тогда, когда она является чисто простым или чисто полупростым модулем над своим кольцом эндоморфизмов.*

Следствие 1.15. *Сильно неразложимая абелева группа без кручения ранга 3, не совпадающая со своим псевдоцоколем, эндоморфна тогда и только тогда, когда она не содержит сервантных подмодулей.*

Под эндосвойством группы будем понимать ее свойство как модуля над кольцом эндоморфизмов. Например, эндоартинова группа — это группа, являющаяся артиновым модулем над своим кольцом эндоморфизмов.

Пятый параграф посвящен описанию эндоморфных групп, обладающих некоторым эндосвойством.

Теорема 1.23. *Дистрибутивные модули эндоморфны.*

Следствие 1.24. *Любой неприводимый модуль эндоморфен.*

Следствие 1.25. *Любой цепной модуль эндоморфен.*

Следствия 1.26. — 1.28. вытекают из леммы 10 и теоремы 1.7. настоящей диссертации, а также теоремы 9.2., теоремы 11.4., следствия 11.9. книги [5].

Следствие 1.26. *Эндоартиновы группы эндоморфны.*

Следствие 1.27. *Эндонетеровы группы без кручения конечного ранга эндоморфны.*

Следствие 1.28. *Эндоконечные абелевы группы без кручения с полупервичным кольцом эндоморфизмов эндоморфны.*

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, V — унитарный левый R-модуль. Модуль V называется *модулем с однозначным сложением* (UA-модулем), если невозможно задать новое сложение на множествеV, не изменяя при этом действия кольца R на V.

Во второй главе получено описание абелевых групп, являющихся UA-модулями над кольцом целых чисел, изучаются сепарабельные абелевы группы без кручения и периодические абелевы группы как UA-модули над своим кольцом эндоморфизмов, а также рассматриваются почти вполне разложимые $End - UA$-группы без кручения конечного ранга.

В первом параграфе решается задача отыскания UA-модулей над кольцом целых чисел.

Теорема 2.1. *Пусть A — смешанная абелева группа. $\mathbb{Z}$-модуль A является UA-модулем тогда и только тогда, когда*

$$r_0(A) = 1 \text{ и } T(A) \cong Z(2).$$

Теорема 2.2. *Пусть A — абелева группа без кручения. $\mathbb{Z}$-модуль A является UA-модулем тогда и только тогда, когда $r(A) = 1$.*

Теорема 2.3. *Пусть $A = \bigoplus_{p \in P} A_p$ — периодическая абелева группа. Тогда группа A как $\mathbb{Z}$-модуль является UA-модулем в том и только том случае, если группы A_p неразложимы для всех $p \in P$ или $A_2 \cong Z(2) \bigoplus Z(2)$ и A_p неразложимы для всех $p \in P \backslash \{2\}$.*

Во втором параграфе уделено внимание задаче описания тех абелевых групп, которые являются модулями с однозначным сложением над своим кольцом эндоморфизмов.

Предложение 2.4. *Пусть A и B — абелевы группы, $E = E(A)$ — кольцо эндоморфизмов группы A и $f \in M_E(A, B)$ — E-однородная биекция. Тогда $f(T(A)) = T(B)$, $f(F(A)) = F(B)$.*

Предложение 2.5. *Пусть A — периодическая абелева группа, $E = E(A)$ — кольцо эндоморфизмов группы A, B — произвольная абелева группа и $f \in M_E(A, B)$ — E-однородная биекция. Тогда группа B является периодической, причем $P(A) = P(B)$.*

Следствие 2.6. *1. Периодические абелевы группы являются модулями с однозначным сложением над своим кольцом эндоморфизмов;*

2. Сепарабельные абелевы группы без кручения являются модулями с однозначным сложением над своим кольцом эндоморфизмов.

Напомним, что кольцо R называется *кольцом с однозначным сложением* (UA-кольцом), если на его мультипликативной полугруппе $(R, *)$ можно задать единственную бинарную операцию $+$, превращающую ее в кольцо $(R, *, +)$. Заметим, что кольцо R будет UA-кольцом тогда и только тогда, когда любой изоморфизм мультипликативных полугрупп колец $\alpha : R \to S$ является изоморфизмом колец ([11], [37], [42]).

Абелеву группу, имеющую UA-кольцо эндоморфизмов, мы, следуя [8], [9], будем называть $End - UA$-группой.

В третьем параграфе речь идет о почти вполне разложимых $End - UA$-группах без кручения конечного ранга.

Прямое слагаемое A ранга 1 называется *полусвязанным*, если в его дополнительном прямом слагаемом найдется прямое слагаемое ранга 1, тип которого сравним с типом A. При этом группу, каждое прямое слагаемое ранга 1 которой полусвязано, назовем *полусвязанной*.

Пусть $\Omega(G)$ — множество всех типов прямых слагаемых ранга 1 фиксированного разложения вполне разложимой группы G.

Тип $\tau \in \Omega(G)$ назовем *изолированным*, если никакой другой тип из $\Omega(G)$ не сравним с τ.

Теорема 2.7. *Пусть G — почти вполне разложимая группа без кручения конечного ранга и $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ — ее полное квазиразложение. Тогда G является $End-UA$-группой в том и только том случае, если множество $\Omega(A)$ всех типов квазислагаемых A_i не содержит изолированных типов.*

Следствие 2.8. *Вполне разложимая абелева группа без кручения конечного ранга является $End-UA$-группой в том и только том случае, если множество всех различных типов прямых слагаемых ранга 1 не содержит изолированных типов.*

Следствие 2.9. *Пусть G — почти вполне разложимая группа без кручения и $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ — ее полное квазиразложение. Если множество $\Omega(A)$ не содержит изолированных типов и группа G определяется своим кольцом эндоморфизмов в некотором классе абелевых групп, то она определяется своей полугруппой эндоморфизмов в этом классе.*

В третьей главе рассматривается проблема определяемости абелевой группы центром ее кольца эндоморфизмов.

Будем говорить, что абелева группа $A \in \mathbf{X}$ определяется центром своего кольца эндоморфизмов $E(A)$ в классе абелевых групп $\mathbf{X}$, если всякий раз из изоморфизма $CenE(A) \cong CenE(B)$, где $B \in \mathbf{X}$, следует изоморфизм $A \cong B$. Подкласс класса $\mathbf{X}$ групп, определяющихся центром своего кольца эндоморфизмов в классе абелевых групп $\mathbf{X}$, будем обозначать через $\mathbf{X}(\mathbf{cent})$. Если $\mathbf{X}(\mathbf{cent})$ содержится в нулевом классе (т.е. либо $\mathbf{X}(\mathbf{cent}) = \{0\}$, либо $\mathbf{X}(\mathbf{cent}) = \varnothing$), то класс $\mathbf{X}$ будем называть NC-классом. Другими словами, если некоторый класс $\mathbf{X}$ абелевых групп является NC-классом, то это означает, что для любой группы $G \in \mathbf{X}$ найдется не изоморфная ей группа $H \in \mathbf{X}$ такая, что $CenE(G) \cong CenE(H)$.

Класс $\mathbf{X}$ назовем A-классом, если с каждой группой $A \in \mathbf{X}$ он содержит и прямую сумму ее копий $A_\alpha = \bigoplus_\alpha A$ для любого кардинала α. Класс $\mathbf{X}$ назовем AB-классом, если он не является A-классом, но замкнут относительно конечных прямых сумм, то есть $A, B \in \mathbf{X}$ влечет $A \bigoplus B \in \mathbf{X}$.

Положим $P(A) = \{p \in P | pA = A\}$, где P — множество всех простых чисел.

Через $\mathbf{A}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{F_{cd}}$, $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_n}$, $\mathbf{F_{fr}}$, $\mathbf{S}$ обозначим соответственно классы всех абелевых групп, абелевых групп без кручения, периодических

абелевых групп, вполне разложимых абелевых групп без кручения, абелевых групп без кручения ранга 1, вполне разложимых абелевых групп без кручения фиксированного конечного ранга n, вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного ранга, сепарабельных абелевых групп без кручения.

В первом параграфе изучается вопрос определяемости периодических абелевых групп центром своего кольца эндоморфизмов.

Предложение 3.1. *Любой A-класс является NC-классом.*

Следствие 3.2. *Классы* $\mathbf{A}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{F_{cd}}$, $\mathbf{S}$ *являются NC-классами.*

Теорема 3.3. *Любой AB-подкласс* $\mathbf{L}(\mathbf{AB})$ *класса* $\mathbf{L}$ *является NC-классом.*

Во втором параграфе решается задача определяемости абелевой группы в различных подклассах класса сепарабельных абелевых групп без кручения.

Лемма 3.4. *Пусть G и H — абелевы группы без кручения ранга 1 и $\tau(G) \leq \tau(H)$. Тогда $CenE(G \bigoplus H) \cong E(G)$.*

Лемма 3.5. *Пусть G, H — сепарабельные абелевы группы без кручения, $r(H) = 1$ и тип группы H больше типа любого прямого слагаемого ранга 1 группы G. Тогда центр кольца $E(G \bigoplus H)$ изоморфен подкольцу E кольца $E(H)$, причем $P(E, +) = P(G)$.*

Следствие 3.6. *Если G — сепарабельная абелева группа без кручения, типы прямых слагаемых ранга один которой образуют связанное множество почти делимых типов, то $CenE(G) \cong R$, где R — такое рациональное кольцо, что $P(R, +) = P(G)$.*

Теорема 3.7. *Любые AB-подклассы* $\mathbf{F_{cd}}(\mathbf{AB})$ *класса* $\mathbf{F_{cd}}$ *и* $\mathbf{S}(\mathbf{AB})$ *класса* $\mathbf{S}$ *являются NC-классами.*

Следствие 3.8. *Класс* $\mathbf{F_{fr}}$ *является NC-классом.*

Предложение 3.9. *Группа A принадлежит классу* $\mathbf{F_n}(\mathbf{cent})$, *если она почти делима и все типы прямых слагаемых ранга 1 фиксированного разложения попарно несравнимы, либо она делимая группа.*

Следствие 3.10. *Класс* $\mathbf{F_1}(\mathbf{cent})$ *состоит в точности из почти делимых групп ранга 1.*

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, Себельдину Анатолию Михайловичу, а также Любимцеву Олегу Владимировичу за внимание к работе, поддержку, ценные указания и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айерленд К., Роузен М., Классическое введение в современную теорию чисел, М.: Мир, 1987.

2. Глускин Л.М., Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств // Изв. АН СССР, Сер. Матем., 1959, т. 23, с. 841 - 870

3. Глускин Л.М. Об эндоморфизмах модулей // Алгебра и математическая логика, Киев: КГУ, 1966, с. 3 - 20.

4. Крылов П.А. Классен Е.Д. Центр кольца эндоморфизмов расщепляющейся смешанной абелевой группы // Сиб. матем. журнал, 1999, т. 40, №5, с. 1074 - 1085.

5. Крылов П.А. Михалев А.В., Туганбаев А.А., Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов, Томск. ун-т, 2002.

6. Куликов Л.Я. Подпрямые разложения счетных абелевых групп без кручения // X Всесоюзный алгебр. коллоквиум., Резюме сообщ. и докл., Новосибирск, 1969, т. 1, с. 18 - 19.

7. Курош А.Г. Primitive torsionfreie abelsche Gruppen vom endlichen Range // Ann. of Math., 1937, V. 38, P. 175 - 203.

8. Любимцев О.В. Сепарабельные абелевы группы без кручения сUA-кольцами эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. мат., 1998, т. 4, № 4, с. 1419 - 1422.

9. Любимцев О.В. Периодические абелевы группы сUA-кольцами эндоморфизмов // Матем. заметки, 2001, т. 70, вып. 5, с. 736 - 741.

10. Мальцев А.И. Абелевы группы конечного ранга без кручения // Матем. сб., 1938, т. 4, с. 45 - 68.

11. Михалев А.В. Мультипликативная классификация ассоциативных колец // Мат. сб., 1988, т. 135 (177), №2, с. 210 - 224.

12. Понтрягин Л.С. The theory of topological commutative groups // Ann. Math. 1934, V. 35, P. 361 - 388.

13. Пуусемп П. Об определяемости периодической абелевой группы своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех периодических абелевых групп // Изв. АН Эст. ССР, Физ. Мат., 1980, т. 29, № 3, с. 246 - 253.

14. Пуусемп П. Об определяемости периодической абелевой группы своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп // Изв. АН Эст. ССР, Физ. Мат., 1980, т. 29, № 3, с. 241 - 245.

15. Себельдин А.М., Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов // Матем. заметки, 1972, т. 11, № 4, с. 403 - 408.

16. Себельдин А.М. Полные прямые суммы абелевых групп без кручения ранга 1 с изоморфными группами или кольцами эндоморфизмов, I // Матем. заметки, 1973, т. 14, № 6, с. 867 - 878.

17. Себельдин А.М. Полные прямые суммы абелевых групп без кручения ранга 1 с изоморфными группами или кольцами эндоморфизмов, II // Абелевы группы и модули, Томск. ун-т, 1979, с. 151 - 156.

18. Себельдин А.М. Абелевы группы без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов // Абелевы группы и модули, Томск. ун-т, 1979, с. 157 - 162.

19. Себельдин А.М. Определяемость абелевых групп своими кольцами эндоморфизмов // Абелевы группы и модули, Томск. ун-т, 1989, с. 113 - 123.

20. Себельдин А.М. Определяемость абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов // Абелевы группы и модули, Томск. ун-т, 1991, с. 125 - 133.

21. Тараканов Е.В. Эндодистрибутивные модули над дедекиндовыми кольцами // Абелевы группы и модули, Томск. ун-т, 1990, с. 83 - 107.

22. Турманов М.А. Эндочистые подмодули абелевых групп без кручения ранга 2 // Абелевы группы и модули, Томск. ун-т, 1990, с. 119 - 124.

23. Турманов М.А. О чистоте в абелевых группах // Фундамент. и прикл. математика, 2004, т. 10, № 2, с. 225 - 238.

24. Фомин А.А. Абелевы группы без кручения ранга 3 // Матем. сб., 1989, т. 180, № 9, с. 1155 - 1170.

25. Фомин А.А. Абелевы группы с одним τ-адическим соотношением // Алгебра и логика, 1989, т. 28, № 1, с. 83 - 104.

26. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы, т. 1, М.: Мир, 1974.

27. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы, т. 2, М.: Мир, 1977.

28. Чередникова А.В. Кольца квазиэндоморфизмов абелевых почти вполне разложимых групп без кручения ранга 3 // Абелевы группы и модули, Томск. ун-т, 1996, с. 237 - 242.

29. Чередникова А.В. Кольца квазиэндоморфизмов квазиразложимых абелевых групп без кручения ранга 3 // Абелевы группы и модули, Томск. ун-т, 1996, с. 224 - 236.

30. Чередникова А.В. Кольца квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 3 // Матем. заметки, т. 63, вып. 5, 1998, с. 763 - 773.

31. Arnold D.M. Finite rank torsion free abelian groups and rings. Lecture Notes in Math. V. 931, Berlin: Springer, 1982.

32. Bazzoni S., Metelli C. On abelian torsion free separable groups and their endomorphism rings // Symp. math. 1st. Naz. Alta mat., Fran Severi. 1979, V. 23., Roma, p. 259 - 285.

33. Derry D. Uber eine Klasse von abelschen Gruppen // Proc. London. Math. Soc., 1937, V. 43, p. 490 - 506.

34. Fuchs P., Maxson C.J. and Pilz G. On rings for which homogeneous maps are linear // Proc. Amer. Math. Soc., 1991, V. 112, № 1, p. 1 - 7.

35. Hausen J. and Johnson J.A. Centralizer near-rings that are rings // J. Austr. Math. Soc., 1995, V. 59., p. 173-183.

36. Maxson C.J. and van der Walt A.P.J. Centralizer near-rings over free ring modules // J. Austr. Math. Soc. (Series A), 1991, V. 50., p. 279-296.

37. Nelius Chr. - F., Ringe mit eindentiger Addition, Padeborn, 1974.

38. van der Merwe B. Unique addition modules // Communications in algebra, 1999, V. 27, №9, p. 4103-4115.

39. Reid J.D. On the ring of quasi-endomorphisms of a torsion free group // Topics in abelian groups, Chicago, 1963, p. 51 - 68.

40. Reid J.D. On quasidecompositions of torsion free abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1962, V. 13, p. 550 - 554.

41. Szele T. Gruppentheoretische Beziehungen der Primkorper // Mat. Aineiden Aikakauskirja, 1949, V. 13, p. 80 - 85.

42. Stephenson W. Unique addition rings // Can. J. Math., V. 21, № 6, p. 1455 - 1461.

43. Warfield R. Homomorphisms and duality for torsion free groups // Math. Z., 1968, V. 107, p. 189 - 200.

Работы автора по теме диссертации

44. Чистяков Д.С. Абелевы группы как эндоморфные модули над кольцом $E(G)$ // IIIV Нижегородская сессия молодых ученых. Математические науки: Тезисы докладов. — Н.Н.: Изд. Гладкова О.В. — 2003 — с. 31 - 32.

45. Чистяков Д.С. Определяемость абелевой группы центром ее кольца эндоморфизмов // IX Нижегородская сессия молодых ученых. Математические науки: Тезисы докладов. — Н.Н.: Изд. Гладкова О.В. — 2004 — с. 9 - 10.

46. Любимцев О.В., Чистяков Д.С. Модули с однозначным сложением над кольцом $\mathbb{Z}$ // Абелевы группы: Труды Всероссийского симпозиума — Бийск: РИО БПГУ — 2005 — с. 28 - 29.

47. Чистяков Д.С., Любимцев О.В. Абелевы группы как эндоморфные модули над своим кольцом эндоморфизмов // Абелевы группы: Труды Всероссийского симпозиума — Бийск: РИО БПГУ — 2005 — с. 54 - 55.

48. Себельдин А.М., Чистяков Д.С. Абелевы группы, определяющиеся центром своего кольца эндоморфизмов // Абелевы группы: Труды Всероссийского симпозиума — Бийск: РИО БПГУ — 2006 — с. 34 - 36.

49. Чистяков Д.С. Эндоморфные абелевы группы без кручения ранга 3 // Абелевы группы: Труды Всероссийского симпозиума — Бийск: РИО БПГУ — 2006 — с. 49 - 50.

50. Чистяков Д.С., Любимцев О.В. Абелевы группы как эндоморфные модули над своим кольцом эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. мат., 2006, т. 12, № 7, с. 536 - 540.