На правах рукописи

Червонная Елена Андреевна

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РЫНКА ВАЛЬРАСОВСКОГО ТИПА

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Томск – 2007

Работа выполнена в Томском государственном университете на кафедре прикладной информатики факультета информатики

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Поддубный Василий Васильевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, доцент
Рожкова Светлана Владимировна

доктор технических наук, профессор
Домбровский Владимир Валентинович

Ведущая организация: Кемеровский государственный университет

Защита состоится 28 июня 2007 года в 10:30 на заседании диссертационного совета Д 212.267.08 в Томском государственном университете по адресу: г. Томск, пр. Ленина, 36, корп. 2, ауд. 102.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Томского государственного университета.

Отзывы на автореферат (2 экз.), заверенные печатью, высылать по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, ученому секретарю ТГУ.

Автореферат разослан «24» мая 2007 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор технических наук, профессор Скворцов А.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы

В настоящее время математическое моделирование динамики товарного рынка является одним из важнейших, но еще слабо изученных направлений исследования экономических процессов. Представляет большой теоретический и практический интерес построение и исследование математических моделей, описывающих с возможно большей адекватностью динамику рыночных цен и объемов поставок и продаж товаров на рынке в зависимости от соотношений спроса и предложения товаров, конкуренции товаров и продавцов, дисциплины поставок товаров, маркетинговой политики и стратегии участников рынка и других факторов, влияющих на устойчивость положения рыночного равновесия и характер рыночных переходных процессов.

Основополагающие классические работы, положившие начало математическому описанию рыночных процессов, связаны с именами Антуана Курно, Уильяма Стенли Джевонса, Альфреда Маршалла, Леона Вальраса, Вильфредо Парето, Карла Менгера.

Идея «нащупывания» равновесия (франц. tatonnement) между объемами спроса и предложения товаров впервые была высказана Л. Вальрасом в 1874 г. Затем эта идея применительно к проблеме равновесия между ценами спроса и предложения была развита в 1890 г. А. Маршаллом. Вальрас и Маршалл считаются основателями теории рыночного равновесия. Рыночное равновесие устанавливается в точке пересечения линий спроса и предложения в пространстве координат «цена–объем» (по Вальрасу) и «объем–цена» (по Маршаллу). Математический аппарат этой теории — системы алгебраических уравнений.

В течение более полувека шло развитие этой теории в плане учета различных факторов производства, обмена, сбыта и пр., влияющих на поведение линий спроса и предложения (Вальд, Нейман, Эрроу, Дебре, Маккензи, Раднер, Ауман). И только в конце 30-х – начале 40-х годов XX века были сформулированы разностные и дифференцильные соотношения, определяющие динамику процесса перехода рынка к состоянию равновесия (Самуэльсон), положившие начало развитию дифференциально-разностных моделей рынка такими учеными, как Смизис (1942), Метцлер (1945), Эрроу и Гурвиц (1958), Хан (1958), Негиши (1958), Маккензи (1960), Никайдо и Узава (1960). Почти одновременно с появлением динамических моделей рынка вальрасовского типа была осознана необходимость учета в динамических моделях рынка запаздывания, порождаемого задержками в поставках товара. По-видимому, первой моделью, учитывающей запаздывание в уравнениях динамики перехода рынка к равновесию в дискретном времени, была разностная «паутинообразная» модель, предложенная Езекилем в 1938 г. Однако дифференциальные модели рынка в течение длительного времени развивались без учета запаздывания, по-видимому, в связи с определенной сложностью математического аппарата (J.Q. Cheng, M.P. Wellman, J.I. McCauley, C.M. Kuffner). В дальнейшем, по мере развития теории и методов решения дифференциальных уравнений с запаздываниями, стали развиваться и непрерывные динамические модели рынка, учитывающие запаздывание (Н.К. Обросова, 1996, Ю.А. Кузнецов, 2002, В.В. Поддубный, 2004, И.К. Коханенко, 2005). Такие динамические модели вслед за Н.К. Обросовой будем называть *моделями вальрасовского типа*.

Если статические модели рынка можно считать изученными с математической точки зрения более или менее хорошо (теория рыночного равновесия), то динамика рынка еще слабо исследована в связи со сложностью соответствующего математического аппарата теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. До сих пор остаются малоисследованными вопросы устойчивости, стабилизации и идентификации систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, а, следовательно, и динамических моделей рынка.

Различные методы аналитического и численного решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом предложены А.Д. Мышкисом, Л.Э. Эльсгольцем, К.Г. Валеевым, Т.С. Зверкиной, А.Д. Горбуновым и В.Н. Поповым, Л.С. Гноенским и Г.А. Каменским, Л.Н. Белых и А.Л. Асаченковым, В.Б. Колмановским, А.В. Прасоловым, C. Sartori, A. Bellen, R. Vermiglio, C.T.H. Baker и C.A.H. Paul, A. Karou и R. Vaillancourt. К сожалению, эти методы не являются универсальными и не всегда применимы (например, при малых запаздываниях). Кроме того, в ряде случаев предложенные алгоритмы оказываются достаточно громоздкими. Поэтому остается актуальной проблема разработки и построения альтернативных численных методов решения дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Что касается исследования устойчивости уравнений с запаздыванием, то этой проблемой занимались такие отечественные ученые как Л.Э. Эльсгольц, Н.Н. Красовский, Б.С. Разумихин, Я.З. Цыпкин, Ю.И. Неймарк, Н.Н. Мейман и Н.Г. Чеботарев, Э. Пинни, С.Н. Шиманов, Ю.М. Репин, В.Б. Колмановский, Б.Г. Гребенщиков, А.В. Прасолов, Н.В. Азбелев и П.М. Симонов, Ю.Ф. Долгий и С.Н. Нидченко, Н.К. Обросова и зарубежные ученые H.W. Stech, K.L. Cooke и J. Turi, Guglielmi, A.G. Ulsoy, M.M. Peet, L.E. Kollar, L. Berezansky и L. Idels, T. Kalmar-Nagy, B. Cahlon и D. Schmidt. Все аналитические методы исследования устойчивости дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом достаточно сложны и трудно реализуемы численно. Они не дают явных рецептов нахождения границ областей устойчивости для состояния равновесия систем с запаздываниями. Поэтому остается актуальной разработка конструктивных численных алгоритмов построения границ областей устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Идентификация моделей рынка вальрасовского типа осложнена наличием *временных лагов* – запаздываний реакций поставщиков товаров на изменение цен этих товаров. Работ по идентификации дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом довольно мало. Среди них можно отметить работы D.W. Brewer, C. Baker и E.I. Parmuzin, В.И. Ловчакова, А.В. Прасолова, В.Ф. Лебедева и Е.А. Ситникова, С.А. Минюка и А.В. Метельского.

Задачами оптимального управления системами, описываемыми дифференциальными уравнениями с запаздыванием, занимаются P. Wang, K. Kunisch, F. Gozzi и C. Marinelli, L. Berezansky и E. Braverman, В.М. Марченко, С.А. Минюк, И.Е. Зубер, А.В. Клименко, Г.Н. Терновая, И.Б. Фуртат, А.В. Прасолов. Применительно к задачам стабилизации рынка первыми, по-видимому, являются работы В.В. Поддубного.

Настоящая работа посвящена разработке численных методов и алгоритмов, необходимых для исследования систем дифференциальных уравнений с постоянными запаздываниями и используемых для построения математических динамических моделей товарного рынка вальрасовского типа, исследованию характера и особенностей поведения этих моделей, изучению вопросов устойчивости их равновесных состояний, стабилизации в состоянии равновесия и идентификации моделей рынка.

Цель работы

Целью работы является исследование математических моделей рынка, учитывающих наличие конкуренции товаров и запаздывание реакции поставщиков товаров на изменение цен товаров. Модели задаются с помощью систем дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами. Запаздывания считаются постоянными. В рамках указанной цели поставлены и решены следующие задачи:

1) Построение вычислительных схем решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, пригодных для работы с произвольными запаздываниями, в том числе, как угодно малыми.

2) Построение и исследование различных модификаций динамических моделей рынка вальрасовского типа с использованием разработанных вычислительных схем.

3) Разработка конструктивного численного алгоритма построения границ области устойчивости положения равновесия систем дифференциальных уравнений с запаздываниями применительно к моделям товарного рынка вальрасовского типа.

4) Исследование стабилизируемых в состоянии равновесия систем дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами применительно к моделям товарного рынка вальрасовского типа.

5) Разработка метода идентификации систем дифференциальных уравнений с запаздываниями применительно к моделям товарного рынка вальрасовского типа.

Методы исследований

В ходе решения поставленных задач использовались методы вычислительной математики, теории дифференциальных уравнений (в том числе дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом), теории оптимального управления и стабилизации, теории устойчивости и теории идентификации систем.

Научная новизна работы

1) На основе численного метода Эйлера с уравниванием для решения дифференциальных уравнений без запаздывания разработан аналогичный численный метод второго порядка точности для решения систем дифференциальных уравнений с запаздыванием. Предложено две модификации этого метода:

без интерполяции и с интерполяцией. Первая модификация ограничивает выбор шага интегрирования условием кратности запаздывания этому шагу. Вторая модификация свободна от этого ограничения и позволяет, в отличие от известного метода шагов, работать с любым, в том числе, как угодно малым запаздыванием, и выбирать любой шаг интегрирования, обеспечивающий желаемую точность решения.

2) Разработан новый конструктивный численный алгоритм построения границы области устойчивости положения равновесия системы дифференциальных уравнений с запаздыванием. В отличие от существующих способов исследования устойчивости, алгоритм не предполагает вычисления корней характеристического квазиполинома. Метод сводится к численному поиску запаздываний, удовлетворяющих характеристическому уравнению линеаризованной системы, в котором корни квазиполинома предполагаются чисто мнимыми. С использованием этого алгоритма впервые построены границы областей устойчивости динамических моделей рынка вальрасовского типа.

3) На основе метода наименьших квадратов разработан новый алгоритм идентификации динамической модели рынка, описываемой системой дифференциальных уравнений с запаздываниями. Алгоритм позволяет совместно оценивать запаздывания и коэффициенты системы.

Практическая и теоретическая ценность работы

Практическая и теоретическая ценность работы заключается в развитии математических моделей рынка товаров в направлении повышения ее адекватности и в разработке прикладных численных методов решения задач моделирования, идентификации и построения границ областей устойчивости равновесия систем дифференциальных уравнений с запаздыванием. Эти методы могут использоваться при исследовании динамических моделей не только в экономике, но и в других областях науки.

Положения, выносимые на защиту

1) Модификация и обобщение динамических моделей рынка вальрасовского типа: линейные модели второго и третьего порядков для рынка одного товара и нелинейные модели для рынка со многими товарами.

2) Модификации численных методов для интегрирования систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

3) Новый конструктивный алгоритм построения границ области устойчивости положения равновесия системы дифференциальных уравнений с запаздыванием.

4) Новый алгоритм идентификации системы с запаздыванием на основе метода наименьших квадратов.

Внедрение полученных результатов

Результаты работы используются в учебном процессе факультета информатики Томского государственного университета при проведении учебных занятий по курсу «Дифференциальные уравнения и основы теории управления».

Апробация работы

По результатам работы сделаны доклады на следующих конференциях:

1. IV Всероссийская научно-практическая конференция «Информационные технологии и математическое моделирование» (ИТММ-2005), Анжеро-Судженск, ноябрь 2005 г.

2. VI Международная научная конференция "Наука и образование": Математическое моделирование и информатика, Белово, март 2006 г.

3. XLIV Международная научная студенческая конференция "Студент и научно-технический прогресс": Математика, Новосибирск, апрель 2006 г.

4. V Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии и математическое моделирование» (ИТММ-2006), Анжеро-Судженск, ноябрь 2006 г.

5. XI Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи», Анжеро-Судженск, апрель 2007 г.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, основного текста, заключения, списка использованной литературы (139 наименований). Основной текст состоит из 5 глав, содержит 152 рисунка и 6 таблиц. Общий объем работы составляет 184 страницы.

Публикации по теме работы

Основное содержание работы отражено в 9 публикациях, в т.ч. в 4 статьях из списка ВАК.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава работы посвящена обзору существующих динамических моделей рынка вальрасовского типа, а также построению более адекватных реальности модификаций и обобщений этих моделей.

Вальрас при описании процесса перехода рынка в состояние равновесия сосредоточил внимание на объемах спроса Q^D и предложения Q^S при данных ценах *P*. Функции спроса и предложения у него имеют вид $Q^D = Q^D(P)$ и $Q^S = Q^S(P)$, а условие рыночного равновесия выражается равенством $Q^D(P) = Q^S(P)$. При равновесной цене P^* объем спроса совпадает с объемом предложения и составляет равновесный объем продаж Q^*: $Q^D(P^*) = Q^S(P^*) = Q^*$. Обычно объем предложения реагирует на изменения цен с некоторым запаздыванием τ (будем считать его постоянным), тогда как объем спроса определяется текущей ценой. Тогда процесс «нащупывания» равновесия по Вальрасу в современной интерпретации описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\frac{dP(t)}{dt} = \gamma\left(Q^D\left(P(t)\right) - Q^S\left(P(t-\tau)\right)\right),\ \gamma > 0, \tag{1}$$

где *t* – время, $\Delta Q^D(t) = Q^D\left(P(t)\right) - Q^S\left(P(t-\tau)\right)$ – избыток спроса в момент времени *t*. При $\Delta Q^D(t) > 0$ рыночная цена повышается, при $\Delta Q^D(t) < 0$ падает, при $\Delta Q^D(t) = 0$ выполняется условие равновесия.

Маршалл оперировал понятиями «цена спроса» P^D и «цена предложения» P^S при данном объеме продаж Q. Функции спроса и предложения у него имеют вид $P^D = P^D(Q)$ и $P^S = P^S(Q)$, а условие рыночного равновесия выражается равенством $P^D(Q) = P^S(Q)$. При равновесном объеме Q^* цена спроса совпадает с ценой предложения и составляет равновесную рыночную цену P^*: $P^D(Q^*) = P^S(Q^*) = P^*$. Процесс взаимодействия спроса и предложения по Маршаллу описывается (в современной интерпретации) обыкновенным дифференциальным уравнением без запаздывания

$$\frac{dQ(t)}{dt} = k\left(P^D(Q(t)) - P^S(Q(t))\right),\ k > 0, \tag{2}$$

где $\Delta P^D(t) = P^D(Q(t)) - P^S(Q(t))$ – превышение ценой спроса цены предложения при объеме продаж $Q(t)$ в момент времени t. При $\Delta P^D(t) > 0$ объем предложения возрастает, при $\Delta P^D(t) < 0$ снижается, при $\Delta P^D(t) = 0$ выполняется условие равновесия.

Процессы «нащупывания» равновесия по Вальрасу и Маршаллу, описываемые дифференциальными соотношениями первого порядка (1) и (2), можно считать простейшими динамическими математическими моделями поведения рынка во времени, объясняющими механизм перехода рынка от неравновесного состояния к равновесному.

Будем рассматривать два варианта функций спроса и предложения: линейные $Q^D(P) = Q^* - \alpha(P - P^*)$, $Q^S(P) = Q^* + \beta(P - P^*)$ (по Вальрасу); $P^D(Q) = P^* - \alpha^{-1}(Q - Q^*)$, $P^S(Q) = P^* + \beta^{-1}(Q - Q^*)$ (по Маршаллу), где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, и нелинейные, а именно, параболические функции предложения $Q^S(P) = Q^*\left((P^\mu - P^\mu_{\min})/(P^{*\mu} - P^\mu_{\min})\right)$, $P^S(Q) = \left(P^\mu_{\min} + (Q/Q^*)(P^{*\mu} - P^\mu_{\min})\right)^{1/\mu}$, $\mu \geq 1$, и гиперболические функции спроса $Q^D(P) = Q^*\left(P^*/P\right)^\nu$, $P^D(Q) = P^*\left(Q^*/Q\right)^{1/\nu}$, $\nu \geq 1$, где ν и μ – показатели гиперболы и параболы, $P_{\min} < P^*$ – минимальная цена, ниже которой продавец не может продавать товар из-за убыточности продажи.

Рассматривая существующие динамические модели рынка вальрасовского типа, включая модели, построенные И.К. Коханенко, Ю.А. Кузнецовым и Н.К. Обросовой, приходим к необходимости построения ряда модификаций и обобщений моделей рынка подобного типа. Рассматриваются следующие модификации и обобщения моделей.

1. *Линейная динамическая модель рынка второго порядка*, содержащая только две зависимые переменные – рыночную цену товара $P(t)$ и объем продаж $Q(t)$. Модель задается системой дифференциальных уравнений с запаздыванием:

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + By(t-\tau),\ t \in [t_0, T];\ y(t) = \varphi(t),\ t \in [t_0 - \tau, t_0),\ y(t_0) = y_0,$$

где векторы y, dy/dt, $\varphi(t)$ и матрицы A, B имеют вид:

$$y(t)=\begin{pmatrix}P(t)-P^* & Q(t)-Q^*\end{pmatrix}^T,\ \frac{dy(t)}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{dP(t)}{dt} & \frac{dQ(t)}{dt}\end{pmatrix}^T,$$

$$y(t-\tau)=\begin{pmatrix}P(t-\tau)-P^* & Q(t-\tau)-Q^*\end{pmatrix}^T,$$

$$A=\begin{pmatrix}-a & -q\\ r_1 & -b\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ r_2 & 0\end{pmatrix},\ \varphi(t)=\begin{pmatrix}\overline{P}(t)-P^*\\ \overline{Q}(t)-Q^*\end{pmatrix},$$

причем $a>0$, $b>0$, $q>0$, $r_1>0$, $r_2>0$.

2. *Линейная динамическая модель третьего порядка*, учитывающая изменения во времени не только рыночной цены товара $P(t)$ и объема продаж $Q(t)$, но и объемов предложения $Q^S(t)$ и спроса $Q^D(t)$:

$$\frac{dy(t)}{dt}=Ay(t)+By(t-\tau),\ t\in[t_0,T];\ y(t)=\varphi(t),\ t\in[t_0-\tau,t_0),\ y(t_0)=y_0,$$

$$y(t)=\begin{pmatrix}P(t)-P^* & Q^S(t)-Q^* & Q^D(t)-Q^*\end{pmatrix}^T,\ \frac{dy(t)}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{dP(t)}{dt} & \frac{dQ^S(t)}{dt} & \frac{dQ^D(t)}{dt}\end{pmatrix}^T,$$

$$y(t-\tau)=\begin{pmatrix}P(t-\tau)-P^*\\ Q^S(t-\tau)-Q^*\\ Q^D(t-\tau)-Q^*\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}-a & -q^S & q^D\\ r_1^S & -b^{SS} & b^{SD}\\ r_1^D & -b^{DS} & b^{DD}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ r_2^S & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\varphi(t)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t)-P^*\\ \varphi_2(t)-Q^*\\ \varphi_3(t)-Q^*\end{pmatrix},$$

где $a>0$, $q^S>0$, $q^D>0$, $b^{SS}>0$, $b^{SD}>0$, $b^{DS}>0$, $b^{DD}>0$, $r_1^S>0$, $r_1^D>0$, $r_2^S>0$. При этом объем продаж в каждый данный момент времени определяется как минимальная из величин $Q^S(t)$ и $Q^D(t)$: $Q(t)=\min\left(Q^S(t),Q^D(t)\right)$.

3. *Нелинейная модель рынка вальрасовского типа со многими товарами*, учитывающая наличие конкуренции на рынке. Эта модель рынка описывается системой связанных дифференциальных уравнений N-го порядка с N постоянными запаздываниями:

$$\frac{dP_i(t)}{dt}\frac{1}{P_i(t)}=\gamma_{ii}\left[Q_i^D(P_i(t))-Q_i^S(P_i(t-\tau_i))\right]-$$

$$-\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\gamma_{ij}\left[Q_j^D\left(P_j(t)\right)-Q_j^S\left(P_j\left(t-\tau_j\right)\right)\right],\tag{3}$$

$$P_i(t)=\overline{P}_i(t),\ t\in\left[t_0-\tau_i,t_0\right),\ P_i(t_0)=P_{i0},\ i=\overline{1,N},\tag{4}$$

где $Q_i^D\left(P_i(t)\right)$ и $Q_i^S\left(P_i\left(t-\tau_i\right)\right)$ – объемы спроса и предложения i-ого товара в момент времени t, $\gamma_{ij}\geq 0$, $i,j=\overline{1,N}$. Функции спроса и предложения могут быть как линейными, так и нелинейными.

Для существования и единственности решений дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами вида

$$\frac{dy(t)}{dt} = f\big(t, y(t), y(t-\tau)\big),$$

с помощью которых описываются построенные выше модели рынка вальрасовского типа, достаточно, чтобы правая часть $f\big(t, y(t), y(t-\tau)\big)$ была непрерывна по своим аргументам и удовлетворяла условиям Липшица по второму и третьему аргументу (или более сильному условию ограниченности по модулю частных производных $\left|\partial f_i \middle/ \partial y_j\right| \le M \quad \forall i, j = \overline{1, N}$). Эти условия автоматически выполняются в линейных и нелинейных моделях вальрасовского типа.

Матрицы A и B в линейных моделях вальрасовского типа будем выбирать так, чтобы в отсутствие запаздывания (при $\tau = 0$) точка покоя (равновесия) систем дифференциальных уравнений была устойчива, т.е. так, чтобы вещественные части всех собственных чисел матрицы $A+B$ были отрицательными.

Равновесная цена P^* и равновесный объем Q^* — это, очевидно, положительные величины. В работе будем рассматривать $P^* = 1$ и $Q^* = 1$, имея в виду, что цены и объемы продаж, предложения и спроса на товары измеряются в единицах равновесной цены и равновесного объема.

Вторая глава диссертации посвящена численному моделированию рынка товаров. В главе сделан обзор существующих методов аналитического и численного решения дифференциальных уравнений с запаздыванием. В связи с громоздкостью большинства существующих численных методов решения дифференциальных уравнений с запаздыванием, обязательно включающих в полученное решение все точки разрыва производных, а также в связи с непригодностью этих методов в случае как угодно малых запаздываний, разработаны модификации численных методов, обеспечивающие требуемую точность решения без обязательного включения в решение всех точек разрыва производной. Разработано две формы обобщения на случай уравнений с запаздыванием методов численного интегрирования дифференциальных уравнений: без интерполяции и с интерполяцией. В первой форме шаг интегрирования выбирается как общий делитель всех запаздываний, обеспечивающий требуемую точность решения. Это позволяет включить в решение все точки разрывов производных. Вторая форма допускает выбор любого шага интегрирования, обеспечивающего желаемую точность, безотносительно к запаздываниям, которые могут быть любыми, в том числе как угодно малыми. При этом информация о некоторых точках разрыва производных может быть потеряна, что не является существенным для задач моделирования рынка. В работе используются обобщения методов Рунге-Кутты и Эйлера с уравниванием в первой форме и метода Эйлера с уравниванием во второй форме.

Проведено численное исследование моделей рынка, представленных в первой главе. Исследован характер переходных процессов при выведении рынка в некоторый начальный момент времени из состояния равновесия при различных запаздываниях. В моделях первого порядка в отсутствие запаздывания переход рынка к равновесию происходит апериодически. Наличие запаздывания придает этому процессу характер затухающих колебаний. С увеличением запаздывания переход к равновесию замедляется, и при некотором критическом значении запаздывания $\tau = \tau_{кр}$ (точка бифуркации) траектория рынка перестает приближаться к точке равновесия, точка равновесия становится изолированной точкой, и рынок начинает совершать периодические колебания вокруг точки равновесия. При дальнейшем увеличении запаздывания ($\tau = \tau_{кр}$) точка равновесия теряет устойчивость. В случае линейности модели траектория состояния рынка неограниченно удаляется от точки равновесия (рынок «разваливается»), в случае нелинейности модели траектории рынка начинают совершать колебания все возрастающей до некоторого насыщения амплитуды. В качестве примеров ниже представлены траектории цены товара в линейной модели Вальраса-Маршалла второго порядка (рис. 1, 2) и траектории цен товаров в нелинейной модели вальрасовского типа с двумя товарами (рис. 3, 4) в случае устойчивого (рис. 1, 3) и неустойчивого (рис. 2, 4) положения равновесия.

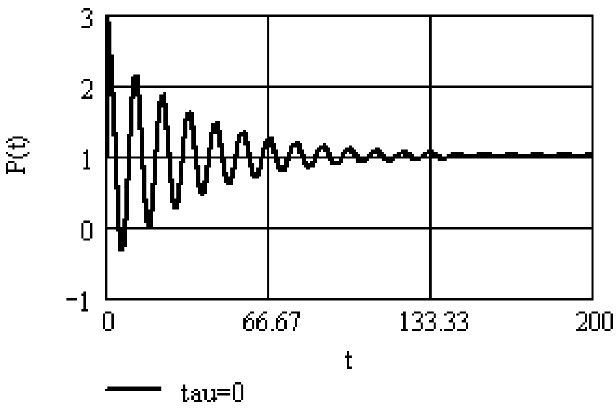

Рис. 1. Траектории цен $P(t)$ при запаздываниях $\tau = 0$, $\tau = 3$

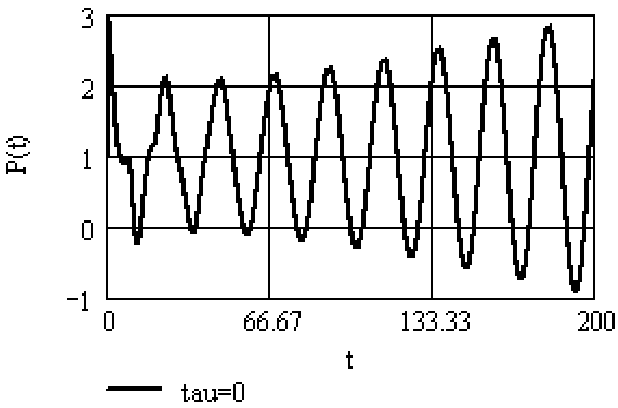

Рис. 2. Траектории цен $P(t)$ при запаздываниях $\tau = 0$, $\tau = 9$

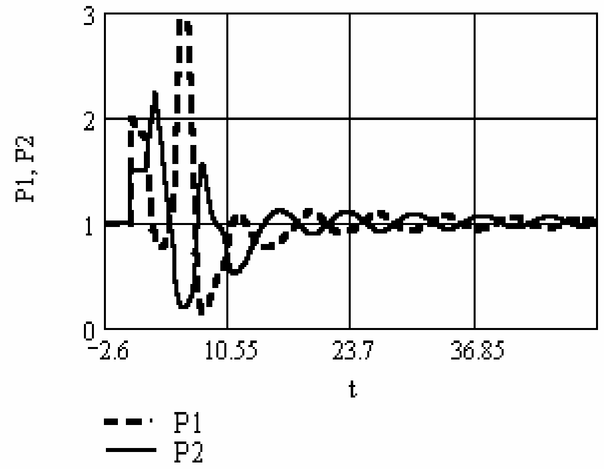

Рис. 3. Траектории решения системы вальрасовского типа, рыночные цены $P_1(t)$, $P_2(t)$, $\tau = (1{,}6 \quad 2{,}6)^T$

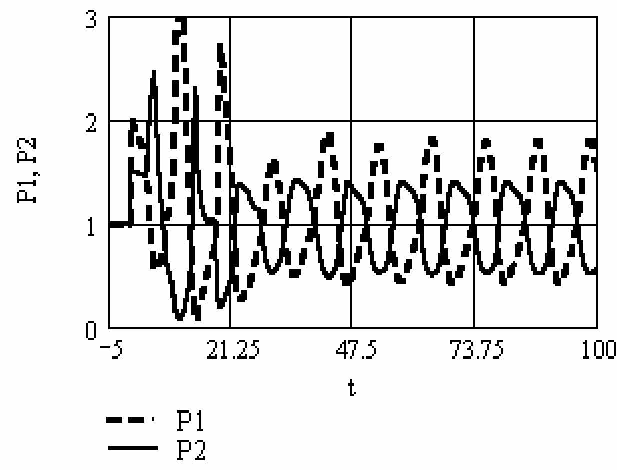

Рис. 4. Траектории решения системы вальрасовского типа, рыночные цены $P_1(t)$, $P_2(t)$, $\tau = (3{,}2 \quad 5)^T$

Результаты, полученные во второй главе, опубликованы в работах [1, 3, 5, 7, 8].

Третья глава посвящена исследованию устойчивости моделей рынка вальрасовского типа. Сделан обзор существующих методов исследования устойчивости дифференциальных уравнений с запаздываниями. Отметим, что на сегодняшний день не существует конструктивных алгоритмов нахождения границ областей устойчивости для состояний равновесия систем с запаздывающими аргументами. В связи с этим разработан оригинальный конструктивный численный алгоритм построения границ области устойчивости в пространстве запаздываний для точки равновесия рынка многих товаров. Алгоритм основан на анализе характеристического квазиполинома, но не предполагает нахождения бесконечного множества его корней.

Известно, что исследование на устойчивость положения равновесия нелинейной системы с запаздываниями эквивалентно исследованию на устойчивость решения системы, линеаризованной около состояния равновесия (системы первого приближения). Разработанный метод заключается в поиске запаздываний, удовлетворяющих характеристическому уравнению линеаризованной системы

$$\left|\det\left(A+B\begin{bmatrix} e^{-k\tau_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-k\tau_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & e^{-k\tau_N} \end{bmatrix}-kI\right)\right|=0, \qquad (5)$$

где I — единичная матрица размерности $N \times N$, A и B — матрицы коэффициентов линеаризованной системы. Так как известно, что необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости точки равновесия системы с запаздыванием является отрицательность действительных частей всех корней характеристического уравнения (характеристического квазиполинома), то на границе области устойчивости все корни уравнения (5) должны быть чисто мнимыми: $k = i\omega$. Перебирая с некоторым малым шагом значения ω и находя все наборы $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)$, при которых с заданной точностью (например, не хуже 0,001) выполняется равенство (5), получим границы области устойчивости модели рынка вальрасовского типа. Для $N = 2$ эти точки, лежащие на линиях бифуркации решения, представлены на рис. 5. Область устойчивости — заштрихованная область левее и ниже всех линий бифуркации.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [2, 4, 9].

Четвертая глава работы посвящена исследованию динамической модели рынка вальрасовского типа, стабилизируемой в положении равновесия. Целью стабилизации является увеличение области устойчивости положения равновесия рынка. В главе разработана модификация одного из методов стабилизации систем с запаздывающим аргументом. Рассматривается линейная модель управляемого рынка

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + By(t-\tau) + Du(t)\,,\ y(t) = \varphi(t)\,,\ t \in [t_0 - \tau, t_0),\ y(t_0) = y_0\,, \quad (6)$$

где $u(t)$ — скалярное управление, D — n-вектор-столбец передачи управлений, n — размерность вектора состояния $y(t)$. Вид вектора D определяется механизмом стабилизации рынка.

В качестве критерия оптимальности примем квадратичный интегрально-терминальный критерий вида:

$$J(y,u) = y^T(T)Ly(T) + \int_{t_0}^{T} y^T(t)M(t)y(t)dt + \int_{t_0}^{T} N(t)u^2(t)dt\,. \quad (7)$$

Здесь $L \geq 0$, $M(t) \geq 0$ — симметричные неотрицательно определенные $n \times n$-матрицы, $N(t) > 0$ — положительная кусочно-непрерывная функция, определяющая ресурс управления (увеличение $N(t)$ уменьшает ресурс управления, сильнее штрафуя большие управления, уменьшение $N(t)$ увеличивает ресурс управления).

Ставится вариационная задача минимизации функционала (7) на решениях системы (6). Необходимым условием минимума функционала (7) является равенство нулю на оптимальной траектории и оптимальном управлении первой вариации функционала по $y(t)$ и $u(t)$: $\delta J(y,u) = 0$. Для вычисления вариации функционала $J(y,u)$ и получения уравнения для оптимального управления $u(t)$ используется схема Р. Беллмана и К. Кука исключения из функционала (7) вектора состояния $y(t)$ через решение системы (6) при фиксированном управлении $u(t)$ с последующей минимизацией функционала по управлению $u(t)$. Напомним, что схема Р. Беллмана и К. Кука имеет вид:

$$y(t) = K(t)y_0 + \int_{t_0-\tau}^{t_0} K(t-\tau-x)B\varphi(x)dx + \int_{t_0}^{T} K(t-x)Du(x)dx\,,\ t \geq t_0,$$

где $n \times n$-матричная функция $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению $\frac{dK(t)}{dt} = AK(t) + BK(t-\tau)$, $t > t_0$, и начальным условиям $K(t) = O$ при $t < t_0$, $K(t_0) = I$. Здесь O — нулевая $n \times n$-матрица, I – единичная $n \times n$-матрица.

Необходимое условие минимума функционала (7) принимает вид:

$$\int_{t_0}^{T} \left[y^T(T)LK(T-x)D + \int_{t_0}^{T} y^T(t')M(t')K(t'-x)D\,dt' + N(x)u(x) \right] \delta u(x)dx = 0\,,$$

Используя основную лемму вариационного исчисления, получаем уравнение Эйлера для оптимального управления в следующем виде:

$$y^T(T)LK(T-t)D + \int_{t_0}^{T} y^T(t')M(t')K(t'-t)D\,dt' + N(t)u(t) = 0\,,\ t \in [t_0, T]\,. \quad (8)$$

Исключая из (8) вектор состояния $y(t)$ по схеме Беллмана и Кука и введя обозначения:

$$f(t) = y_0^T K^T(T) L K(T-t) D + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \varphi^T(t') B^T K^T(T-t'-\tau) L K(T-t) D\, dt' +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} \left[y_0^T K^T(t') M(t') K(t'-t) D + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \varphi^T(\vartheta) B^T K^T(t'-\vartheta-\tau) M(t') K(t'-t) D\, d\vartheta \right] dt' ,$$

$$F(t,t') = D^T K^T(T-t) L K(T-t') D + \int_{t_0}^{T} D^T K^T(\vartheta - t) M(\vartheta) K(\vartheta - t') D\, d\vartheta ,$$

приведем (8) к виду неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$f(t) + \int_{t_0}^{T} F(t,t') u(t') dt' + N(t) u(t) = 0 ,\ t \in [t_0, T], \qquad (9)$$

решение которого представляет собой траекторию $u(t)$ оптимального управления системой. В главе построен численный алгоритм решения уравнения (9).

С помощью описанного метода построены траектории управляемых моделей рынка с запаздыванием поставок товаров в сравнении с неуправляемыми моделями. Показано, что при устойчивом положении равновесия рынка свободное движение рынка к равновесию происходит значительно медленнее, чем управляемое. Это хорошо видно на рис. 6–8, полученных для модели вальрасовского типа второго порядка. Оптимальное управление при достаточном ресурсе управления $1/N(t)$ эффективно стабилизирует рынок в положении даже неустойчивого равновесия, возникающего при больших запаздываниях, что хорошо видно на рис. 9–11, полученных для модели второго порядка.

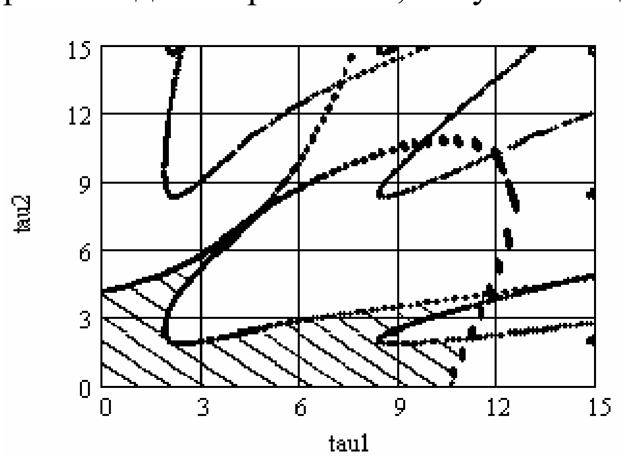

Рис. 5. Область устойчивости (заштрихована) модели рынка с запаздыванием

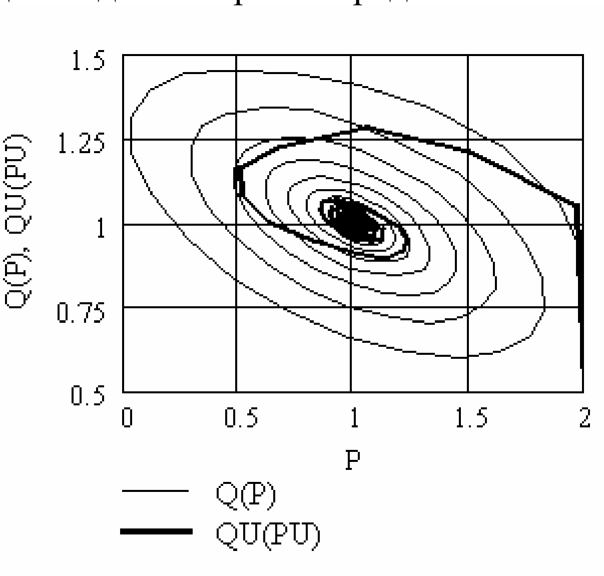

Рис. 6. Фазовая траектория движения к равновесию неуправляемого (тонкая линия) и управляемого (жирная линия) рынка, $\tau < \tau_{кр}$

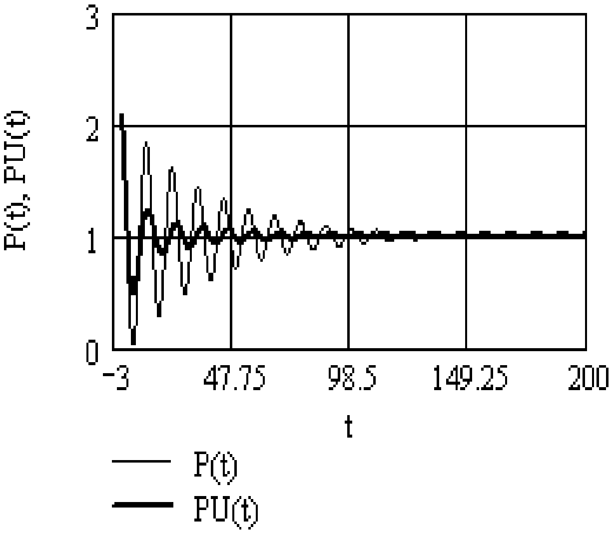

Рис. 7. Динамика цены товара для неуправляемого (тонкая линия) и управляемого (жирная линия) рынка с запаздыванием $\tau < \tau_{кр}$

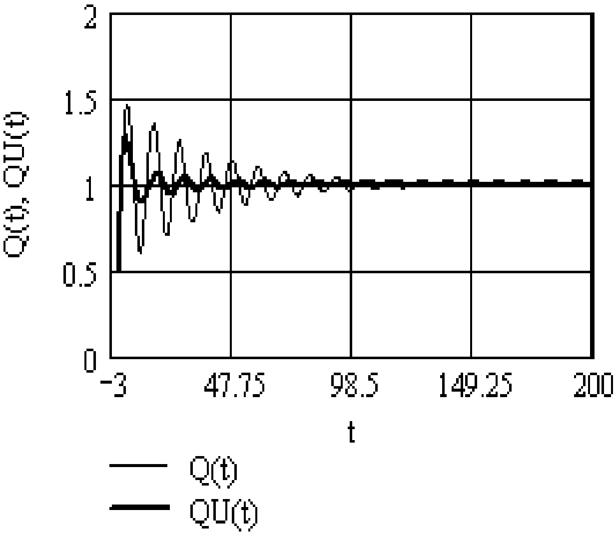

Рис. 8. Динамика поставки товара для неуправляемого (тонкая линия) и управляемого (жирная линия) рынка с запаздыванием $\tau < \tau_{кр}$

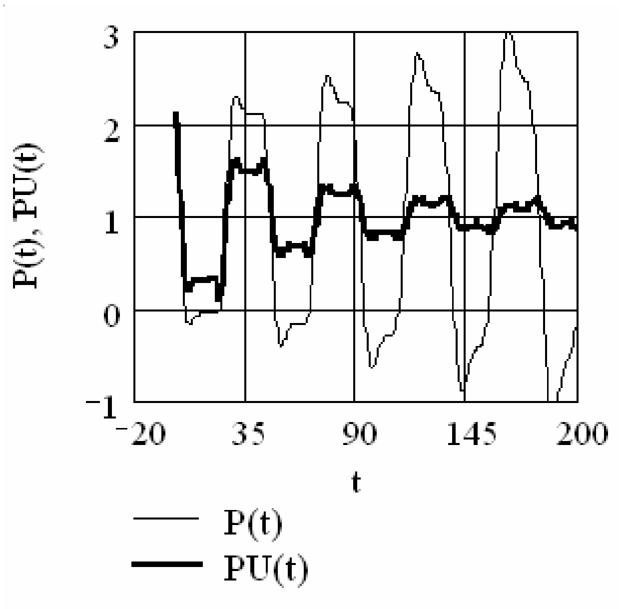

Рис. 9. Динамика цены товара для неуправляемого (тонкая линия) и управляемого (жирная линия) рынка с запаздыванием $\tau > \tau_{кр}$

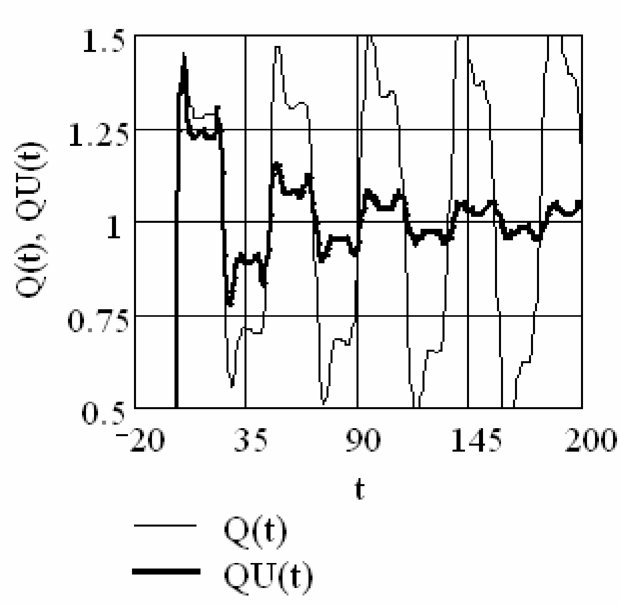

Рис. 10. Динамика поставки товара для неуправляемого (тонкая линия) и управляемого (жирная линия) рынка с запаздыванием $\tau > \tau_{кр}$

Таким образом, стабилизация рынка, описываемого моделями вальрасовского типа, позволяет расширить область устойчивости положения равновесия рынка.

Результаты, полученные в четвертой главе, опубликованы в работе [1].

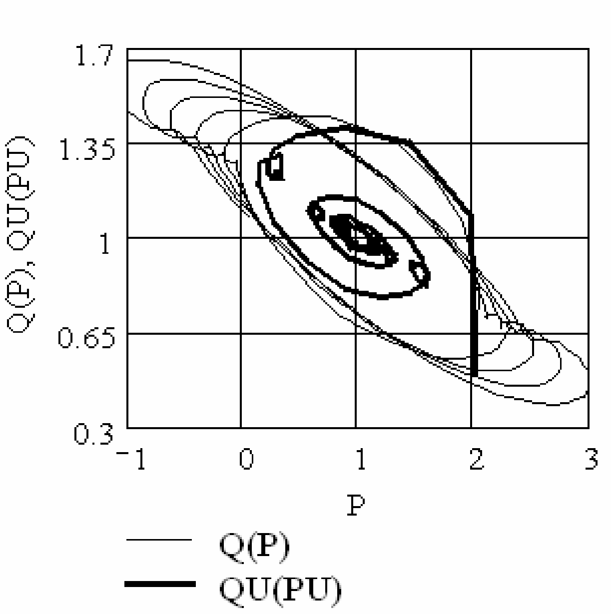

Рис. 11. Фазовая траектория движения к равновесию неуправляемого (тонкая линия) и управляемого (жирная линия) рынка, $\tau > \tau_{кр}$

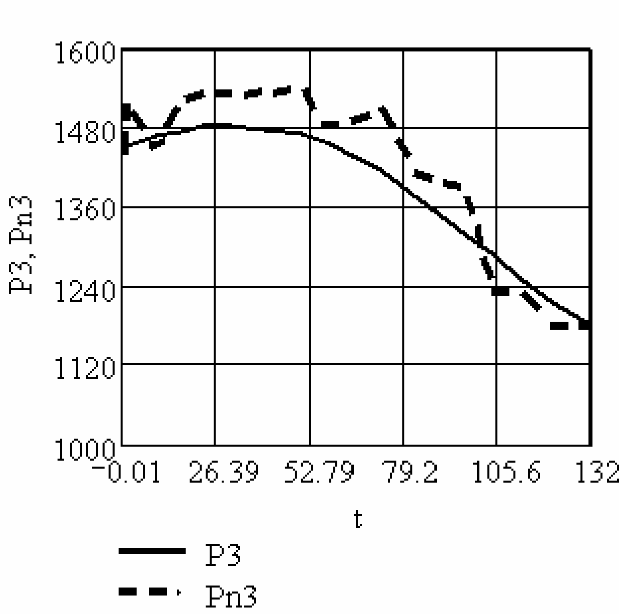

Рис. 12. Наблюдаемая реальная цена товара $P_{n3}(t)$ и цена $P_3(t)$, рассчитанная по идентифицированной модели вальрасовского типа

В пятой главе разработан новый метод идентификации параметров рынка (коэффициентов модели и запаздываний) на основе метода наименьших квадратов.

Рассматривается динамическая модель рынка вальрасовского типа с N товарами, описываемая системой дифференциальных уравнений (3)–(4) с N запаздываниями. Функции спроса и предложения берутся линейными. Тогда система принимает вид:

$$\frac{d\ln P(t)}{dt} = A(P(t) - P^*) + B(P(t-\tau) - P^*), \tag{10}$$

где параметры A, B, P^* и τ, вообще говоря, неизвестны и подлежат определению по результатам наблюдений за ценами товаров на некотором интервале времени $t_0 \le t \le T$. Здесь A и B — $N \times N$-матрицы коэффициентов системы, P^* и τ – N-векторы равновесных цен и запаздываний поставок товаров.

Пусть имеется n наблюдений за ценами товаров в моменты времени t_k, $k = \overline{0, n-1}$.

Целевая функция метода наименьших квадратов, зависящая от коэффициентов системы A и B, равновесной цены P^* и запаздывания τ, имеет вид:

$$J = tr\Big(\big(x - Y(P^*,\tau)C\big)^T \big(x - Y(P^*,\tau)C\big)\Big) \Rightarrow \min_{C,\tau,P^*}, \tag{11}$$

где $C = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}^T$ — матрица коэффициентов размерности $2N \times N$, $Y(P^*,\tau) = \begin{pmatrix} \varphi(P^*) & \psi(P^*,\tau) \end{pmatrix}$ — матрица плана размерности $n \times 2N$, а x, φ, ψ — матрицы размерности $n \times N$:

$$x = \left(x_0 \quad x_1 \quad \ldots \quad x_{n-1}\right)^T,\ \varphi = \left(\varphi_0 \quad \varphi_1 \quad \ldots \quad \varphi_{n-1}\right)^T,\ \psi = \left(\psi_0 \quad \psi_1 \quad \ldots \quad \psi_{n-1}\right)^T,$$

$$x_k = \left(\ln\left(\frac{P_1(t_{k+1})}{P_1(t_k)}\right) \quad \ln\left(\frac{P_2(t_{k+1})}{P_2(t_k)}\right) \quad \ldots \quad \ln\left(\frac{P_N(t_{k+1})}{P_N(t_k)}\right)\right)^T,$$

$$\varphi_k(P^*) = h\bigl(P(t_{k+1}) - 2P^* + P(t_k)\bigr)\cdot 1(t_k \ge t_0)/2,$$

$$\psi_k(P^*,\tau) = h\bigl(P(t_{k+1}-\tau) - 2P^* + P(t_k-\tau)\bigr)\cdot 1(t_k - \tau \ge t_0)/2,\ k = \overline{0, n-1}.$$

Находя из (11) оценки коэффициентов C при фиксированных P^*, τ

$$\widehat{C} = \left(Y(P^*,\tau)^T Y(P^*,\tau)\right)^{-1} Y(P^*,\tau)^T x$$

и подставляя их в выражение (11), получим целевую функцию для оценивания P^*, τ:

$$J = tr\Biggl(\left(x - Y(P^*,\tau)\left(Y(P^*,\tau)^T Y(P^*,\tau)\right)^{-1} Y(P^*,\tau)^T x \right)^T \times$$

$$\times \left(x - Y(P^*,\tau)\left(Y(P^*,\tau)^T Y(P^*,\tau)\right)^{-1} Y(P^*,\tau)^T x \right) \Rightarrow \min_{\tau, P^*}.$$

Перебирая с некоторым шагом значения P^* и τ, находим точку $\widehat{P}^*$, $\widehat{\tau}$ минимума $J(P^*,\tau)$ и вычисляем $\widehat{C}$. Этот алгоритм используем для идентификации модели рынка вальрасовского типа с одним и несколькими товарами. В работе проводится оценка точности идентификации в зависимости от шага идентификации и от запаздывания. Показано, как с увеличением шага увеличивается ошибка оценивания параметров модели.

Рассматривается идентификация модели рынка при наличии случайных составляющих в функциях спроса на товары. Случайный спрос моделируется нормально распределенными величинами с нулевым средним и дисперсией σ^2. Для рынка одного товара и нескольких товаров рассматриваются небольшие, средние и большие значения σ^2. Для коэффициентов системы построены $(1-\varepsilon)100\%$-ные доверительные области вида

$$\left(C - \widehat{C}\right)^T Y(\widehat{P}^*,\widehat{\tau})^T Y(\widehat{P}^*,\widehat{C})\left(C - \widehat{C}\right) \le 2N^2 s^2 F_{1-\varepsilon}(2N^2, n-2N^2),$$

где $F_{1-\varepsilon}(2N^2, n-2N^2)$ — квантиль уровня $1-\varepsilon$ F-распределения с $2N^2$ и $n-2N^2$ степенями свободы, $s^2 = J/\left(n-2N^2\right)$ — несмещенная оценка дисперсии ошибки. Показано, что чем больше дисперсия случайной составляющей спроса на товары, тем хуже идентифицируются параметры модели рынка и тем больше доверительная область для этих параметров.

Отмечено, что параметры модели идентифицируются намного лучше при больших значениях запаздываний, когда положение равновесия рынка неустойчиво. Это можно объяснить тем, что увеличение запаздывания ведет к увеличению времени переходного процесса рынка. А идентификация возможна только на переходном процессе. Чем он длиннее, тем больше информации можно получить из наблюдений за ценой товара при идентификации параметров модели и, соответственно, тем лучше можно их оценить.

Один из разделов пятой главы посвящен решению практической задачи идентификации параметров реального рынка одного из типов компьютерных комплектующих — видеокарт. Оказалось, что остаточная сумма квадратов невязок модели вальрасовского типа после МНК-идентификации заметно отличается от нуля. На рис. 12 приведены для сравнения реальная цена и цена, полученная по идентифицированной модели, для одного из рассматриваемых в нашем примере товаров-комплектующих. Максимальная относительная разница между реальными ценами и ценами, рассчитанными по идентифицированной модели вальрасовского типа, в рассмотренном примере не превышает для разных комплектующих 3–10%. Из этого можно сделать вывод, что модель вальрасовского типа хотя и не вполне адекватна реальным данным, не учитывает, возможно, какие-то важные особенности реального рынка, но, тем не менее, достаточно правильно отражает главную закономерность динамики рынка — зависимость цены товара от соотношения спроса и предложения.

Результаты, полученные в пятой главе, опубликованы в работе [6].

В **заключении** подводятся итоги проделанной работы:

1) Проведено построение и исследование следующих динамических моделей рынка вальрасовского типа:

– линейные и нелинейные динамические модели рынка первого порядка, содержащие одну зависимую переменную — рыночную цену товара $P(t)$;

– линейная динамическая модель рынка второго порядка, содержащая две зависимые переменные — рыночную цену товара $P(t)$ и объем продаж $Q(t)$;

– более реалистичная модель третьего порядка, учитывающая изменения во времени не только рыночной цены товара и объема продаж, но и объемов предложения $Q^S(t)$ и спроса $Q^D(t)$;

– нелинейная модель рынка вальрасовского типа со многими товарами, задаваемая системой N дифференциальных уравнений с N запаздываниями.

2) Разработано две формы обобщения численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений на случай уравнений с запаздыванием: обобщения методов Рунге-Кутты и Эйлера с уравниванием без интерполяции и метода Эйлера с уравниванием и интерполяцией.

3) Разработан конструктивный численный алгоритм построения границы области устойчивости системы дифференциальных уравнений с запаздыванием. С помощью этого алгоритма построены границы областей устойчивости моделей рынка вальрасовского типа.

4) Разработана модификация одного из методов стабилизации по квадратичному критерию в положении равновесия решения системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом на основе представления решения схемой Р. Беллмана и К. Кука. Проведено исследование линейных стабилизируемых моделей рынка вальрасовского типа с использованием этого метода.

5) На основе метода наименьших квадратов разработан новый алгоритм идентификации динамической модели рынка, описываемой системой дифференциальных уравнений с запаздываниями, позволяющий совместно оценивать коэффициенты системы и запаздывания.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ*

1. Поддубный В.В., Сухарева Е.А. Исследование свободного и стабилизируемого рынка, описываемого динамической моделью Вальраса-Маршалла с запаздыванием // Вестник Том. гос. ун-та. – 2006. – № 290. – С. 190–198.

2. Поддубный В.В., Сухарева Е.А. Исследование динамической модели рынка вальрасовского типа со многими товарами // Вестник Том. гос. ун-та. – 2006. – № 293. – С. 53–58.

3. Поддубный В.В., Сухарева Е.А. Динамическая модель Вальраса-Маршалла рынка с запаздыванием при параболическом предложении и гиперболическом спросе // Вестник Томского гос. ун-та. Приложение. – 2006. – № 16. – С. 235–239.

4. Поддубный В.В., Сухарева Е.А. О нахождении области устойчивости динамической модели рынка вальрасовского типа со многими товарами // Вестник Том. гос. ун-та. Приложение. – 2006. – № 19. – С. 322–327.

5. Сухарева Е.А. Динамическая модель рынка вальрасовского типа с *N* товарами при параболическом предложении и гиперболическом спросе // Студент и научно-технический прогресс: Материалы XLIV Международной научной студенческой конференции. Математика. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2006. – С. 165–166.

6. Сухарева Е.А. Идентификация динамической модели рынка вальрасовского типа // Научное творчество молодежи: Материалы XI Всероссийской научно-практической конференции (20–21 апреля 2007 г.). Ч. 1. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. – С. 50–54.

7. Поддубный В.В., Сухарева Е.А. Динамическая модель рынка Вальраса-Маршалла с запаздыванием при параболическом предложении и гиперболическом спросе // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2005): Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции (18–19 ноября 2005 г.). Ч.2. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2005. – С.108–110.

8. Поддубный В.В., Сухарева Е.А. Динамическая модель рынка вальрасовского типа с двумя товарами при параболическом предложении и гиперболическом спросе // Наука и образование: Материалы VI Международной научной конференции (2–3 марта 2006 г.): В 4 ч. Ч. 1. Математическое моделирование и информатика. – Белово: Беловский полиграфист, 2006. – С.263–267.

9. Поддубный В.В., Сухарева Е.А. Устойчивость динамической модели рынка вальрасовского типа со многими товарами // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ – 2006): Материалы V Международной научно-практической конференции (10–11 ноября 2006 г.). Ч.2. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. – С. 127–129.

* Справка: в 2007 г. в связи со вступлением в брак Сухарева сменила фамилию на Червонную.