На правах рукописи

Колесникова Александрина Владимировна

МГД – модели гемодинамики и движения столбика эритроцитов в переменном магнитном поле

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2007

Работа выполнена в Томском государственном университете

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Бубенчиков Алексей Михайлович

Научный консультант: кандидат физико-математических наук, доцент Корнелик Сергей Евгеньевич

Официальные оппоненты: зам. директора по научной работе НИИ ПММ, доктор физико-математических наук, профессор Глазунов Анатолий Алексеевич
профессор кафедры теоретической механики ТГАСУ, доктор физико-математических наук Матвиенко Олег Викторович

Ведущая организация: Кемеровский государственный университет

Защита состоится 22 февраля 2007 г. в 13^{00} на заседании диссертационного совета Д 212.267.08 при Томском государственном университета по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, корп. 2, ауд. 102.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Отзывы на автореферат, заверенные печатью, просьба высылать по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, Томский государственный университет, ученому секретарю университета.

Автореферат разослан «____» января 2007 г.
Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.267.08
доктор технических наук, профессор А.В. Скворцов

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Метод воздействия магнитным полем на биологические жидкости и, в частности, на кровь находит широкое применение в физиологии и медицине. Однако теоретические основы указанного воздействия изучены недостаточно. Особый интерес вызывает исследования по переменным магнитным полям, позволяющим, например, в несколько раз увеличить интенсивность магнетофоретических явлений.

Первые сведения о магнитных свойствах крови относятся к середине 19 века. Уже в 1845 г. установлена ее диамагнитность. Позже доказан факт о различии магнитных свойств между артериальной и венозной крови. В 50-х годах 20-го века большой толчок в развитии и понимании механизма влияния магнитных полей на кровь дал выдающийся физиолог А.Л. Чижевский. После него этими вопросами занимались А.В. Павлова, Н.Н. Петрова, С.А. Москаленко, В.В. Пирузян, А.С. Кузнецов, А.Г. Кшуташвили, О.П. Накинова, В.П. Плахов, Е.Д. Плеханов, А.А. Попович и многие другие.

Их исследования в области магнитной биологии показывают, что как постоянные, так и переменные магнитные или электромагнитные поля оказывают определенное влияние на самые различные процессы в биологических системах или в живом организме. В подавляющем большинстве случаев эти исследования носят сугубо эмпирический характер. Однако сам факт чувствительности живой природы к магнитным полям неоспорим.

При движении биологических жидкостей в магнитном поле изменения, связанные с гартмановым механизмом воздействия, вследствие сравнительно малых проводимостей и характерных размеров невелики (за исключением крупных сосудов). В тоже время, электрохимические процессы, вызванные индуцированными электрическими токами, могут вызывать существенные изменения в биологической системе.

В настоящее время исследованиями воздействия магнитных полей на живые системы занимаются М.С. Родионов, А.А. Яхновец, Н.А. Слезкин, А.П. Тесло, С.Г. Миролюбов, В. Милнор, С. Смит, Дж. Коул, Дж. Бергель, С. Гольштейн и др. Известны гидродинамические модели крови Пауэла – Эйринга, Карро, Кассона, Кросса и др.

Первые математические модели кровотока строил еще Л. Эйлер в 18-м веке. В 20-м веке многие ученые, такие как А.П. Громека, В.В. Любимов, В.А. Глотов, Т. Педли, В.А. Левтов, Д.М. Дикс, Ф. Дурст и многие другие занимались математическим моделированием течения

крови, как не электропроводящей среды. Далее появились работы А.В. Тананаева, С.А. Регирера, которые рассматривали кровоток как магнитогидродинамический (МГД) процесс. Однако вопросы по влиянию внешних магнитных полей на характер течения и морфологическую структуру крови в этих работах рассмотрены не были.

Таким образом, своевременными и актуальными являются исследования по построению математических моделей воздействия магнитных полей на течение биологических жидкостей и их структуру, а также разработка эффективных методов их численной реализации.

Целью работы является построенные магнитогидродинамической модели кровотока в крупных кровеносных сосудах (аорте, артериях и крупных венах), где для описания динамики крови использована однофазная среда с ньютоновскими реологическими свойствами, а также разработка численной модели движения отдельного эритроцита или столбика эритроцитов.

Основные задачи работы можно сформулировать следующим образом:

1. Разработка МГД–моделей стационарного и пульсирующего кровотока во внешнем переменном магнитном поле.

2. Исследование влияния переменного электромагнитного поля на динамику плазмы и динамику столбика эритроцитов в плоском канале.

3. Выявление особенностей динамики столбика эритроцитов в осесимметричных и «пережатых» сосудах при воздействии переменного электромагнитного поля.

4. Определение параметров переменного электромагнитного поля, обеспечивающего разрушение столбиков эритроцитов.

Научная новизна работы

1. Впервые предложена теория МГД–взаимодействия эритроцитов во внешнем переменном магнитном поле.

2. Разработана математическая модель потока крови, основанная на МГД–взаимодействии эритроцитов, позволяющая учесть специфические свойства крови.

3. На основе разработанной математической модели предложен вычислительный алгоритм решения нестационарных МГД–задач, представляющих динамику плазмы крови в условиях, приближенных к физиологическим.

4. По результатам математического моделирования найдены два принципиально разных режима движения столбиков эритроцитов (гармонический и стохастический) и обнаружены условия, при которых осуществляется их разрушение.

Метод исследования состоит в построении специальных математических моделей динамических потоков крови и теории магнитогидродинамического взаимодействия эритроцитов в сдвиговом потоке крови, отражающих интересующие нас особенности кровотока. Полученные математические представления исследуемых гемодинамических ситуаций разрешались путем использования численных методов, а также путем построения аналитических решений.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Теория МГД–взаимодействия эритроцитов во внешнем переменном магнитном поле, которая включает полученные автором точные уравнения нестационарного автомодельного течения плазмы крови в трубке сложной формы поперечного сечения, динамические и кинематические уравнения Эйлера, определяющие динамику столбика эритроцитов или отдельного эритроцита, а также теорию моментов внешних сил, действующих на столбик в потоке плазмы и составляющих правые части динамических уравнений Эйлера.

2. Математическая модель потока крови и МГД–взаимодействия эритроцитов во внешнем переменном магнитном поле.

3. Вычислительный алгоритм решения нестационарной МГД–задачи, представляющей динамику плазмы крови в условиях, приближенных к физиологическим.

4. Открытие двух новых режимов в динамике столбиков эритроцитов, находящихся во внешнем переменном магнитном поле, и факт существенного снижения продолжительности гармонического режима при увеличении частоты колебаний внешнего магнитного поля.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью математических постановок задач, а также сравнением результатов вычислений с известными аналитическими решениями и экспериментальными данными.

Теоретическая значимость. Впервые разработанная теория магнитогидродинамического движения и взаимодействия эритроцитов в плазме крови, находящейся во внешнем переменном магнитном поле, открывает широкие возможности для развития новых направлений современной электрогемодинамики, в частности, для изучения электрофоретических явлений в крови.

Практическая значимость работы определяется возможностью использования полученных результатов для разработки и внедрения в широкую медицинскую практику устройств по лечению и профилактике заболеваний крови и циркуляционной системы человека с помощью воздействия внешних переменных магнитных полей. Результаты работы также могут быть использованы в биохимии, где

имеет место движение сложных реагирующих гетерогенных сред с образованием конгломератов, находящихся под действием внешних переменных магнитных полей.

Апробация работы. Основные результаты диссертации доложены автором на 3-х международных и одной региональной конференциях в Гомеле, Томске, Снежинске и Новокузнецке. Диссертация в полном объеме была доложена на научном семинаре по гидродинамике д.ф.-м.н. профессора К.Е. Афанасьева (Кемеровский государственный университет). Основные результаты, полученные в диссертации, представлены в опубликованы в 7 работах, в том числе в 2-х журналах из списка ВАК.

Вклад автора. Теория МГД-взаимодействия эритроцитов и динамики потока крови во внешнем переменном магнитном поле разработаны совместно с руководителем. Автор работы самостоятельно разработала вычислительный алгоритм и выполнил численное моделирование, по результатам которого были найдены два новых режима в динамике столбика эритроцитов.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка цитированной литературы. Объем диссертации – 130 с., в том числе 116 с. основного текста с рисунками. Список литературы – 8 с. и содержит 76 названий.

Краткое содержание работы

Во введении сформулированы цель и задачи диссертационного исследования, обоснована актуальность, кратко излагается содержание диссертационной работы по главам.

Первая глава посвящена обзору данных по морфологической структуре крови. Отмечена возможность моделирования кровотока в крупных кровеносных руслах в рамках ньютоновской реологии. Даются элементарные сведения о распределении электрических зарядов по структурным элементам крови и стенок сосудов. Обсуждаются общие вопросы воздействия магнитных полей на кровоток и моделирования указанного воздействия. Представлен раздел, описывающий теоретические модели электропроводности суспензий. Приведены конкретные примеры применения магнитных полей в медицине для целей тромбирования артериальных аневризм головного мозга.

Во второй главе рассмотрены стационарные течения электропроводящей жидкости, включая течение в прямоугольном канале. Применительно к этому случаю обезразмеренные МГД–уравнения можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+Ha\frac{\partial B}{\partial y}=1,\ \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}+Ha\frac{\partial U}{\partial y}=0,$$

Таблица 1

	Разность между аналит. и числ. решениями	Кол-во итераций	Относительная погрешность числ. метода
1	0,1	314	0,01
2	0,01	1134	0,001
3	0,001	1385	0,0005
4	0,005	2035	0,0003
5	0,0001	2439	0,0001

с граничными условиями $U|_{\gamma}=0$, $B|_{\gamma}=0$, где γ – контур поперечного сечения канала.

Решение этой задачи было построено методом конечных разностей с применением итераций по Гауссу – Зейделю. Также было найдено аналитическое решение классическим методом Фурье.

В таблице 1 отражена зависимость сходимости от числа итераций и разность между аналитическим и численным решениями. Данные сравнивались по разрезу расчетных поверхностей плоскостью $x=0$.

Далее представлены точные уравнения магнитной гидродинамики для случая автомодельного течения в трубе произвольного (из класса непрерывных) профиля поперечного сечения, которые имеют следующий вид:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+Ha\left(\cos\theta\frac{\partial B}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial B}{\partial\theta}\right)=-1,$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial B}{\partial r}\right)+Ha\left(\cos\theta\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)=0$$

с граничными условиями

$$r=1, U=0, \frac{\partial B}{\partial r}+\frac{B}{\varphi}=0, \varphi=\frac{\sigma_2\delta}{\sigma_1 R}$$

и условиями, разрешающими особенность в начале полярной системы отсчета:

$$r=0, \frac{1}{l}\oint U dl=U_0, \frac{1}{l}\oint B dl=B_0,$$

где l – элементарный контур, окружающий осевую точку канала; σ_1, σ_2 – проводимости жидкости и материала стенки соответственно; δ – толщина стенки; R – радиус канала. Эти уравнения линейными преобразованиями: $W=U+B$ и $Z=U-B$ были сведены к следующим:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial W}{\partial r}\right)+Ha\left(\cos\theta\frac{\partial W}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)=-1,$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial Z}{\partial r}\right)-Ha\left(\cos\theta\frac{\partial Z}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial Z}{\partial\theta}\right)=-1.$$

Таким образом, решение исходной дифференциальной задачи для U и B свелось к решению уравнений для W и Z. Найдено влияние параметра Ha на МГД–распределения искомых величин. Безразмерный параметр φ, характеризующий проводимость стенки канала, можно рассматривать как параметр связанности получающихся систем разностных уравнений. Как оказалось, от этого параметра существенным образом зависит сходимость итерационного процесса. Здесь же представлены решения задач в канале с частично проводящими стенками и канале сложной формы поперечного сечения. При течении проводящей жидкости в канале с изолированными стенками возникает структура поперечных токов, показанных на рис. 1. Как видим, у стенок канала траектории зарядов загущены (эффект Дж. Гартмана для контурных токов).

Расчеты показывают, что движением жидкости индуцируется такое электромагнитное поле, которое препятствует перемещению жидкости в направлении среднего потока. Если же стенки канала составлены из участков изоляции и проводимости (рис. 2), то траектории зарядов не лежат целиком внутри области течения, а замыкаются на проводящие участки канала. Попадая в эти зоны, заряженные частицы некоторую часть своего пути двигаются внутри канала, а потом начинают обратное по отношению к стенкам перемещение по траекториям, почти перпендикулярным к поверхности канала.

Для случая в канале сложной формы поперечного сечения был выбран контур с пережатой срединной частью, который задается

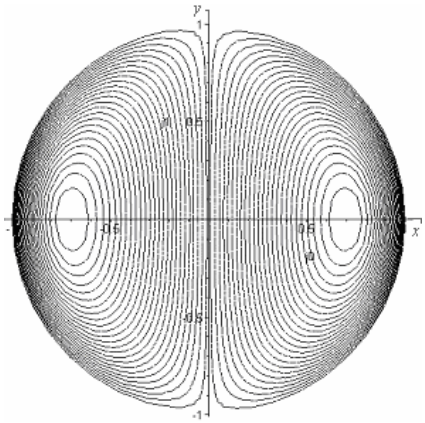

Рис. 1. Траектории движения заряженных частиц (непроводящие стенки)

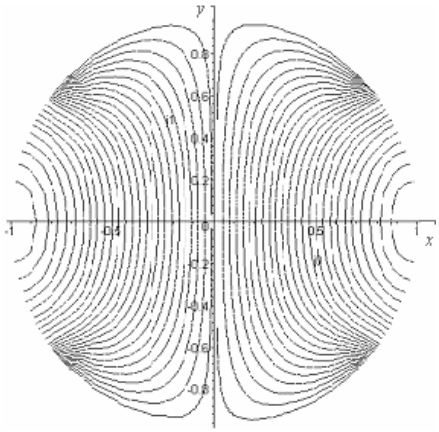

Рис. 2. Траектории движения заряженных частиц (проводящие стенки)

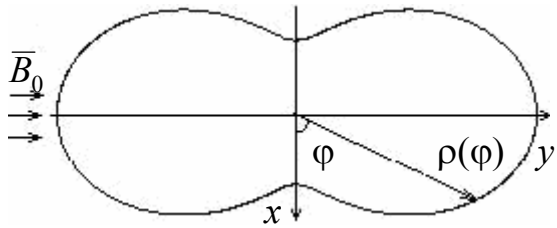

Рис. 3. Контур поперечного сечения

соотношением: $R = 1 - \delta \cos 2\varphi$, где δ – параметр ($0 < \delta \le 1$), характеризующий степень пережатия контура (рис. 3).

Как показывают расчеты, сужение канала генерирует вторую моду колебания магнитного напряжения, имеющую существенно меньшую амплитуду, нежели основная волна. При этом, однако, с увеличением степени пережатия указанная амплитуда растет и уже при $\delta = 0{,}9$ имеем две практически одинаковые волны магнитного напряжения, порождаемые отдельно каждой частью пережатого канала, точнее соответствующими градиентами скорости в этих частях. Скорость жидкости в центре канала остается максимальной до $\delta = 0{,}65$, несмотря на сближение стенок. При дальнейшем увеличении δ под воздействием сил вязкости скорость в центральной части пережатого канала существенно снижается.

Все задачи решены методом конечных разностей с применением итераций по Гауссу – Зейделю. Были выполнены тесты Пуазейля, Буссинеска. Решение задачи с круглым контуром поперечного сечения сравнивалось с аналитическим решением Голда и экспериментальными данными Дж. Гартмана.

В третьей главе изложена теория магнитогидродинамического взаимодействия эритроцитов. Эта теория включает уравнения нестационарного автомодельного течения плазмы крови в трубке сложной формы поперечного сечения, динамические и кинематические уравнения Эйлера, определяющие характер вращения столбика эритроцитов (или отдельного эритроцита) в нестационарном потоке электропроводящей плазмы, а также теорию моментов, составляющих правые части динамических уравнений Эйлера.

Предложенная теория также выписана для относительно простого случая вращения эритроцита (или столбика эритроцита) в плоском канале. Здесь описана методика численного решения задачи, получены результаты, подтверждающие наличие двух режимов в динамике столбика эритроцитов. Далее описана технология решения тех задач, которые не обладают какой-либо симметрией и получены численные результаты применительно к случаю нестационарного течения плазмы в канале сложной формы поперечного сечения.

Уравнения нестационарного автомодельного течения плазмы крови в трубке сложной формы поперечного сечения

Если в качестве характерных масштабов длины, времени, давления, магнитной индукции и скорости выбрать следующие величины:

$$r_* = l_0, t_* = t_0, p_* = \mu \frac{V_0}{R}, B_* = \sigma\mu_0 B_0 V_0 R, U_* = V_0,$$

то безразмерный вид МГД – уравнений, определяющих динамику плазмы крови, будет следующим:

$$Sh\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + Ha^2 f(t)\left(\cos\theta\frac{\partial B}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial B}{\partial \theta}\right) + p'_z$$

$$Sh\,\mathrm{Pr}_m\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial B}{\partial r}\right) + f(t)\left(\cos\theta\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right),$$

где $Ha = l_0 B_0\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^{1/2}$ – число Гартмана, $P\,r_m = \sigma\mu_0\nu \equiv \frac{\nu}{\nu_m}$ – магнитное число Прандтля, $Sh = \frac{\rho l^2{}_0}{\mu t_0}$ – число Струхаля.

Эти уравнения интегрировались при граничных условиях, выражающих собой условия прилипания и сопряжения магнитных полей на границе жидкость-стенка $r = R_w$: $U = 0$, $\varphi\partial B/\partial r + B = 0$, где $\varphi = \sigma_2\delta_2/\sigma_1 R$; σ_1, σ_2 – проводимость жидкости и стенки соответственно; δ_2 – толщина стенки; R – внутренний радиус канала. В качестве начальных условий были взяты стационарные решения приведенных уравнений.

Динамика столбика эритроцитов как недеформируемой системы

Поскольку реально существующие «монетные» столбики являются достаточно малыми по своим размерам, а плотность эритроцита близка к плотности плазмы крови и ускорения в системе не бывают слишком значительными, то целесообразно принять, что центр масс столбика движется вместе с несущей средой, то есть вместе с плазмой крови. Другая же часть движения рассматриваемой недеформируемой системы – ее вращение вокруг центра масс – определяется, как известно, динамическими уравнениями Эйлера:

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = M_\xi^{(e)},\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = M_\eta^{(e)},\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = M_\zeta^{(e)}.$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости на подвижные оси координат, в качестве которых взяты главные оси инерции для центра масс тела (столбика эритроцитов); A, B, C – главные мо-

менты инерции тела для указанного центра; $M_{\xi}^{(e)}, M_{\eta}^{(e)}, M_{\zeta}^{(e)}$ – проекции главного момента внешних сил $M^{(e)}$ на выбранные оси координат.

К определению момента гидродинамического воздействия потока

По физическим вкладам момент внешних сил, входящий в правую часть векторного уравнения момента количества движения, можно разделить на две части: на момент, возникающий от гидродинамического воздействия потока $\overset{\cup}{M}{}^{g}$ и магнитный момент $\overset{\cup}{M}{}^{m}$. В свою очередь, гидродинамический момент $\overset{\cup}{M}{}^{g}$ складывается из момента динамического давления потока $\overset{\cup}{M}{}^{d}$, проявляющегося за счет эффекта «парусности» тела и момента сопротивления трения $\overset{\cup}{M}{}^{f}$.

Таким образом $M^{(e)} = \overset{\cup}{M}{}^{g} + \overset{\cup}{M}{}^{f} = \overset{\cup}{M}{}^{d} + \overset{\cup}{M}{}^{f} + \overset{\cup}{M}{}^{m}$.

Так как в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением незакрученного и автомодельного течения проводящей жидкости, то вектор скорости в каждой точке потока будет всегда направлен параллельно неподвижной оси z. В этом случае не возникает причин, обусловленных наличием динамического давления и вызывающих вращение столбика вокруг оси, параллельной оси z канала, поэтому $M_z^d = 0$. Однако моменты относительно осей, лежащих в плоскости нормального сечения сосуда, в общем случае будут не равны нулю. Удобнее рассчитать эти моменты относительно осей введенной на рис. 4 системы координат Cx_1y_1. Поскольку гидродинамическое давление на отдельные части

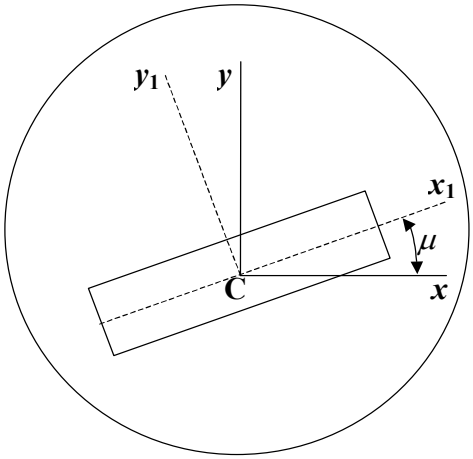

Рис. 4. Схема, определяющая ориентацию столбика эритроцитов по отношению к стационарным направлениям x и y в плоскости нормального сечения сосуда

столбика определяется величиной $\rho(U-U_0)^2$, то упомянутые моменты будут представлены следующими выражениями:

$$M_{x_1}^d = \rho\int_{-h}^{h}\left(\int_{-\delta}^{\delta}(U-U_0)^2 y_1 dy_1\right)dx_1\,, M_{y_1}^d = \rho\int_{-\delta}^{\delta}\left(\int_{-h}^{h}(U-U_0)^2 x_1 dx_1\right)dy_1\,.$$

Здесь ρ – плотность плазмы крови; $h = l/2\cos\theta$; l – длина столбика эритроцитов; δ – радиус эритроцита

Анализ задачи поперечного обтекания цилиндра потоком вязкой жидкости позволяет записать выражение для коэффициента сопротивления трения $c_f = 4\pi/\mathrm{Re}$, где $c_f = 2\tau_w/\rho\Delta u^2$, $\mathrm{Re} = 2\delta\Delta u_\perp/\nu$ и $\Delta u_\perp$ – проекция разности скоростей жидкости и теля на плоскость перпендикулярную к оси цилиндра. Последнее соотношение позволяет принять $\vec{\tau}_w = -\pi/\delta\,\mu\Delta\vec{u}_\perp$.

Тогда $\vec{M}^f = \iint_S[\vec{r},\vec{\tau}_w]dS = \dfrac{\pi\mu}{\delta}\iint_S[\Delta\vec{u}_\perp,\vec{r}]dS$.

В тоже время, мы знаем, что $\Delta\vec{u} = \vec{u} - \vec{u}_M = \vec{u} - \vec{u}_C - [\vec{\omega},\vec{r}_M]$. Здесь $\vec{u}$ – скорость жидкости, а $\vec{u}_M$ – скорость соответствующей точки тела, $\vec{r}_M$ – радиус вектор этой точки. Проецируя момент сопротивления трению на оси Cx_1y_1z, получим

$$M_{x_1}^f = 4\mu(\pi\delta)^2 L\dot{\varphi},$$

$$M_{y_1}^d = -2\pi^2\mu\int_{-h}^{h}(U-U_C)x_1dx_1 + 2\pi^2\mu\int_{-h}^{h}\omega_{y_1}x^2{}_1dx_1,$$

$$M_z^f = 2\pi^2\mu\int_{-h}^{h}\omega_{z_1}x_1^2dx_1.$$

Таким образом, мы можем вычислить:

$$M_{x_1}^g = M_{x_1}^d - M_{x_1}^f,\ M_{y_1}^g = M_{y_1}^d - M_{y_1}^f,\ M_{z_1}^g = M_{z_1}^d - M_{z_1}^f\,.$$

Моменты гидродинамического воздействия потока относительно направлений x и y можно вычислить по следующим формулам:

$$M_x^g = M_{x_1}^g\sin\psi + M_{y_1}^g\cos\psi\,,$$

$$M_y^g = M_{x_1}^g\cos\psi - M_{y_1}^g\sin\psi\,.$$

При этом $M_z^g = -M_z^f$. Введем в рассмотрение орты подвижной системы отсчета: $\vec{\xi}_0$, $\vec{\eta}_0$, $\vec{\zeta}_0$, которые через углы Эйлера φ,ψ,θ определяются следующим образом:

$$\vec{\xi}_0 \equiv (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi, \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\theta\cos\psi, \sin\varphi\sin\theta),$$

$$\vec{\eta}_0 \equiv (-\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\theta\sin\psi, -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi, \cos\varphi\sin\theta),$$

$$\vec{\zeta}_0 \equiv (\sin\theta\sin\psi - \cos\psi\sin\theta, \cos\theta)\,.$$

В то же время $\vec{M}^g = (M_x^g, M_y^g, M_z^g)$. Тогда значения гидродинамических моментов, входящих в правые части уравнений динамических уравнений Эйлера найдутся следующим образом:

$$M_\xi^g = (\vec{M}^g \cdot \vec{\xi}^0), M_\eta^g = (\vec{M}^g \cdot \vec{\eta}^0), M_\zeta^g = (\vec{M}^g \cdot \vec{\zeta}^0).$$

К определению магнитного момента

Существуют, по крайней мере, две причины, вызывающие движение заряженных частиц по поверхности эритроцита или вместе с этой поверхностью: одна – чисто механическая, другая имеет электромагнитную природу и связана с появлением в системе электродвижущей силы ε (ЭДС) и возникновением токов Фуко. Величина ЭДС индукции в этом случае, следуя закону Фарадея, определяется соотношением: $\varepsilon = -d\Phi/dt$, где $\Phi = (\vec{S} \cdot \vec{B}^{(e)})$ – поток магнитной индукции; $\vec{S} = \vec{h}S$ – ориентированный контур; S – его площадь; $\vec{h}$ – единичная нормаль к контуру; $\vec{B}^{(e)} = \vec{B}^G + \vec{B}^L$, $\vec{B}^L$ – магнитная индукция от прибора, $\vec{B}^G$ – определяется магнитным полем Земли. С другой стороны упомянутую ЭДС можно выразить формулой $\varepsilon = -L\, dI_1/dt$, где L – индуктивность (коэффициент самоиндукции) контура, I_1 – ток, возникающий в контуре за счет изменения потока магнитной индукции. Приравнивая правые части последних уравнений, найдем:

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{1}{L}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Интегрируя последнее соотношение, получим $\Phi(t) = LI_1(t)$.

Введем в рассмотрение единичные векторы направлений $\vec{B}^G$ и $\vec{B}^L$, обозначив их соответственно $\vec{g}^0$ и $\vec{l}^0$, и пусть они определяются следующими координатами: $\vec{g}^0 \equiv (\vec{g}_1^0, \vec{g}_2^0, \vec{g}_3^0)$, $\vec{l}^0 \equiv (l_1^0(t), l_2^0(t), l_3^0(t))$.

Тогда, учитывая тот факт, что орт единичной нормали $\vec{h}$ совпадает с ортом оси $\vec{\zeta}_0$, найдем

$$\Phi = S\left[(\vec{B}^G + \vec{B}^L) \cdot \vec{\zeta}^0\right] = S[(B^G g_1^0 + B^L l_1^0)\sin\psi\sin\theta +$$
$$+ (B^G g_2^0 + B^L l_2^0)\cos\psi\sin\theta) + (B^G g_3^0 + B^L l_3^0)\cos\theta].$$

Так как углы ψ и θ являются функциями времени, то из последних уравнений следует, что как поток магнитной индукции, так и сила тока, идущего по периферии эритроцита, изменяются с течением времени в зависимости от характера вращения оси отдельного эритроцита или столбика эритроцитов. Вращение же вокруг собственной оси эритроцита вызывает механическое движение электронов, составляющих избыточный заряд вместе с поверхностью эритроцита, и это также является причиной возникновения контурных токов. Предположив, что избыточный

заряд сосредоточен в периферийной части эритроцита, и зная собственную скорость вращения этого форменного элемента, которая будет равна $\dot{\varphi}$, можно дать приближенную формулу для определения силы тока, возникающего вследствие собственного вращения элемента: $I_2 = \dot{\varphi}/2\pi$.

Полный ток, идущий по периферии эритроцита, будет равен

$$I = I_1 + I_2 .$$

Теперь приступим к определению магнитного момента $\vec{M}^m$. Известно, что на замкнутый контур с током или на магнитную стрелку в магнитном поле действует пара сил с вращающим моментом $\vec{M}^m = Np\left[\vec{B}^{(e)}, \vec{\zeta}^0\right]$. В нашем случае роль магнитной стрелки выполняет столбик эритроцитов, а N – число эритроцитов в столбике; Np – магнитный момент столбика. Проецируя найденным таким образом магнитный момент на оси $Cxyz$, получим:

$$M_x^m = B_2^{(e)}\zeta_3^0 - B_3^{(e)}\zeta_2^0,$$
$$M_y^m = B_3^{(e)}\zeta_1^0 - B_1^{(e)}\zeta_3^0,$$
$$M_z^m = B_1^{(e)}\zeta_2^0 - B_2^{(e)}\zeta_1^0,$$

где $B_i^{(e)} = B^G g_i^0 + B^L l_i^0, i = 1,2,3$,

$$\zeta_1^0 = \sin\psi \sin\theta \;\; \zeta_2^0 = -\cos\psi \sin\theta, \;\; \zeta_3^0 = \cos\theta .$$

Таким образом, $\vec{M}^m = (M_x^m, M_y^m, M_z^m)$. Тогда проекции этого вектора на оси системы координат Эйлера определятся следующим образом: $M_\xi^m = (\vec{M}^m \vec{\xi}^0), M_\eta^m = (\vec{M}^m \vec{\eta}^0), M_\zeta^m = (\vec{M}^m \vec{\zeta}^0)$.

Исследования динамики столбика эритроцитов по разработанной выше теории состоят в следующем. Сначала мы решаем задачу динамики плазмы крови, движущейся во внешнем периодическом магнитном поле (безразмерные МГД – уравнения, определяющие динамику плазмы крови). Далее фиксируем положение центра масс столбика эритроцитов в поперечном сечении трубки. При этом вследствие условий, обеспечивающих автомодельность течения этот центр перемещается параллельно оси канала и относительное его расположение в сечении не меняется. После чего, находим коэффициенты аппроксимации поверхности скоростей и приступаем к интегрированию динамических уравнений Эйлера совместно с кинематическими уравнениями. При этом в правые части уравнений динамических уравнений входят найденные выше проекции момента внешних сил.

Продемонстрируем основные результаты, полученные с помощью построенной теории для течения крови в осесимметричном сосуде под действием перпендикулярно направленного к оси симметрии

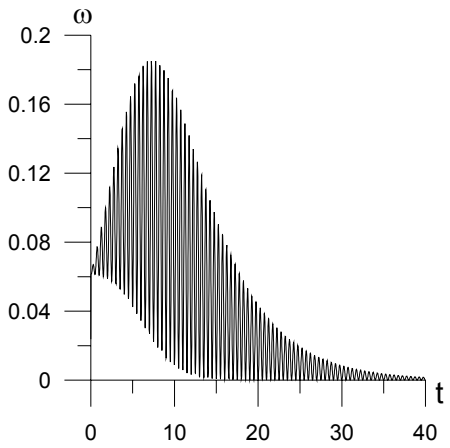

Рис. 5. Угловая скорость столбика в зависимости от времени для $p = 2\pi$ и $B_0 = 0{,}00045$ Тл

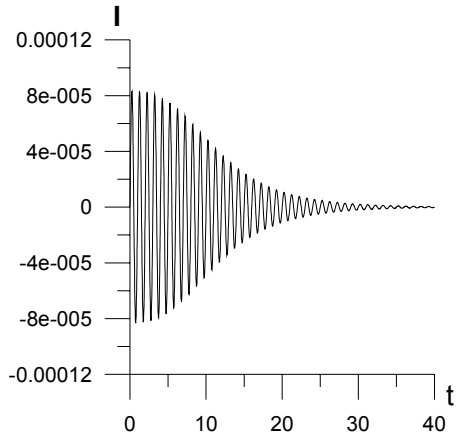

Рис. 6. Индуцированный электрический ток для «мягкого» режима, соответствующего $B_0 = 0{,}00045$ Тл

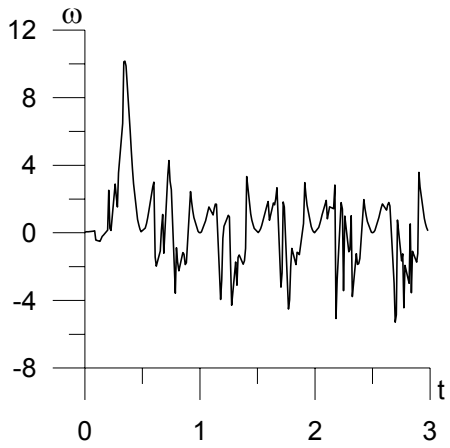

Рис. 7. Угловая скорость столбика в зависимости от времени для $p = 2\pi$ и $B_0 = 0{,}0045$ Тл

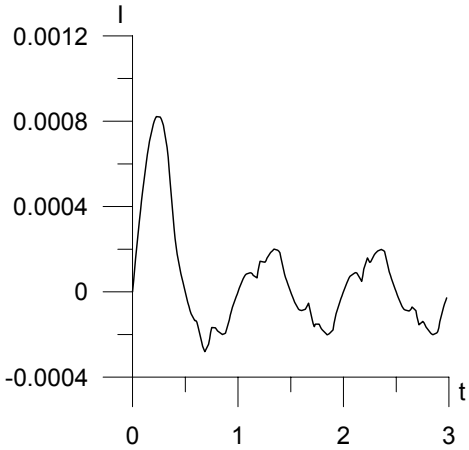

Рис. 8. Индуцированный электрический ток для «жесткого» режима, соответствующего $B_0 = 0{,}0045$ Тл

сосуда осциллирующего магнитного поля с заданной амплитудой и частотой. Анализ рис. 5-8 позволяет выделить два случая движения монетных «столбиков». Первый, когда колебания столбика и электрического тока в нем происходят на ограниченном участке по времени при частоте колебаний внешнего магнитного поля. Такой режим мы назвали гармоническим или «мягким» (см. рис. 5-6). Второй, когда мы имеем незатухающие осцилляции с частотой превышающей частоту внешне го магнитного поля. Этот режим был назван стохастическим или «жестким» (см. рис. 7-8), поскольку приводит к разрушению исследуемых структур эритроцитов. Задавая частоту и амплитуду (параметры, характеризующие внешнее поле), по разработанной численной модели можно выявить воздействие переменных магнитных полей на дина-

мику столбика, т.е. установить при каких условиях это влияние будет существенным и эффективным в отношении разрушения «монетного» столбика.

Отметим также, что построенная теория адекватна вплоть до момента, когда гидродинамический и магнитный моменты, действующие на столбик эритроцитов, еще не приводят к его разрушению. Тем не менее, приведенный выше математический аппарат позволяет проводить теоретические исследования, направленные на выяснение характеристик магнитного поля и гидродинамических характеристик сдвигового течения плазмы, при которых происходит активное взаимодействие полей со структурными образованиями из форменных элементов.

В заключении диссертации приводятся основные выводы по работе, к ним относятся:

1. Разработана теория МГД–взаимодействия эритроцитов, которая включает полученные автором точные уравнения нестационарного автомодельного течения плазмы крови в трубке сложной формы поперечного сечения, динамические и кинематические уравнения Эйлера, определяющие динамику столбика эритроцитов или отдельного эритроцита, а также теорию моментов внешних сил, действующих на столбик в потоке плазмы и составляющих правые части динамических уравнений Эйлера.

2. По результатам проведенного экспериментального моделирования найден гармонический («мягкий») режим движения столбика эритроцитов во внешнем переменном магнитном поле, характеризующийся тем, что колебания столбика происходят при частоте колебаний внешнего магнитного поля. Этот режим имеет ограниченную протяженность во времени, имеет фазу нарастания амплитуды колебаний угловой скорости и фазу убывания указанной амплитуды. При этом амплитуда индуцированного тока только снижается и уменьшается, в конце концов, до нуля.

3. Расчетным образом определен стохастический («жесткий») режим движения столбика эритроцитов во внешнем переменном магнитном поле, характеризующийся появлением собственной частоты колебаний угловой скорости столбика, которая значительно выше частоты внешних колебаний поля. Этот режим имеет неограниченную протяженность во времени. Здесь величины моментов, изгибающих столбик эритроцитов существенно выше, нежели в «мягком» режиме. Поэтому указанные структурные образования достаточно быстро разрушается.

4. По результатам моделирования установлен факт существенного снижения продолжительности «мягкого» режима при увеличении частоты колебаний внешнего поля.

Основные публикации автора по теме диссертации:

1. Бубенчиков А.М., Колесникова А.В. Влияние постоянного магнитного поля на течение проводящей жидкости в канале прямоугольной формы // Материалы 9-й Республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях». – Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, 2006, с. 127-128.

2. Бубенчиков А.М., Колесникова А.В. Стабилизированное течение электропроводящей жидкости в круглой трубе // Вычислительные технологии, 2005, т. 10, № 3, с. 23-31.

3. Бубенчиков А.М., Колесникова А.В. Стабилизированное течение электропроводящей жидкости в канале сложной формы поперечного сечения // Материалы 6-й региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, 2006, с. 89-90.

4. Бубенчиков А.М., Корнелик С.Е., Колесникова А.В. Теория магнитогидродинамического взаимодействия эритроцитов // Вестник Томского государственного университета. Бюллетень оперативной научной информации «Вычислительная гидромеханика», 2006, № 81, с. 6-21.

5. Бубенчиков А.М., Попонин В.С., Колесникова А.В. Течение электропроводящей жидкости в канале с частично проводящими стенками // Вычислительные технологии, 2006, т.11, № 1. с. 26-34.

6. Бубенчиков А.М., Колесникова А. В. Влияние постоянного магнитного поля на течение проводящей жидкости в канале сложной формы поперечного сечения // Сборник научных трудов Международной научно-практической конференции.– Снежинск: Изд-во СГФТА, 2006, с. 163-164.

7. Бубенчиков А.М., Корнелик С.Е., Колесникова А.В., Байков А.Н. Теория МГД взаимодействия эритроцитов // Материалы 5-й всероссийской научной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики».– НИИ ПММ, 2006, с. 70-71.