

На правах рукописи

БУШЛАНОВ ИВАН ВЛАДИМИРОВИЧ

**ОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЙ И ПАРАМЕТРОВ
СИНХРОННОГО ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОТОКА
СОБЫТИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ**

05.13.01 – системный анализ, управление и обработка информации
(в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2007

Работа выполнялась в Томском государственном университете.

Научный руководитель:

доктор технических наук, профессор
Горцов Александр Михайлович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, доцент
Воробейчиков Сергей Эрикович

кандидат физико-математических наук, доцент
Буркатовская Юлия Борисовна

Ведущая организация:

Московский государственный институт электроники и
математики
(технический университет) (г. Москва)

Защита состоится :

17 мая 2007 г. в 10.30 на заседании диссертационного совета Д 212.267.12 при
Томском государственном университете по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина,
36.

С диссертацией можно ознакомиться:

В Научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан:

марта 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.т.н., профессор

В. И. Смагин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. В последние два десятилетия интенсивное развитие информационных технологий поставило перед исследователями новые задачи. В частности, различные информационные потоки, циркулирующие в цифровых сетях интегрального обслуживания, потребовали изучения закономерностей их функционирования (выявление статистических свойств моментов появления событий). Общая теория, которая существовала до недавнего времени, во многом оказалась непригодной для анализа случайных процессов, возникающих в таких сетях, но она предложила хорошо изученные общие методы теории вероятностей для детального анализа.

Появление управляемых систем массового обслуживания связано с различными оптимизационными задачами. Несмотря на то, что подобным системам посвящено большое количество работ, остается много неизученных вопросов. В частности, в литературе почти неделено внимания адаптивным системам обслуживания, то есть системам, которые функционируют в условиях полной или частичной неопределенности. Основная литература по системам массового обслуживания посвящена нахождению различных стационарных характеристик системы обслуживания при условии, что все параметры входящих потоков и обслуживающих приборов известны заранее. В реальных ситуациях часто эти параметры неизвестны либо частично известны, более того, они могут изменяться во времени, часто эти изменения носят случайный характер. В литературе подобные входящие потоки принято называть дважды стохастическими. Проведенные статистические эксперименты показали довольно неплохую аппроксимацию реальных потоков моделями дважды стохастических потоков событий.

Так как в дважды стохастических потоках интенсивность является случайным процессом, то в зависимости от множества значений этого процесса выделяют два больших класса таких потоков. Первый тип, когда интенсивность является непрерывным случайным процессом. Второй тип, когда интенсивность является кусочно-постоянным случайным процессом либо с конечным числом состояний, либо со счетным числом состояний. Такие потоки являются наиболее пригодными для описания реальных потоков в цифровых сетях интегрального обслуживания.

Дважды стохастические потоки с кусочно-постоянной интенсивностью, можно разделить на три основных типа: 1) потоки с интенсивностью, изменение значения которой происходит в случайные моменты времени, являющиеся моментами наступления событий (синхронные дважды стохастические потоки событий); 2) потоки с интенсивностью, изменение значения которой происходит в случайные моменты времени независимо от моментов наступления событий (асинхронные потоки событий); 3) потоки, у которых для одних значений интенсивности изменение значения этой интенсивности происходит одновременно с наступлением события, а для других значений интенсивности

— независимо от моментов наступления событий(полусинхронные потоки событий). Выделяют три основные задачи, возникающие при исследовании такого типа потоков: 1) исследование различных характеристик системы массового обслуживания с дважды стохастическим входящим потоком событий; 2) оценка состояния потока; 3) оценка параметров потока.

В настоящее время проведено множество исследований дважды стохастических потоков событий с точки зрения всех трех выше названных задач. Однако в большинстве случаев в литературе решается задача оптимального оценивания состояний или параметров дважды стохастического потока только с двумя состояниями, случай же с произвольным(конечным) числом состояний не рассматривается. Очевидно, что реальные системы не ограничиваются только двумя значениями интенсивности. С другой стороны, функционирование таких систем непосредственно зависит от значения интенсивности в каждый момент времени.

В диссертационной работе решается задача оптимальной оценки состояний и параметров синхронного дважды стохастического потока событий (далее синхронного потока) с произвольным (конечным) числом состояний, являющегося математической моделью информационных потоков заявок, циркулирующих в цифровых сетях интегрального обслуживания.

Таким образом, тема диссертационного исследования является актуальной.

Цель диссертационной работы. Аналитическое исследование синхронного потока событий с произвольным (конечным) числом состояний с точки зрения задач оптимального оценивания состояний и параметров, формулировка и разработка программной реализации алгоритмов оценивания на основе полученных результатов, проведение статистических экспериментов на основе имитационной модели синхронного потока с целью установления качества получаемых оценок состояний и параметров.

Методы исследования. Для решения поставленных задач применялись методы теории вероятностей, теории марковских процессов, теории массового обслуживания, математической статистики и численные методы. Проведение статистических экспериментов выполнено на основе имитационной модели синхронного потока.

Научная новизна. Результаты, выносимые на защиту. Научная новизна работы состоит в рассмотрении задачи оптимального оценивания состояний и параметров синхронного потока событий с произвольным (конечным) числом состояний по наблюдениям за этим потоком. Результаты выносимые на защиту:

1) аналитическое решение задач оптимального оценивания состояний и параметров синхронного потока событий с произвольным (конечным) числом состояний;

2) алгоритмы оценивания состояний и параметров синхронного потока событий с произвольным (конечным) числом состояний;

3) результаты статистического исследования разработанных алгоритмов на основе имитационной модели синхронного потока событий.

Теоретическая ценность работы состоит в аналитическом решении задач оптимального оценивания состояний и параметров синхронного потока событий с произвольным (конечным) числом состояний на основе выборки наблюдений за моментами наступления событий этого потока.

Практическое значение работы. Полученные алгоритмы оптимального оценивания состояний и параметров синхронного потока можно использовать в задачах проектирования систем массового обслуживания таких, как информационно-вычислительные сети, сети связи, спутниковые системы передачи данных, дисциплины обслуживания которых зависят от параметров входящих потоков событий.

Апробация работы. Работа выполнялась в рамках научно-исследовательской работы Томского государственного университета "Исследование и разработка моделей высокопроизводительных многопроцессорных систем и методов обеспечения компьютерной безопасности"(номер государственной регистрации НИР 01200114364) в период с 2002 по 2006 г.г. Основные положения диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- на Всероссийской конференции с международным участием "Новые информационные технологии в исследовании сложных структур" в г. Томске, ТГУ, сентябрь 2003г.;
- на Всероссийской конференции с международным участием "Новые информационные технологии в исследовании сложных структур" в г. Иркутске, сентябрь 2004г.;
- на Международной научной конференции "Математические методы повышения эффективности функционирования телекоммуникационных сетей" в г. Минске, февраль 2005г.;
- на Всероссийской конференции с международным участием "Новые информационные технологии в исследовании сложных структур" в г. Томске, ТГУ, сентябрь 2005г.;
- на VII Международной школе-семинаре молодых ученых "Актуальные проблемы физики, технологий и инновационного развития" в г. Томске, декабрь 2005г.;
- на V Международной научно-практической конференции "Информационные технологии и математическое моделирование" в г. Анжеро-Судженске, ноябрь 2006г.;
- на Международной конференции "Математические методы повышения эффективности информационно-телекоммуникационных сетей" (19-я белорусская школа-семинар по теории массового обслуживания) в г. Гродно, январь - февраль 2007г.

Материалы исследований используются в учебном процессе при

выполнении курсовых и дипломных работ студентов.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 7 печатных работ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3-х глав, заключения, списка использованной литературы. Работа содержит 121 страницу машинописного текста, 32 рисунка, 8 таблиц. Список литературы включает 143 наименования.

Краткое содержание диссертации

Во введении раскрывается актуальность исследуемой проблемы, приводится обзор работ других авторов, формулируется цель и содержание работы, обосновывается теоретическая и практическая ценность работы.

В первой главе решается задача оптимального оценивания состояний синхронного потока событий с произвольным числом состояний.

Рассматривается синхронный поток событий, интенсивность которого представляет собой кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с n состояниями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$). Будем говорить, что имеет место i -е состояние процесса (потока), если $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$. Если имеет место i -е состояние процесса $\lambda(t)$, то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, поток событий ведет себя как пуассоновский поток с интенсивностью λ_i , $i = \overline{1, n}$. Переход из i -го состояния процесса $\lambda(t)$ в j -е ($i, j = \overline{1, n}, j \neq i$) возможен только в момент наступления события, при этом этот переход осуществляется с вероятностью p_{ij} ($0 < p_{ij} \leq 1$); с вероятностью $p_{ii} = 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{ij}$ процесс $\lambda(t)$ остается в i -м состоянии. Таким образом, при описании синхронного потока задается матрица вероятностей переходов из состояния в состояние $\|p_{ij}\|_1^n$; $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$, $i = \overline{1, n}$. Так как случайный процесс $\lambda(t)$ является ненаблюдаемым, а наблюдаются только временные моменты наступления событий t_1, t_2, \dots , то необходимо по этим наблюдениям оценить состояние процесса в некоторый текущий момент.

Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t) , где t_0 — начало наблюдений, t — окончание наблюдений (момент вынесения решения), пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0 = 0$. Для вынесения решения о состоянии ненаблюдаемого процесса $\lambda(t)$ в момент времени t необходимо определить апостериорные вероятности $w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m) = P(\lambda(t) = \lambda_i | t_1, \dots, t_m)$, $i = \overline{1, n}$, того, что в момент времени t случайный процесс $\lambda(t) = \lambda_i$ (m — количество наблюденных событий за время t), при этом $\sum_{i=1}^n w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m) = 1$. Решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ выносится согласно критерия максимума апостериорной вероятности:

$\hat{\lambda}(t) = \arg \max_{\lambda=\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} \{w(\lambda(t) = \lambda | t_1, \dots, t_m)\}$. Данный критерий обеспечивает минимум полной вероятности ошибочного принятия решения.

Основные аналитические результаты, полученные для случайного процесса $\lambda(t)$ и апостериорных вероятностей, сформулированы в следующих леммах и теореме.

Лемма 1.2.1. Случайный кусочно-постоянный процесс $\lambda(t)$ является марковским процессом. В процессе доказательства этой леммы получено распределение вероятностей времени пребывания $\lambda(t)$ в том или ином состоянии.

Для формулировки следующей леммы сделаем следующие обозначения. Пусть время меняется дискретно с конечным шагом Δt : $t = k\Delta t$, $k = 0, 1, \dots$. Рассмотрим двумерный процесс $(\lambda^{(k)}, r_k)$, где $\lambda^{(k)} = \lambda(k\Delta t)$ — значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $k\Delta t$ ($\lambda^{(k)} = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$); $r[k\Delta t]$ — число событий, наблюденных на временном интервале $(0, k\Delta t)$; $r_k = r_k(\Delta t) = r[k\Delta t] - r[(k-1)\Delta t]$ — число событий, наблюденных на временном интервале $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ длины Δt , $r_k = 0, 1, \dots$. Обозначим $\vec{r}_m = (r_0, r_1, \dots, r_m)$ — последовательность наблюденных событий за время от 0 до $m\Delta t$ на интервалах $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ длительности Δt , $k = \overline{0, m}$ ($r_0 = 0$, так как r_0 — число наблюденных событий на интервале $(-\Delta t, 0)$ для $k = 0$); $\vec{\lambda}^{(m)} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)})$ — последовательность неизвестных (ненаблюдаемых) значений процесса $\lambda(k\Delta t)$ в моменты времени $k\Delta t$, $k = \overline{0, m}$, $(\lambda^{(0)} = \lambda(0) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n})$. Обозначим через $w(\vec{\lambda}^{(m)}, \vec{r}_m)$ совместную вероятность значений $\vec{\lambda}^{(m)}, \vec{r}_m$, тогда для этой вероятности имеет место следующая лемма.

Лемма 1.2.2. Совместная вероятность $w(\vec{\lambda}^{(m)}, \vec{r}_m)$ представима в виде:

$$w(\vec{\lambda}^{(m)}, \vec{r}_m) = w(\lambda^{(0)}, r_0) \prod_{k=1}^m p(\lambda^{(k)}, r_k | \lambda^{(k-1)}, r_{k-1}).$$

В последующей лемме 1.2.3 получена рекуррентная формула для апостериорной вероятности состояния процесса $\lambda(t)$.

Лемма 1.2.3. Апостериорная вероятность того, что в момент времени $t + \Delta t$ значение $\lambda(t + \Delta t) = \lambda^{(m+1)}$ при условии \vec{r}_{m+1} , определяется рекуррентной формулой:

$$w(\lambda^{(m+1)} | \vec{r}_{m+1}) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} w(\lambda^{(m)} | \vec{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}{\sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} w(\lambda^{(m)} | \vec{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}.$$

Поведение апостериорных вероятностей между моментами времени наступления событий синхронного потока определяется системой дифференциальных уравнений, которая устанавливается в лемме 1.2.4.

Лемма 1.2.4. Апостериорные вероятности состояния потока $w(\lambda_j|t)$ на полуинтервале $[t_i, t_{i+1})$ между моментами наступления соседних событий удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dw(\lambda_j|t)}{dt} &= \sum_{k=1}^n [\lambda_k p_{kj} - \delta_{kj} \lambda_j] w(\lambda_k|t) + \\ &+ w(\lambda_j|t) \sum_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda_j) w(\lambda_k|t), \quad j = \overline{1, n}, \quad i = 0, 1, \dots , \end{aligned} \quad (1)$$

где δ_{kj} — символ Кронекера.

Полученная система нелинейных дифференциальных уравнений (1) определяет поведение апостериорных вероятностей $w(\lambda_j|t)$ на полуинтервале $[t_i, t_{i+1})$, причем на правом конце полуинтервала имеет место значение $w(\lambda_j|t_{i+1} - 0)$, на основе которого находится апостериорная вероятность $w(\lambda_j|t_{i+1} + 0)$, являющаяся начальной для следующего полуинтервала $[t_{i+1}, t_{i+2})$.

В последующей лемме 1.2.5 получена формула для пересчета апостериорных вероятностей состояний потока в момент времени наступления события.

Лемма 1.2.5. Апостериорные вероятности состояния потока $w(\lambda_j|t)$ в момент времени t_i наступления события пересчитываются согласно формуле:

$$w(\lambda_j|t_i + 0) = \frac{\lambda_j w(\lambda_j|t_i - 0)}{\sum_{k=1}^n \lambda_k w(\lambda_k|t_i - 0)}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = 1, 2, \dots . \quad (2)$$

В момент времени $t_0 = 0$ значения апостериорных вероятностей $w(\lambda_j|t_0) = w(\lambda_j|t_0 + 0)$ полагаются равными значениям финальных вероятностей состояний случайного процесса $\lambda(t)$: $\pi_j = \lim \pi_j(t)$ при $t \rightarrow \infty$, $j = \overline{1, n}$, определяемые согласно лемме 1.2.6.

Лемма 1.2.6. Априорные финальные вероятности $\pi_j = \lim \pi_j(t)$ при $t \rightarrow \infty$, $j = \overline{1, n}$, состояний случайного процесса $\lambda(t)$ удовлетворяют следующей линейной неоднородной системе алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1, k \neq j}^n \lambda_k p_{kj} \pi_k + \lambda_j (p_{jj} - 1) \pi_j = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad \sum_{k=1}^n \pi_k = 1. \quad (3)$$

Таким образом, формулы (1)-(3) определяют поведение апостериорных вероятностей состояний потока $w(\lambda_j|t)$, $j = \overline{1, n}$, в любой момент времени. Последующая теорема 1.2.1 определяет решение системы дифференциальных уравнений (1) в явном виде. Для формулировки теоремы 1.2.1 сделаем

следующие обозначения. Введем матрицу D с элементами $d_{ij} = \lambda_j(p_{ji} - 2\delta_{ij})$, где δ_{ij} — символ Кронекера, $i, j = \overline{1, N}$. Обозначим собственные числа матрицы D как $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Матрицу, составленную из собственных векторов матрицы D , обозначим как S с элементами s_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$. Элементы обратной матрицы S обозначим как s_{ij}^{-1} , $i, j = \overline{1, n}$.

Теорема 1.2.1. *Решение системы дифференциальных уравнений (1) на полуинтервале времени $[t_i, t_{i+1})$ ($i = 0, 1, \dots$) между моментами наступления соседних событий выражается формулой:*

$$w(\lambda_j|t) = \frac{\sum_{k=1}^n s_{jk} z_k(t_i) e^{\omega_k(t-t_i)}}{\sum_{r=1}^n \sum_{k=1}^n s_{rk} z_k(t_i) e^{\omega_k(t-t_i)}}, \quad (4)$$

где $z_k(t_i) = \sum_{l=1}^n s_{kl}^{-1} w(\lambda_l|t_i + 0)$, $j = \overline{1, n}$, $t_i \leq t < t_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots$.

Апостериорные вероятности $w(\lambda_j|t_i + 0)$, $j = \overline{1, n}$, определяются формулой (2) для $i = 1, 2, \dots$. Для $i = 0$ апостериорные вероятности $w(\lambda_j|t_0 + 0) = \pi_j$ ($j = \overline{1, n}$) являются решением системы (3).

В пункте 1.3 диссертации рассмотрен случай синхронного потока для двух состояний ($n = 2$).

Полученные аналитические результаты для апостериорных вероятностей состояний синхронного потока, позволяют сформулировать алгоритм оптимального оценивания на основе критерия максимума апостериорных вероятностей, приведенный в диссертации.

Во второй главе рассматривается задача оценивания параметров (интенсивностей наступления событий $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и вероятностей перехода p_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$) синхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний. Оптимальная оценка параметров строится на основе апостериорного распределения параметров синхронного потока.

Случайный процесс $\lambda(t)$ является ненаблюдаемым, а наблюдаются только временные моменты наступления событий t_1, t_2, \dots, t_m на интервале (t_0, t) . Необходимо по этим наблюдениям оценить параметры $\lambda_1, \dots, \lambda_n, p_{ij}$ ($i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$) в момент времени t . Так как $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$, то $p_{ii} = 1 - \sum_{j=1, i \neq j}^n p_{ij}$.

Таким образом, число оцениваемых параметров равно n^2 . Число состояний потока n предполагается известным.

Обозначим $\boldsymbol{\theta} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, p_{ij}; i, j = \overline{1, n}, i \neq j)$ — вектор неизвестных параметров и $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ — вектор оценки соответствующих неизвестных параметров. Обозначим $p(\boldsymbol{\theta}|t_1, t_2, \dots, t_m)$ плотность распределения вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$ при условии, что в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_m наступили события потока, где $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t$. Обозначим $p(\boldsymbol{\theta}|t) = p(\boldsymbol{\theta}|t_1, t_2, \dots, t_m)$. Пусть Θ —

область значений изменения параметров $\boldsymbol{\theta}$, т.е. $\Theta = \{\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0; 0 < p_{ij} \leq 1, \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{ij} \leq 1, i, j = \overline{1, n}\}$.

В качестве $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ в момент времени t используем оценку, обеспечивающую минимум среднеквадратического отклонения $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ от истинного значения вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$ (т.е. апостериорное среднее):

$$\hat{\theta}_k(t) = \int_{\Theta} \theta_k p(\boldsymbol{\theta}|t) d\boldsymbol{\theta}, \quad k = \overline{1, N}, \quad N = n^2. \quad (5)$$

Очевидно, что для нахождения $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ необходимо найти выражение для апостериорной плотности вероятностей $p(\boldsymbol{\theta}|t)$ параметров $\boldsymbol{\theta}$.

Рассмотрим дискретные наблюдения через равные достаточно малые промежутки времени, а затем совершим предельный переход при стремлении Δt к нулю. Пусть время меняется дискретно с шагом Δt : $t = k\Delta t, k = 0, 1, \dots$. Обозначим через $r(k\Delta t)$ число событий, наблюдавшихся на интервале $((k-1)\Delta t, k\Delta t), k = 0, 1, \dots$, при этом положим $r(0) = 0$; обозначим через $\mathbf{r}(k\Delta t) = (r(0), r(\Delta t), \dots, r(k\Delta t))$ — последовательность наблюдавшихся событий за время от 0 до $k\Delta t$. Положим $k\Delta t = t, (k+1)\Delta t = t + \Delta t$. Тогда число наблюдавшихся событий на интервале $(t - \Delta t, t)$ есть $r(k\Delta t) = r(t)$, а на интервале $(t, t + \Delta t)$ есть $r((k+1)\Delta t) = r(t + \Delta t)$.

Рассмотрим $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{r}(k\Delta t)) = p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{r}(t)) = p(\boldsymbol{\theta}|t)$ — искомую плотность вероятностей вектора $\boldsymbol{\theta}$ в момент времени t и $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{r}[(k+1)\Delta t]) = p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{r}(t+\Delta t)) = p(\boldsymbol{\theta}|t + \Delta t)$ в момент времени $t + \Delta t$.

Последующая лемма 2.2.1 определяет связь плотностей вероятностей $p(\boldsymbol{\theta}|t)$ и $p(\boldsymbol{\theta}|t + \Delta t)$.

Лемма 2.2.1. Для апостериорной плотности вероятностей $p(\boldsymbol{\theta}|t + \Delta t)$ вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$ в любой момент времени $t + \Delta t \geq 0$ имеет место следующее соотношение:

$$p(\boldsymbol{\theta}|t + \Delta t) = \frac{p(\boldsymbol{\theta}|t) \sum_{j=1}^n w(\lambda_j|t) \frac{(\lambda_j \Delta t)^{r(t+\Delta t)}}{r(t+\Delta t)!} e^{-\lambda_j \Delta t}}{\int_{\Theta} p(\boldsymbol{\theta}|t) \sum_{j=1}^n w(\lambda_j|t) \frac{(\lambda_j \Delta t)^{r(t+\Delta t)}}{r(t+\Delta t)!} e^{-\lambda_j \Delta t} d\boldsymbol{\theta}},$$

где $w(\lambda_j|t)$ ($j = \overline{1, n}$) — апостериорная вероятность j -го состояния случайного процесса $\lambda(t)$.

Основные аналитические результаты для апостериорной плотности $p(\boldsymbol{\theta}|t)$ получены в следующих леммах и теореме.

Лемма 2.2.2. Апостериорная плотность вероятностей вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$ удовлетворяет следующему интегро-дифференциальному

уравнению:

$$\frac{dp(\boldsymbol{\theta}|t)}{dt} = -p(\boldsymbol{\theta}|t) \left[a(t, \boldsymbol{\theta}) - \int_{\Theta} a(t, \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}|t) d\boldsymbol{\theta} \right], \quad (6)$$

где $a(t, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j w(\lambda_j|t)$, $t_i \leq t < t_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots$.

Лемма 2.2.3. Апостериорная плотность вероятностей $p(\boldsymbol{\theta}|t)$ вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$ в момент времени $t = t_i$ наступления события пересчитывается согласно формуле:

$$p(\boldsymbol{\theta}|t_i + 0) = \frac{a(t_i - 0, \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}|t_i - 0)}{\int_{\Theta} a(t_i - 0, \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}|t_i - 0) d\boldsymbol{\theta}}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где $p(\boldsymbol{\theta}|t_i - 0)$ — предел $p(\boldsymbol{\theta}|t)$ при $t \rightarrow t_i - 0$ и $p(\boldsymbol{\theta}|t_i + 0)$ — предел $p(\boldsymbol{\theta}|t)$ при $t \rightarrow t_i + 0$.

Теорема 2.2.1. Решение интегро-дифференциального уравнения (6) определяется согласно формуле:

$$p(\boldsymbol{\theta}|t) = \frac{p(\boldsymbol{\theta}|t_i + 0) \exp \left[- \int_{t_i}^t a(\tau, \boldsymbol{\theta}) d\tau \right]}{\int_{\Theta} p(\boldsymbol{\theta}|t_i + 0) \exp \left[- \int_{t_i}^t a(\tau, \boldsymbol{\theta}) d\tau \right] d\boldsymbol{\theta}}, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

где $p(\boldsymbol{\theta}|t_0 + 0) = p(\boldsymbol{\theta}|0)$ — плотность вероятностей, задаваемая исходя из априорных данных; $p(\boldsymbol{\theta}|t_i + 0)$ определяется согласно формуле пересчета (7) для $i = 1, 2, \dots$.

Таким образом, формулы (7), (8) позволяют сформулировать алгоритм оптимального расчета оценки $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$, приведенный в диссертации.

Отметим, что расчет оценок $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$ по формулам (7), (8) представляет собой нетривиальную задачу.

В силу сложностей по расчету апостериорной плотности вероятностей $p(\boldsymbol{\theta}|t)$ приведен приближенный алгоритм расчета оценок $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$. Идея приближенного расчета оценок состоит в следующем. В предположении близости вектора $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ к вектору $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t_i + 0)$ ($i = 0, 1, \dots$) в интегралах вида $\int_{\Theta} f(\cdot, \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}|t) d\boldsymbol{\theta}$ подынтегральные функции разлагаются в ряд Тейлора в окрестности точки $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t_i + 0)$ с точностью до трех членов ряда. В итоге такое разложение позволяет не производить интегрирование по области Θ , что значительно упрощает расчеты.

Для записи приближенных формул сделаем следующие обозначения.

$$m_k(t) = \hat{\theta}_k(t) = \int_{\Theta} \theta_k p(\boldsymbol{\theta}|t) d\boldsymbol{\theta}, \quad c_{jl}(t) = \int_{\Theta} (\theta_j - m_j(t))(\theta_l - m_l(t)) p(\boldsymbol{\theta}|t) d\boldsymbol{\theta}, \quad (9)$$

$$f(t, t_i, \boldsymbol{\theta}) = \exp \left[- \int_{t_i}^t a(\tau, \boldsymbol{\theta}) d\tau \right], \quad f_k(t, t_i, \boldsymbol{\theta}) = \theta_k f(t, t_i, \boldsymbol{\theta}), \quad a_k(t, \boldsymbol{\theta}) = \theta_k a(t, \boldsymbol{\theta}),$$

$$\mathbf{m}(t) = (m_1(t), \dots, m_N(t)), \quad \mathbf{C}(t) = \|c_{jl}(t)\|_1^N, \quad (10)$$

где $\theta_k, \hat{\theta}_k(t)$ — элементы векторов $\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$, соответственно.

С учетом введенных обозначений (9), (10) получаем оценку вектора параметров на полуинтервале времени $[t_i, t_{i+1})$ в виде

$$m_k(t) = \frac{f_k(t, t_i, \mathbf{m}(t_i + 0)) + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^N \frac{\partial^2 f_k(t, t_i, \mathbf{m}(t_i + 0))}{\partial \theta_j \partial \theta_l} c_{jl}(t_i + 0)}{f(t, t_i, \mathbf{m}(t_i + 0)) + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^N \frac{\partial^2 f(t, t_i, \mathbf{m}(t_i + 0))}{\partial \theta_j \partial \theta_l} c_{jl}(t_i + 0)}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (11)$$

Для того чтобы вычислить $m_k(t)$, необходимо получить выражения для векторов $\mathbf{m}(t_i + 0)$ и матрицы ковариаций $\mathbf{C}(t_i + 0)$ при $i = 1, 2, \dots$.

В момент времени $t = t_i$ наступления события потока элементы вектора $\mathbf{m}(t)$ пересчитываются по формуле:

$$m_k(t_i + 0) = \frac{a_k(t_i, \mathbf{m}(t_i - 0)) + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^N \frac{\partial^2 a_k(t_i, \mathbf{m}(t_i - 0))}{\partial \theta_j \partial \theta_l} c_{jl}(t_i - 0)}{a(t_i, \mathbf{m}(t_i - 0)) + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^N \frac{\partial^2 a(t_i, \mathbf{m}(t_i - 0))}{\partial \theta_j \partial \theta_l} c_{jl}(t_i - 0)}. \quad (12)$$

Обозначим

$$F_{jl}(t, t_{i-1}, \boldsymbol{\theta}) = (\theta_j - m_j(t))(\theta_l - m_l(t)) f(t, t_{i-1}, \boldsymbol{\theta}),$$

$$t_{i-1} \leq t < t_i, \quad j, l = \overline{1, N}.$$

В момент времени $t = t_i$ находятся элементы матрицы ковариаций $\bar{c}_{jl} = c_{jl}(t_i - 0)$ ($j, l = \overline{1, N}$) в виде

$$\bar{c}_{jl} = \frac{F_{jl}(t_i, t_{i-1}, \mathbf{m}(t_{i-1} + 0)) + \frac{1}{2} \sum_{u,v=1}^N \frac{\partial^2 F_{jl}(t_i, t_{i-1}, \mathbf{m}(t_{i-1} + 0))}{\partial \theta_u \partial \theta_v} c_{uv}}{f(t_i, t_{i-1}, \mathbf{m}(t_{i-1} + 0)) + \frac{1}{2} \sum_{u,v=1}^N \frac{\partial^2 f(t_i, t_{i-1}, \mathbf{m}(t_{i-1} + 0))}{\partial \theta_u \partial \theta_v} c_{uv}}, \quad (13)$$

где $c_{uv} = c_{uv}(t_{i-1} + 0)$ ($u, v = \overline{1, N}$).

Для расчета оценок параметров $\hat{\theta}_k(t)$, $k = \overline{1, N}$, на полуинтервале времени $[t_i, t_{i+1})$ по формулам (11), необходимо найти элементы $c_{jl}(t_i + 0)$ в момент времени $t = t_i + 0$ ($j, l = \overline{1, N}$).

Введем обозначение:

$$A_{jl}(t_i + 0, \boldsymbol{\theta}) = (\theta_j - m_j(t_i + 0))(\theta_l - m_l(t_i + 0))a(t_i - 0, \boldsymbol{\theta}), \quad j, l = \overline{1, N}.$$

С учетом данного обозначения формула для пересчета элементов $c_{jl}^+ = c_{jl}(t_i + 0)$ ($j, l = \overline{1, N}$) матрицы $\mathbf{C}(t)$ в момент времени t_i наступления события потока принимает вид:

$$c_{jl}^+ = \frac{A_{jl}(t_i + 0, \mathbf{m}(t_i - 0)) + \frac{1}{2} \sum_{u,v=1}^N \frac{\partial^2 A_{jl}(t_i + 0, \mathbf{m}(t_i - 0))}{\partial \theta_u \partial \theta_v} c_{uv}(t_i - 0)}{a(t_i - 0, \mathbf{m}(t_i - 0)) + \frac{1}{2} \sum_{u,v=1}^N \frac{\partial^2 a(t_i - 0, \mathbf{m}(t_i - 0))}{\partial \theta_u \partial \theta_v} c_{uv}(t_i - 0)}. \quad (14)$$

Таким образом, все необходимые формулы для расчета оценок $\hat{\theta}_k(t) = m_k(t)$, $k = \overline{1, N}$, определены. Алгоритм расчета оптимальной оценки по приближенным формулам приведен в диссертации.

Третья глава посвящена исследованию полученных оценок состояний и параметров синхронного потока с произвольным числом состояний. Исследования проводятся с использованием имитационной модели синхронного потока и программной реализации алгоритмов расчета оценок состояний и параметров. В главе описаны особенности имитационного моделирования, реализация расчета оценок состояний и параметров, приводятся и обсуждаются результаты статистических экспериментов.

Статистический эксперимент по оценке состояний синхронного потока событий заключается в построении доверительных интервалов для полной вероятности ошибочного решения о состоянии синхронного потока. Результаты экспериментов приведены в таблицах и графиках. Здесь в качестве иллюстрации приведены результаты статистического эксперимента для $n = 3$, $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = 1$, $p_{11} = 0, 99$, $p_{12} = 0, 005$, $p_{13} = 0, 005$, $p_{21} = 0, 005$, $p_{22} = 0, 99$, $p_{23} = 0, 005$, $p_{31} = 0, 02$, $p_{32} = 0, 01$, $p_{33} = 0, 97$. Число реализаций синхронного потока $N = 1000$, время моделирования $T = 10, 20, \dots, 100$ единиц времени. Результаты представлены на рис. 1 в виде графика.

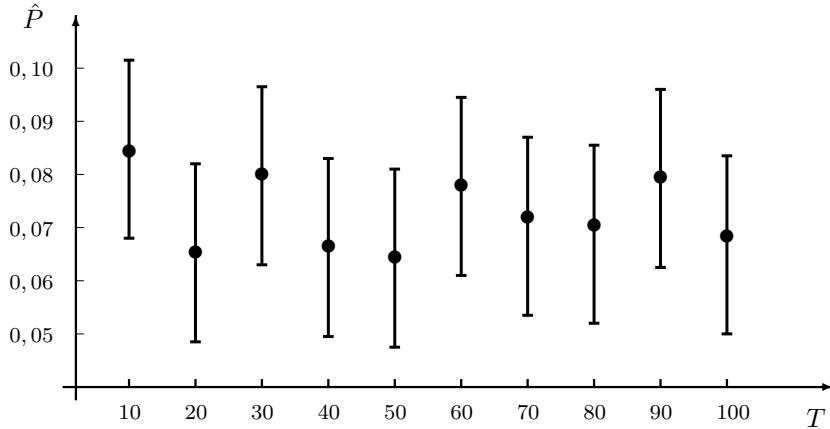


Рис. 1. Доверительные интервалы для полной вероятности ошибочного решения

Анализ результатов, приведенных на рис. 1, во-первых, показывает достаточную стабильность оценок (независимость от времени моделирования), что связано с достаточно большим количеством реализаций ($N = 1000$). Во-вторых, длина доверительных интервалов достаточно мала (максимальная длина для $T = 10$ равняется 0,034, минимальная длина для $T = 50$ равняется 0,03), что также связано с достаточно большим $N = 1000$. В-третьих, оценка полной вероятности ошибочного решения также достаточно мала (меняется в пределах от 0,064 до 0,086), что говорит о достаточно хорошем оценивании состояний процесса $\lambda(t)$.

В качестве иллюстрации приведены результаты расчета оценок параметров $\hat{\lambda}_1(t)$, $\hat{\lambda}_2(t)$, $\hat{p}_{12}(t)$, $\hat{p}_{21}(t)$ для $n = 2$, $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 2$, $p_{12} = 0,2$, $p_{21} = 0,1$. Начальная плотность вероятностей $p(\boldsymbol{\theta}|0)$ вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$ полагается равной произведению равномерных плотностей вероятностей $p(\theta_k|0) = 1/(\theta_k^{(2)} - \theta_k^{(1)})$ каждого из параметров θ_k на заданном отрезке $[\theta_k^{(1)}, \theta_k^{(2)}]$ ($k = \overline{1, 4}$), где $[\theta_1^{(1)}, \theta_1^{(2)}] = [10, 14]$, $[\theta_2^{(1)}, \theta_2^{(2)}] = [0,25, 2,25]$, $[\theta_3^{(1)}, \theta_3^{(2)}] = [0,2, 0,4]$, $[\theta_4^{(1)}, \theta_4^{(2)}] = [0,05, 0,325]$, тогда $m_1 = 12$, $m_2 = 1,25$, $m_3 = 0,3$, $m_4 = 0,275$, $\mathbf{C}(t_0 + 0) = \mathbf{C}(0) = \text{diag}(1, 3333; 0, 3333; 0, 0033; 0, 0063)$. Шаг дискретизации по времени $\Delta t = 0,01$, время моделирования $T = 250$ ед. времени. В качестве иллюстрации на рис. 2 представлен график оценки параметра λ_1 в зависимости от времени t .

В качестве показателя близости оценки $\hat{\theta}_k(t)$ к истинному значению параметра θ_k выбрана величина $\delta(\theta_k, t)$ ($k = \overline{1, N}$) — показатель качества оценивания: $\delta(\theta_k, t) = |\hat{\theta}_k(t) - \theta_k| / \max(\hat{\theta}_k(t), \theta_k)$. В качестве характеристики общей точности оценивания выбрана величина $\delta(t)$ — показатель общего качества оценивания параметров: $\delta(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta(\theta_k, t)$, который характеризует

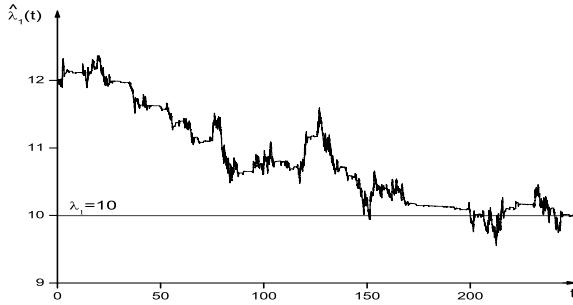


Рис. 2. Зависимость оценки $\hat{\lambda}_1(t)$ параметра λ_1 от времени t

качество оценивания параметров в целом.

Зависимость величины $\delta(t)$ для рассмотренного примера синхронного потока с двумя состояниями приведена на рис. 3.

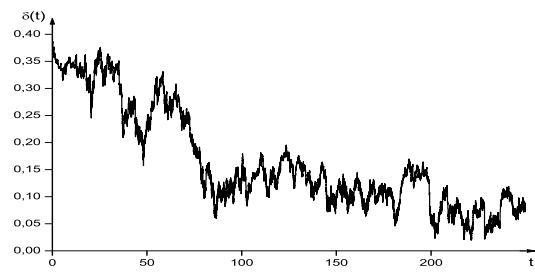


Рис. 3. Зависимость величины $\delta(t)$ от времени t

Как видно из рис. 3 величина $\delta(t)$ с течением времени t убывает к нулю, что говорит о хорошем качестве оценивания параметров. В докторской работе приведен подробный анализ полученных численных результатов.

В заключении содержатся выводы о новом решении задач оценивания состояний и параметров синхронного потока событий с произвольным числом состояний по наблюдениям за потоком и формулируются основные научные и практические результаты, которые состоят в следующем:

1. Получены явные аналитические формулы для апостериорных вероятностей состояний синхронного потока в любой момент времени наблюдения за потоком, содержащие наиболее полную информацию о потоке в теоретико-вероятностном смысле. На основе критерия максимума апостериорной вероятности вычисляются оценки состояний синхронного потока событий с произвольным числом состояний. Данный критерий обеспечивает минимум вероятности ошибочного принятия решения.

2. На основе полученных аналитических результатов для оценки состояний разработан и реализован на ЭВМ алгоритм оптимального оценивания состояний синхронного дважды стохастического потока событий

с произвольным числом состояний.

3. Получены явные аналитические формулы, выражающие значения плотности вероятностей вектора параметров в любой момент времени наблюдения за потоком, содержащей наиболее полную информацию в теоретико-вероятностном смысле о параметрах синхронного потока. В качестве оценок параметров используются апостериорные средние, обеспечивающие минимум среднеквадратического отклонения оценок от истинных значений параметров.

4. На основе полученных аналитических результатов для оценок параметров разработан и реализован на ЭВМ алгоритм оценивания параметров синхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний.

5. Разработана и реализована имитационная модель синхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний, которая используется для получения численных результатов при конкретных реализациях синхронного потока.

6. Для конкретных значений параметров синхронного потока проведены численные расчеты оценок состояний, параметров, а также величин, характеризующих качество оценивания для каждого из алгоритмов: полной вероятности ошибочного принятия решения о состоянии потока и общего показателя качества оценивания параметров.

7. Полученные в третьей главе численные результаты позволяют сделать вывод о том, что алгоритм расчета оценок состояний и алгоритм расчета оценок параметров являются практически применимыми инструментами для реального использования при проектировании систем массового обслуживания.

Список публикаций по теме диссертации

1. Бушланов И. В., Горцев А. М. *Оптимальная оценка состояний синхронного дважды стохастического потока событий* // Автоматика и телемеханика. —2004.— № 9. —С. 40–52.
2. Бушланов И. В., Горцев А. М. *Алгоритм оптимальной оценки состояний синхронного дважды стохастического потока событий* // Вестник Томского гос. ун-та. —2003.—№ 6. Приложение. —С. 220–224.
3. Бушланов И. В. *Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий с конечным числом состояний* // Вестник Томского гос. ун-та. —2005.—№ 14. Приложение. —С. 253–257.
4. Бушланов И. В. *Алгоритм оценки параметров синхронного дважды стохастического потока событий* // Материалы международной

конференции "Математические методы повышения эффективности функционирования телекоммуникационных сетей". 22-24 февраля 2005. Минск. — Минск:БГУ. — 2005. — С. 26–31.

5. Бушланов И. В. *Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий* //Известия вузов. Физика. — 2006. — № 3. Приложение. — С. 294–295.
6. Бушланов И. В. *Алгоритм оптимальной оценки параметров синхронного дважды стохастического потока событий с двумя состояниями* //Материалы V Международной научно-практической конференции "Информационные технологии и математическое моделирование". 10— 11 ноября 2006. — Анжеро-Судженск. — Томск: ТГУ. — 2006. — Ч.1. — С. 89–92.
7. Бушланов И. В. *Оптимальная оценка параметров синхронного потока событий* //Материалы международной научной конференции "Математические методы повышения эффективности информационно-телекоммуникационных сетей". 29 января-1 февраля 2007. Гродно. — Минск:РИВШ. — 2007. — Вып. 19. — С. 29–34.