

На правах рукописи

Кашковский Денис Викторович

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ
ПРОЦЕССОВ АВТОРЕГРЕССИИ
СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

05.13.01 – системный анализ, управление и обработка информации
(в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2008

Работа выполнялась в Томском государственном университете.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор
Конев Виктор Васильевич

Официальные оппоненты:

доктор технических наук, профессор
Рубан Анатолий Иванович

кандидат физико-математических наук, доцент
Колесникова Светлана Ивановна

Ведущая организация:

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
(г. Новосибирск)

Зашита состоится:

15 мая 2008 г. в 10:30 на заседании диссертационного совета Д 212.267.12
при Томском государственном университете по адресу: 634050, г. Томск,
пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться:

В Научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан:

17 марта 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.т.н., профессор

В.И. Смагин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Известно, что идентификация является необходимым и наиболее сложным этапом при решении многих прикладных задач, для построения адекватных моделей, которые используются при проектировании сложных систем. Этим вызвана актуальность задачи идентификации. Построение моделей не исключает и возможности качественного анализа системы, отнесения ее к некоторому классу. Для этого необходимо решение задач классификации.

До решения задач идентификации и классификации возникает проблема выбора структуры модели, адекватно описывающей заданную систему. Модель может точно воспроизводить исследуемую систему и вполне соответствовать ей. Но на практике это возможно лишь в редких случаях. Модели в основном используются для предсказания и управления. Поэтому модель должна быть настолько подробной, насколько необходимо для этих целей. Слишком подробная модель обычно усложняет анализ исходной системы, поскольку требует обработки большого объема данных. Поэтому в случае, когда модель имеет много параметров, необходимо провести ее качественное преобразование в сторону уменьшения сложности. Примером такого преобразования может быть переход от процесса авторегрессии высокого порядка к модели авторегрессии со случайными коэффициентами более низкого порядка. В данной работе рассматривается проблема идентификации такой модели с позиций последовательного анализа, который предполагает, что длительность оценивания зависит от текущей реализации процесса.

Другой причиной использования модели авторегрессии со случайными коэффициентами может быть реальное наличие возмущений параметров системы. Известно, что в задачах адаптивного управления, фильтрации и прогнозирования важное место занимают динамические системы, описываемые линейными стохастическими разностными уравнениями с неизвестными параметрами. Для идентификации линейных динамических систем разработаны различные эффективные методы: наименьших квадратов, максимального правдоподобия, стохастической аппроксимации и др. При этом неизвестные параметры линейных систем, как правило, считаются постоянными во времени. В действительности они могут быть подвержены действию случайных возмущений и оставаться постоянными только в среднем. Естественно ожидать, что алгоритмы идентификации

и классификации, не учитывающие действие указанных помех, могут приводить к неверным результатам. Поэтому возникает необходимость разработки алгоритмов идентификации и классификации в моделях со случайными параметрами.

Цель диссертационной работы. Построение одноэтапного последовательного алгоритма оценивания процесса авторегрессии со случайными коэффициентами, обеспечивающего заданную среднеквадратическую точность, разработка последовательной процедуры идентификации модели авторегрессии со случайными коэффициентами и управляющими воздействиями, построение последовательного алгоритма классификации процессов авторегрессии со случайными коэффициентами с заданной вероятностью правильного решения, исследование асимптотических свойств среднего времени оценивания и классификации, исследование асимптотических свойств статистик, по которым выносится решение о принятии гипотезы, экспериментальное исследование алгоритмов и сравнение с известными процедурами.

Методы исследования. Для решения поставленных задач применялись методы теории вероятностей, последовательного анализа, численные методы, а также компьютерные эксперименты.

Научная новизна. Результаты выносимые на защиту. Научная новизна работы состоит в разработке алгоритмов гарантированной идентификации и классификации процессов авторегрессии со случайными коэффициентами. Результаты выносимые на защиту:

1) Последовательная одноэтапная процедура оценивания линейных параметров процесса авторегрессии со случайными коэффициентами, которая обеспечивает гарантированное в среднеквадратическом смысле оценивание неизвестных параметров.

2) Асимптотика среднего времени оценивания, верхняя граница среднеквадратического уклонения оценки.

3) Последовательный одноэтапный алгоритм идентификации параметров процесса авторегрессии со случайными коэффициентами при наличии управляющих воздействий, который дает возможность оценить неизвестные параметры динамики и коэффициенты при управляющих воздействиях с заданной среднеквадратической точностью.

4) Последовательная процедура классификации процесса авторегрессии со случайными коэффициентами с гарантированной вероятностью правильного решения.

5) Асимптотика среднего времени классификации и асимптотические

свойства основных статистик в решающей процедуре классификации.

6) Формула для спектральной плотности стационарного процесса авторегрессии со случайными коэффициентами.

Теоретическая ценность работы состоит в аналитическом решении задачи оценивания параметров авторегрессии со случайными коэффициентами с гарантированной среднеквадратической точностью, а также в аналитическом решении задачи классификации процессов такого типа с гарантированной вероятностью правильного решения.

Практическое значение работы. Полученные алгоритмы последовательного оценивания и классификации можно использовать в задачах обработки временных рядов, в задачах управления, в задачах компьютерной надежности, в физической медицине для расчета накопления в организме и вывода из него тяжелых элементов, а также в финансовой математике для описания стоимостей акций.

Апробация работы. Работа выполнялась в рамках научно-исследовательской работы при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Основные положения диссертации докладывались и обсуждались на кафедре Высшей математики и математического моделирования ТГУ, а также на следующих конференциях:

- на Всероссийской научной конференции молодых ученых "Наука. Технологии. Инновации" в г. Новосибирске, НГТУ, декабрь 2005г.;

- на Международной конференции студентов и молодых ученых "Перспективы развития фундаментальных наук" в г. Томске, ТПУ, май 2007г.;

- на четырнадцатой Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастическим методам, восьмом Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике в г. Сочи - Адлер, сентябрь - октябрь 2007г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 печатных работ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4-х глав, заключения, списка использованной литературы и 4-х приложений. Работа содержит 133 страницы машинописного текста, 15 рисунков, 10 таблиц. Список литературы включает 55 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении раскрывается актуальность исследуемой проблемы, приводится обзор известных результатов, формулируется цель и

содержание работы, обосновывается ее теоретическая и практическая ценность.

В работе рассматривается модель авторегрессии со случайными коэффициентами

$$x_k = a_1(k)x_{k-1} + \dots + a_p(k)x_{k-p} + \sigma_0 \varepsilon_k, \quad (1)$$

$$a_i(k) = a_i + \sigma_i \eta_i(k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\{\varepsilon_k\}$, $\{\eta_i(k)\}$, $i = \overline{1, p}$ — независимые последовательности независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией. Во введении создаются предпосылки для последовательного анализа этого процесса.

В связи с актуальностью предлагаемой модели желательно иметь возможность оценить для нее спектральную плотность. Наличие точного выражения для этой функции позволило бы провести такую оценку. Точное выражение для спектра приводится во введении и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f(\lambda) = & \frac{\sigma_0^2}{2\pi} \left[\sum_{j=1}^p \langle D_a(I_{p^2} - D_a)^{-1} \rangle_{j1} \times \right. \\ & \times \left(\langle e^{i\lambda} A(I_p - e^{i\lambda} A)^{-1} \rangle_{1j} + \langle e^{-i\lambda} A(I_p - e^{-i\lambda} A)^{-1} \rangle_{1j} \right) + \\ & + \langle e^{i\lambda} A(I_p - e^{i\lambda} A)^{-1} \rangle_{11} + \langle e^{-i\lambda} A(I_p - e^{-i\lambda} A)^{-1} \rangle_{11} + \\ & \left. + \langle D_a(I_{p^2} - D_a)^{-1} \rangle_{11} + 1 \right], \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \\ I_{p-1} & & 0 \end{pmatrix}, \quad D_a = A \otimes A + C, \quad C = E\Gamma_k \otimes \Gamma_k,$$

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} \sigma_1 \eta_1(k) & \dots & \sigma_p \eta_p(k) \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

I_{p-1} — единичная матрица порядка $p - 1$, $A \otimes B = [a_{ij}B]$ обозначает кронекерово произведение квадратных матриц A и B , $\langle A \rangle_{ij}$ — элемент i, j матрицы A .

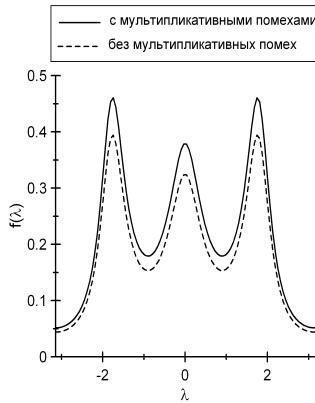


Рис. 1. Спектральная плотность

На рисунке 1 приведены графики спектральной плотности процесса авторегрессии со случайными коэффициентами третьего порядка для случаев наличия и отсутствия мультипликативных помех при $a_1 = 0, 3$, $a_2 = -0, 3$, $a_3 = 0, 3$. При наличии мультипликативных помех их уровень был следующий: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0, 2$.

В случае отсутствия мультипликативных помех процесс сводится к авторегрессии с постоянными коэффициентами, а его спектральная плотность приобретает известный вид:

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_0^2}{2\pi} \frac{1}{|Q(e^{-i\lambda})|^2},$$

где $Q(z) = 1 - a_1z - \dots - a_pz^p$.

В первой главе решается задача построения процедуры последовательного оценивания параметров процесса авторегрессии со случайными коэффициентами (1) с гарантированной среднеквадратической точностью.

В модели (1) вектор начальных воздействий $X_0 = (x_0, x_{-1}, \dots, x_{-p+1})'$ с $E\|X_0\|^2 < +\infty$ не зависит от последовательностей $\{\varepsilon_k\}$, $\{\eta_i(k)\}$; штрих обозначает транспонирование. Параметры $\sigma_0 > 0$, $\sigma_i \geq 0$ являются постоянными. Вектор параметров $\theta = (a_1, \dots, a_p)'$ неизвестен и должен быть оценен по наблюдениям процесса $\{x_k\}$. В случае гауссовых шумов ε_k , $\{\eta_i(k)\}$ модель (1) допускает следующее эквивалентное представление в виде процесса авторегрессии с ARCH

шумами (авторегрессия с условной гетероскедастичностью):

$$x_k = a_1 x_{k-1} + \dots + a_p x_{k-p} + \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 x_{k-1}^2 + \dots + \sigma_p^2 x_{k-p}^2} \tilde{\varepsilon}_k,$$

где $k = 1, 2, \dots$, $(\tilde{\varepsilon}_k)_{k \geq 1}$ последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин.

Построение процедуры последовательного оценивания происходит следующим образом. Процесс (1) преобразуется к виду

$$x_k = \theta' X_{k-1} + \psi_k,$$

где $X_{k-1} = (x_{k-1}, \dots, x_{k-p})'$, $\psi_k = \sum_{i=1}^p \sigma_i \eta_i(k) x_{k-i} + \sigma_0 \varepsilon_k$. Отсюда находится оценка МНК для θ по наблюдениям (x_{-p+1}, \dots, x_n) :

$$\theta(n) = M_n^{-1} \sum_{k=1}^n X_{k-1} x_k, \quad M_n = \sum_{k=1}^n X_{k-1} X'_{k-1}, \quad (2)$$

где $n \geq n_0$, $n_0 = \inf\{l \geq 1; \lambda_{\min}(M_l) > 0\}$, $\lambda_{\min}(A)$ обозначает минимальное собственное значение матрицы A .

Для оценки МНК (2) найти среднеквадратическую точность не представляется возможным из-за наличия случайной обратной матрицы M_n^{-1} в формуле (2). Поэтому используется последовательный вариант оценки МНК. Для каждого $h > 0$ вводится момент остановки

$$\tau(h) = \inf \left\{ n \geq n_0 : \|M_n^{-2}\|^{1/2} \leq h^{-1} \right\}, \quad (3)$$

где $\|A\|^2 = \text{tr}AA'$. Определяется последовательная оценка $\theta^*(h)$ вектора неизвестных параметров θ по формулам

$$\theta^*(h) = \tilde{M}_{\tau(h)}^{-1} \sum_{k=1}^{\tau(h)} \beta_k X_{k-1} x_k, \quad \tilde{M}_{\tau(h)} = \sum_{k=1}^{\tau(h)} \beta_k X_{k-1} X'_{k-1}, \quad (4)$$

где $\beta_k = 1$, если $k < \tau(h)$ и $\beta_k = \alpha(h)$, если $k = \tau(h)$; множитель $\alpha(h)$ определяется из уравнения

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{\tau(h)-1} X_{k-1} X'_{k-1} + \alpha(h) X_{\tau(h)-1} X'_{\tau(h)-1} \right)^{-2} \right\|^{1/2} = h^{-1}.$$

При изучении свойств последовательного плана $(\tau(h), \theta^*(h))$ оценивания параметров процесса (1) были введены условия на распределения шумов $\{\varepsilon_k\}$ и $\{\eta_i(k)\}$ и параметры $a_i, \sigma_i, i = \overline{1, p}$:

а) все корни характеристического уравнения

$$z^p - a_1 z^{p-1} - \dots - a_p = 0$$

лежат внутри единичного круга;

- а') все собственные значения матрицы D_a по модулю меньше 1;
- б) распределение ε_k имеет положительную плотность (относительно меры Лебега) в интервале $[-a, a]$ для некоторого $a > 0$;
- с) $E\|X_0\|^8 < \infty, E\varepsilon_1^8 < \infty, E\eta_1^8(1) < \infty$;
- д) все собственные значения матрицы $E_\theta A_1^{\otimes 8}$ меньше единицы по модулю, где $A_1 = A + \Gamma_1$;

- е) $t_1(\theta) = 3^6 \left(\sum_{j \geq 0} \|A^j\|^2 \right)^4 \|\Sigma\|^4 < 1, \Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2)$;
- ф) $t_2(\theta) = \kappa_A [6\|A'A\|\sigma_*^2 + \sigma_*^4 (|E\eta_1^4(1) - 3| + 3)] < 1$, где $\kappa_A = \left\| \sum_{j \geq 0} (A' \otimes A')^j (A \otimes A)^j \right\|, \sigma_* = \max \sigma_j$;
- г) $\sigma_*^2 \text{tr} S < 1$, где $S = \sum_{j \geq 0} A^j B_0 (A')^j$,

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Выполняется следующее свойство выборочной информационной матрицы M_n .

Предложение 1.1. Пусть для процесса (1) выполнены условие с), а также условие а), если $\sigma_i = 0, i = \overline{1, p}$, и условия а'), б), д), если $\sigma_1 + \dots + \sigma_p > 0$. Тогда с вероятностью единица существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n} = F,$$

где F удовлетворяет уравнению

$$F - AFA' = (\sigma_0^2 + \text{tr}\Sigma F) \|\delta_{1i} \delta_{1j}\|. \quad (5)$$

Также если условие а') выполняется, матрица F положительно определена. Установленные свойства матриц M_n и F гарантируют конечность п. н. процедуры оценивания.

Изучено асимптотическое поведение средней длительности процедуры (3), (4). Через Λ_0 обозначим область устойчивости процесса (1) при отсутствии мультиплекативных помех ($\sigma_1 = \dots = \sigma_p = 0$), т.е.

$$\Lambda_0 = \{\theta \in \mathbb{R}^p : \text{выполнено условие а}\},$$

а через Λ_σ обозначим ту часть параметрической области устойчивости процесса (1), в которой выполняются условия а'), д), е), т.е.

$$\Lambda_\sigma = \{\theta \in \mathbb{R}^p : |\lambda_{\max}(E_\theta A_1 \otimes A_1)| < 1, |\lambda_{\max}(E_\theta A_1^{\otimes 8})| < 1\}, \quad (6)$$

$$t_1(\theta) < 1,$$

где $\lambda_{\max}(A)$ — наибольшее по модулю собственное значение матрицы A . При $\sigma_1 = \dots = \sigma_p = 0$, $\Lambda_\sigma = \Lambda_0$. Асимптотическое поведение средней длительности процедуры (3), (4) дается следующей теоремой.

Теорема 1.1. *Пусть для процесса (1) выполняются условие б), если $\sigma_1 + \dots + \sigma_p > 0$, а также условие с), и K — компакт из области Λ_σ . Тогда*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in K} \left| E_\theta \frac{\tau(h)}{h} - \|F^{-2}\|^{1/2} \right| = 0,$$

где F определяется в (5).

Найдена верхняя граница для среднеквадратической точности оценки.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условие с) и условие б), если $\sigma_1 + \dots + \sigma_p > 0$, и в области Λ_σ , определяемой в (6), выполняются условия а), ф): $t_2(\theta) < 1$ и г). Пусть также распределения помех ε_k и $\eta_i(k)$ в (1) симметричны. Тогда для любого компакта $K \in \Lambda_\sigma$*

$$\sup_{\theta \in K} E_\theta \|\theta^*(h) - \theta\|^2 \leq \frac{\sup_{\theta \in K} \psi_\sigma(\theta) + o(1)}{h}.$$

Здесь $o(1) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \psi_\sigma(\theta) = & \frac{\sigma_0^4 \|F^{-2}\|^{1/2} \text{tr} S}{1 - \sigma_*^2 \text{tr} S} + \\ & + \frac{\kappa_A \sigma_*^2 \sigma_0^4 \|F^{-2}\|^{1/2}}{1 - t_2(\theta)} \left[6(\|A' A\| + \sigma_*^2) \frac{\text{tr} S}{1 - \sigma_*^2 \text{tr} S} + E \varepsilon_1^4 \right]. \end{aligned}$$

Во второй главе решалась задача построения процедуры гарантированного последовательного оценивания параметров процесса авторегрессии со случайными коэффициентами и управляющими воздействиями

$$x_k = a_1(k)x_{k-1} + \dots + a_p(k)x_{k-p} + b_1(k)u_{k-1} + \dots + b_q(k)u_{k-q} + \sigma_0 \varepsilon_k, \quad (7)$$

$$a_i(k) = a_i + \sigma_i \eta_i(k), \quad b_j(k) = b_j + \Delta_j \gamma_j(k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\{\varepsilon_k\}$, $\{\eta_i(k)\}$, $i = \overline{1, p}$, и $\{\gamma_j(k)\}$, $j = \overline{1, q}$, — независимые последовательности н.о.р. случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией; $\{u_k\}$ — детерминированная последовательность входных воздействий; вектор начальных воздействий $X_0 = (x_0, x_{-1}, \dots, x_{-p+1})$ с $E\|X_0\|^2 < +\infty$ не зависит от последовательностей $\{\varepsilon_k\}$, $\{\eta_i(k)\}$, $\{\gamma_j(k)\}$; $\sigma_0 > 0$, $\sigma_i \geq 0$, $\Delta_j \geq 0$ — постоянные параметры. При отсутствии управляющих воздействий система (7) приобретает вид (1). Вектор параметров $\theta = (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)'$ неизвестен и должен быть оценен по наблюдениям процесса $\{x_k\}$.

Оценка вектора неизвестных параметров $\theta = (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)'$ строилась следующим образом:

$$\theta^*(h) = \tilde{M}_{\tau(h)}^{-1} \sum_{k=1}^{\tau(h)} \beta_k Y_{k-1} x_k, \quad \tilde{M}_{\tau(h)} = \sum_{k=1}^{\tau(h)} \beta_k Y_{k-1} Y'_{k-1}, \quad (8)$$

где

$$\tau(h) = \inf \left\{ n \geq n_0 : \|M_n^{-2}\|^{1/2} \leq h^{-1} \right\}, \quad (9)$$

$$Y_{k-1} = (X'_{k-1}, U'_{k-1})', \quad U_{k-1} = (u_{k-1}, \dots, u_{k-q})',$$

$$M_n = \sum_{k=1}^n Y_{k-1} Y'_{k-1},$$

$n_0 = \inf\{l \geq 1; \lambda_{\min}(M_l) > 0\}$, $\beta_k = 1$, если $k < \tau(h)$ и $\beta_k = \alpha(h)$, если $k = \tau(h)$; множитель $\alpha(h)$ определяется из уравнения

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{\tau(h)-1} Y_{k-1} Y'_{k-1} + \alpha(h) Y_{\tau(h)-1} Y'_{\tau(h)-1} \right)^{-2} \right\|^{1/2} = h^{-1}.$$

При изучении свойств последовательного плана $(\tau(h), \theta^*(h))$ оценивания параметров в случае наличия управления были введены

дополнительные условия на распределения шумов $\{\varepsilon_k\}$, $\{\eta_i(k)\}$, $\{\gamma_i(k)\}$ и на входные воздействия:

$$c') E\gamma_1^8(1) < \infty;$$

$$e') \tilde{t}_1(\theta) = 3^3 7^3 \left(\sum_{j \geq 0} \|A^j\|^2 \right)^4 \|\Sigma\|^4 < 1, \text{ где } \Sigma \text{ определяется в условии e);}$$

$$f') \tilde{t}_2(\theta) = \kappa_A [6l_{20}\sigma_*^2 + \sigma_*^4 (|E\eta_1^4(1)-3|+3) + 0,08l_{21}C^{1/2} + 1,5l_{01}C^{1/2}\sigma_*^2] < 1.$$

Здесь $l_{ij} = \|A'A\|^{i/2} \|B'B\|^{j/2}$,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_q \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

C — константа из условия h);

$$h) \|U_k\|^2 \leq C < \infty, k = 0, 1, \dots;$$

i)

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_{k-1} U'_{k-1} = Q + O(n^{-1/2}), \quad \sup_{\theta \in K} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n W_k U'_k - L \right\| = O(n^{-1/2}),$$

где $n \rightarrow \infty$, Q — положительно определенная матрица, $W_k = \sum_{l=0}^{k-1} A^l B U_{k-l-1}$, K — любой компакт из области параметров, удовлетворяющих условию а).

Исследовалось асимптотическое поведение выборочной информационной матрицы M_n .

Предложение 2.1. Пусть для процесса (7) выполнены условия a), c), c'), h) и i), а также условия a'), b), d), если $\sigma_1 + \dots + \sigma_p > 0$. Тогда с вероятностью единица существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n} = F, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 & L \\ L' & Q \end{pmatrix}, \quad (10)$$

причем F_1 — матрица, удовлетворяющая уравнению

$$F_1 - AF_1A' = \varphi \|\delta_{1i}\delta_{1j}\| + ALB' + BL'A',$$

$$\varepsilon \partial \varphi = \sigma_0^2 + b'Qb + \text{tr} \Sigma F_1 + \sum_{l=1}^q < Q >_L \Delta_l^2, \quad b = (b_1, \dots, b_q).$$

Предельная матрица F естественно должна удовлетворять условию положительной определенности:

j) $\det F > 0$.

Это требование является по существу ограничением на уровень управляющих воздействий u_k в уравнении (7).

Установленное свойство матрицы M_n , а также условие j) гарантируют конечность п. н. процедуры оценивания.

Рассматривалось асимптотическое поведение средней длительности процедуры (8), (9). Обозначим через Λ_0 область устойчивости процесса (7) с ограничением j) при отсутствии мультиплекативных помех ($\sigma_1 = \dots = \sigma_p = 0$), т.е.

$$\Lambda_0 = \{\theta \in \mathbb{R}^{p+q} : \text{выполнены условия а) и j)}\}, \quad (11)$$

а через Λ_σ обозначим ту часть параметрической области устойчивости процесса (7), в которой выполняются условия а'), д), е') и j), т.е.

$$\begin{aligned} \Lambda_\sigma = \{\theta \in \mathbb{R}^{p+q} : |\lambda_{\max}(E_\theta A_1 \otimes A_1)| < 1, |\lambda_{\max}(E_\theta A_1^{\otimes 8})| < 1, \\ \tilde{t}_1(\theta) < 1, \det F > 0\}. \end{aligned} \quad (12)$$

В следующей теореме дано асимптотическое поведение средней длительности процедуры (8), (9).

Теорема 2.1. Пусть для процесса (7) выполняются условие b), если $\sigma_1 + \dots + \sigma_p > 0$, а также условия c), c'), h), i) и K — компакт из области Λ_σ . Тогда

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in K} \left| E_\theta \frac{\tau(h)}{h} - \|F^{-2}\|^{1/2} \right| = 0,$$

где F определяется в (10).

Была получена верхняя граница для среднеквадратической точности оценки (8), (9). Сначала рассматривался случай отсутствия мультиплекативных помех при параметрах a_k .

Теорема 2.2. Пусть $\sigma_1 = \dots = \sigma_p = 0$ и выполнены условия c), c'), h), i). Тогда для любого компакта $K \in \Lambda_0$

$$\sup_{\theta \in K} E_\theta \|\theta^*(h) - \theta\|^2 \leq \frac{c_K}{h} (1 + o(1)),$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$, $c_K = \sup_{\theta \in K} \psi_0(\theta)$, $\psi_0(\theta) = (\sigma_0^2 + C\Delta_*^2)\|F^{-2}\|^{1/2}(C + \text{tr}F_1)$, $\Delta_* = \max_j \Delta_j$, Λ_0 определяется в (11).

При одновременном действии случайных возмущений на параметры динамики a_k и на коэффициенты при управлении b_j , граница для

среднеквадратической точности оценки зависит от большего числа параметров и становится более сложной.

Теорема 2.3. Пусть $\sigma_1 + \dots + \sigma_p > 0$, выполнены условия $b), c), c')$, $h)$, $i)$ и, кроме того, в области Λ_σ , определяемой в (12), выполняются условия $a)$ и $f)$: $\tilde{t}_2(\theta) < 1$. Пусть также распределения помех ε_k , $\eta_i(k)$ и $\gamma_i(k)$ в (7) симметричны. Тогда для любого компакта $K \in \Lambda_\sigma$

$$\sup_{\theta \in K} E_\theta \|\theta^*(h) - \theta\|^2 \leq \frac{d_K}{h} (1 + o(1)),$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$, $d_K = \sup_{\theta \in K} (\psi_0(\theta) + \psi_1(\theta))$, функция $\psi_1(\theta)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \psi_1(\theta) = & \|F^{-2}\|^{1/2} \left(C \text{tr} \Sigma F_1 + \frac{\kappa_A \sigma_*^2}{1 - \tilde{t}_2(\theta)} [6(\sigma_0^2 + l_{02}C + C\Delta_*^2) \times \right. \\ & \times (\text{tr} \Sigma F_1 + \text{tr} A F_1 A') + (2l_{03}C^{3/2} + 6l_{01}C^{3/2}\Delta_*^2 + 6\sigma_0^2 l_{01}C^{1/2})(\text{tr} A F_1 A' + 1) + \\ & + (50l_{21}C^{1/2} + 24l_{01}C^{1/2}\sigma_*^2) \text{tr} A F_1 A' + \sigma_0^4 E \varepsilon_1^4 + l_{04}C^2 + 6\sigma_0^2 C(l_{02} + \Delta_*^2) + \\ & \left. + 6l_{02}\Delta_*^2 C^2 + \Delta_*^4 [|E \gamma_1^4(1) - 3| + 3]C^2] \right). \end{aligned}$$

В третьей главе решается задача построения процедуры последовательной классификации процессов авторегрессии со случайными коэффициентами.

Пусть относительно наблюдаемого процесса $\{x_k\}$ имеется s различных статистических гипотез H_1, \dots, H_s , одна из которых истинна. Согласно гипотезе H_i , процесс $\{x_k\}$ является процессом авторегрессии со случайными коэффициентами

$$x_k = (a_1^{(i)} + \sigma_1^{(i)} \eta_1(k))x_{k-1} + \dots + (a_p^{(i)} + \sigma_p^{(i)} \eta_p(k))x_{k-p} + \sigma_0^{(i)} \varepsilon_k, \quad (13)$$

где $k = 1, 2, \dots$, $i = \overline{1, s}$, $\{\varepsilon_k\}_{k \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $E\varepsilon_k = 0$, $E\varepsilon_k^2 = 1$, $\sigma_0^{(i)} > 0$, $\{(\eta_1(k), \dots, \eta_p(k))'\}_{k \geq 1}$ — независимая от $\{\varepsilon_k\}_{k \geq 1}$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов, компоненты которых также независимы, с $E\eta_i(k) = 0$, $E\eta_i(k)^2 = 1$, $1 \leq i \leq p$. Вектор начальных значений $X_0 = (x_0, x_{-1}, \dots, x_{-p+1})'$ с $E_\theta \|X_0\|^2 < +\infty$ не зависит от последовательностей $\{\varepsilon_k\}$, $\{\eta_i(k)\}$, $1 \leq i \leq p$. Предполагается, что каждой гипотезе

H_i отвечают свои вектора параметров $\theta^{(i)} = (a_1^{(i)}, \dots, a_p^{(i)})$ и $\sigma^{(i)} = (\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_p^{(i)})$, и вектора $\theta^{(i)}$ различаются как минимум по одной координате. Задача состоит в том, чтобы по наблюдениям процесса x_k построить процедуру классификации с заданной вероятностью правильного решения.

При фиксированной длительности наблюдений, стремящейся к бесконечности, свойства процедуры классификации исследовать не удается. В неасимптотической же постановке, когда объем выборки конечен, задача классификации процессов (13) не изучена.

Для модели (13) предлагается одноэтапная последовательная процедура классификации процессов авторегрессии со случайными коэффициентами. Процедура строится следующим образом. Вводятся статистики

$$\varphi_{ij}(h) = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\tau_{ij}(h)} \alpha_{ij}^{(k)}(h) W_{ij}(k-1)(x_k - \Xi_j(k-1)), \quad (14)$$

где

$$\Xi_i(k) = a_1^{(i)} x_k + \dots + a_p^{(i)} x_{k-p+1}, \quad W_{ij}(k) = (\Xi_i(k) - \Xi_j(k)) B_{ij}^{-2}(k),$$

$$B_{ij}(k) = \max \left(\sqrt{\sigma_0^{(i)2} + X_k' \Sigma_i X_k}, \sqrt{\sigma_0^{(j)2} + X_k' \Sigma_j X_k} \right),$$

$$\Sigma_i = \text{diag} \left(\sigma_1^{(i)2}, \dots, \sigma_p^{(i)2} \right),$$

$$\alpha_{ij}^{(k)}(h) = \begin{cases} 1, & \text{если } k < \tau_{ij}(h), \\ \bar{\alpha}_{ij}(h), & \text{если } k = \tau_{ij}(h). \end{cases}$$

Здесь $\tau_{ij}(h)$ — моменты остановки, определяемые по формулам

$$\tau_{ij}(h) = \inf \left\{ m \geq 1 : \sum_{k=1}^m W_{ij}^2(k-1) B_{ij}^2(k-1) \geq h \right\}, \quad (15)$$

$\bar{\alpha}_{ij}(h)$ находятся из уравнений

$$\sum_{k=1}^{\tau_{ij}(h)-1} W_{ij}^2(k-1) B_{ij}^2(k-1) + \bar{\alpha}_{ij}(h) W_{ij}^2(\tau_{ij}(h)-1) B_{ij}^2(\tau_{ij}(h)-1) = h.$$

По системе статистик $\varphi_{ij}(h)$, $1 \leq i, j \leq s$, выносится решение d_l об истинности гипотезы H_l , если для всех $i \neq l$ выполняются неравенства $\varphi_{il}(h) < 1/2$. В случае, когда указанное условие не выполняется ни для одной из гипотез, принимается решение d_s . Общее число наблюдений составляет

$$\tau(h) = \max_{i \neq j} \tau_{ij}(h).$$

Для изучения свойств процедуры классификации уравнение (13) представляется в векторном виде:

$$X_k = A_k^{(i)} X_{k-1} + \zeta_k^{(i)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

где $X_k = (x_k, \dots, x_{k-p+1})'$, $\zeta_k^{(i)} = (\sigma_0^{(i)} \varepsilon_k, 0, \dots, 0)'$,

$$A_k^{(i)} = \begin{pmatrix} a_1^{(i)} + \sigma_1^{(i)} \eta_1(k) & \dots & a_p^{(i)} + \sigma_p^{(i)} \eta_p(k) \\ I_{p-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq s.$$

Также вводятся следующие условия:

- a) собственные значения матриц $E A_1^{(i)} \otimes A_1^{(i)}$ по модулю меньше единицы;
- b) $\sigma_0^{(1)} = \dots = \sigma_0^{(s)} = \sigma_0$, $\sigma^{(1)} = \dots = \sigma^{(s)} = \sigma$;
- c) $\sigma_i > 0$, $i = \overline{1, p}$;
- d) плотность $g(x)$ вектора $(\varepsilon_1, \eta_1(1), \dots, \eta_p(1))'$ существует, всюду положительна и полунепрерывна снизу, т.е. $\liminf_{y \rightarrow x} g(y) \geq g(x)$.

Для рассмотрения основных результатов по процедуре классификации потребуются обозначения

$$U_l = E_l \frac{\tilde{X}_0 \tilde{X}'_0}{\sigma_0^2 + \tilde{X}'_0 \Sigma \tilde{X}_0}, \quad f_{ij}^{(l)} = (\theta^{(i)} - \theta^{(j)})' U_l (\theta^{(i)} - \theta^{(j)}),$$

$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2)$, где \tilde{X}_n — стационарное решение (16), E_l означает математическое ожидание при условии, что справедлива гипотеза H_l .

Далее приводятся основные результаты по предложенной процедуре классификации.

Теорема 3.1. При условиях а), д) и при истинности гипотезы H_l для всех $h > 0$ процедура классификации (14), (15) обладает свойствами:

- а) $\tau(h) < \infty$ п. н.;
- б) вероятность правильной классификации $P_l(d_l)$ удовлетворяет неравенству

$$P_l(d_l) \geq 1 - \frac{4(s-1)}{h},$$

где P_l обозначает распределение процесса при условии, что справедлива гипотеза H_l .

Теорема 3.2 При условиях а), б), в), г)

$$\lim_{h \rightarrow \infty} E_l \frac{\tau(h)}{h} = \frac{1}{f^{(l)}},$$

где $f^{(l)} = \min_{i \neq j} f_{ij}^{(l)}$.

Теорема 3.3 При условиях теоремы 3.2 вектор статистик $\sqrt{h}\Phi_l(h) = \sqrt{h}(\varphi_{1l}(h), \dots, \varphi_{l-1l}(h), \varphi_{l+1l}(h), \dots, \varphi_{sl}(h))'$ является асимптотически нормальным (при $h \rightarrow \infty$) с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $T(l)$ с элементами

$$t_{ij}(l) = (\theta^{(i)} - \theta^{(l)})' U_l (\theta^{(j)} - \theta^{(l)}) \min(f_{il}^{(l)-1}, f_{jl}^{(l)-1}).$$

В работе приведен алгоритм нахождения матрицы U_k в случае, когда помехи имеют гауссовское распределение.

В четвертой главе приводятся результаты экспериментального исследования построенных алгоритмов идентификации и классификации.

Для численного исследования свойств процедуры идентификации (3), (4) моделировался процесс второго порядка

$$x_n = (a_1 + \sigma_1 \eta_1(n))x_{n-1} + (a_2 + \sigma_2 \eta_2(n))x_{n-2} + \varepsilon_n, \quad (17)$$

где $\eta_i(n), \varepsilon_n$ — независимые гауссовские случайные величины с параметрами $(0, 1)$; $x_0 = x_{-1} = 0$. Изучались асимптотическое поведение средней длительности оценивания в последовательном плане (3), (4) и среднеквадратическая точность последовательной оценки $\theta^*(h)$. Также сравнивались выборочные стандартные отклонения последовательной оценки (3), (4) и оценки наименьших квадратов (2). При этом число наблюдений в непоследовательной процедуре бралось равным средней продолжительности последовательной процедуры.

В работе результаты моделирования представлены в таблицах и графиках.

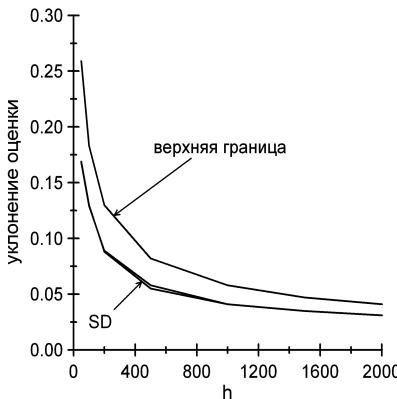


Рис. 2. Зависимости выборочных стандартных отклонений оценок от величины порога h

На рисунке 2 проиллюстрированы зависимости выборочных стандартных отклонений оценки $\theta^*(h)$ и оценки МНК $\theta(n)$ от величины порога h при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,1$, $a_1 = 0,1$, $a_2 = 0,5$. На рисунке кривые этих зависимостей обозначены SD . Также на рисунке 2 для сравнения приведена зависимость теоретической верхней границы для стандартного отклонения оценки $\theta^*(h)$, которая получена в теореме 1.2, от величины порога h . Как видно из рисунка, верхняя граница стандартного уклонения $\sqrt{\varphi_\sigma(\theta)/h}$ имеет приемлемое значение при величине порога $h = 500$ и выше. При этом несколько большее значение этой величины по сравнению с выборочным стандартным отклонением оценки $\theta^*(h)$ объясняется по - видимому тем, что граница справедлива для широкого класса распределений.

Основные выводы по результатам численного моделирования процедуры идентификации процесса (17) состоят в следующем.

1. Установлено, что асимптотика выборочного среднего времени оценивания удовлетворяет полученному теоретическому соотношению (см. теорему 1.1).

2. По результатам численного исследования видно, что теоретическая граница среднеквадратической точности в процедуре оценивания (3), (4), полученная в теореме 1.2, дает приемлемую оценку точности. При этом несколько большее значение этой границы по сравнению с выборочным стандартным уклонением оценки можно объяснить тем, что граница справедлива для широкого класса распределений.

3. Верхняя граница для среднеквадратического уклонения оценки (3), (4), определяемая теоремой 1.2, вполне удовлетворительна, если корни соответствующего характеристического уравнения находятся внутри единичного круга. При приближении вектора параметров θ к границе области устойчивости наблюдается рост верхней границы. Это объясняется тем, что процесс (1) приближается к взрывному, что отражается на поведении как самого процесса, так и оценок его параметров.

4. Последовательные оценки МНК (3), (4) и непоследовательные оценки МНК (2) примерно одинаковы по точности. При этом следует иметь в виду, что для последовательной оценки имеется теоретическая граница для среднеквадратической точности, которая позволяет контролировать точность оценки за счет выбора параметра процедуры, определяющего ее длительность, а для МНК с фиксированным числом наблюдений подобные оценки точности пока неизвестны.

Проводилось моделирование процесса авторегрессии со случайными коэффициентами и управляющими воздействиями (7). Цель моделирования заключалась в том, чтобы сравнить точности обычной оценки МНК и последовательной оценки МНК (8), (9). При этом установлено, что и в случае модели с управлением эти оценки примерно одинаковы по точности. Однако для последовательной оценки МНК имеется теоретическая граница для среднеквадратической точности, определяемая теоремами 2.2, 2.3, а для обычной оценки МНК такая граница не известна.

Также была экспериментально исследована процедура классификации (14), (15). Моделировался процесс авторегрессии со случайными коэффициентами второго порядка вида

$$x_n = (0,5 + 0,1\eta_1(n))x_{n-1} + (0,4 + 0,1\eta_2(n))x_{n-2} + \varepsilon_n,$$

где $\eta_i(n)$, ε_n — независимые стандартные гауссовские случайные величины; $x_0 = x_{-1} = 0$.

Цели моделирования состояли в том, чтобы исследовать время классификации $\tau(h)$ при изменении различий между гипотезами, установить когда можно пользоваться асимптотическим соотношением для среднего времени классификации, полученным в теореме 3.2, определить число ошибок при классификации и сравнить это число с соответствующим теоретическим значением, согласно теореме 3.1.

В работе результаты моделирования представлены в таблицах и графиках.

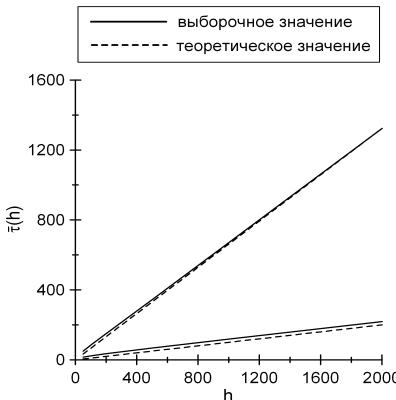


Рис. 3. Зависимости выборочного среднего числа наблюдений и соответствующего теоретического значения от величины порога h

На рисунке 3 проиллюстрированы зависимости выборочного среднего числа наблюдений $\bar{\tau}(h)$, а также соответствующего теоретического значения $h/f^{(l)}$ ($f^{(l)}$ определяется из теоремы 3.2) от величины порога h при различных значениях параметров. Из рисунка 3 видно, что выборочная средняя длительность процедуры близка к $h/f^{(l)}$.

Основные выводы по результатам численного моделирования процедуры классификации состоят в следующем.

1. С ростом вероятности правильной классификации и уменьшением различия между гипотезами время классификации возрастает.
2. Выборочное среднее число наблюдений близко к соответствующему теоретическому значению (см. теорему 3.2).
3. Число ошибок в предложенной процедуре классификации достаточно мало (примерно 1 на 1000 при $P_* = 0,9$ — заданной нижней границе для вероятности правильной классификации).
4. Оценка P_* является заниженной. Однако непоследовательные методы классификации не позволяют получить даже такую оценку. Кроме того, для оценки P_* можно использовать приближенную формулу, согласно теореме 3.3.
5. Причина эффективного различия алгоритмом классификации мало отличающихся гипотез в случае, когда истинные значения параметров лежат достаточно близко к границе области устойчивости, состоит в том, что даже небольшое изменение параметров приводит к значительному качественному изменению свойств процесса.

В заключении формулируются основные результаты диссертации, которые состоят в следующем.

1. Построен одноэтапный последовательный алгоритм оценивания параметров процесса авторегрессии со случайными коэффициентами. Найдена верхняя граница среднеквадратической точности, которая не зависит от распределения помех. Эта граница позволяет определять необходимое число наблюдений для достижения заданной точности оценивания.

2. Разработана последовательная процедура идентификации модели авторегрессии со случайными коэффициентами и управляющими воздействиями. Для нее также получена верхняя граница среднеквадратического уклонения оценки.

3. Установлена сходимость в среднеквадратическом предложенной последовательной оценки к истинному значению вектора неизвестных параметров. Эта сходимость равномерна по любому компакту из области устойчивости процесса.

4. Построен последовательный алгоритм классификации процессов авторегрессии со случайными коэффициентами с заданной вероятностью правильного решения. Такой алгоритм позволяет определять число наблюдений, необходимое для того, чтобы классифицировать процесс правильно с заданной вероятностью.

5. Исследованы асимптотические свойства среднего времени оценивания и классификации. Найдены асимптотические соотношения для этих характеристик.

6. Исследованы асимптотические свойства статистик, по которым выносится решение о принятии гипотезы. Доказана асимптотическая нормальность вектора этих статистик. Такой результат позволяет приблизенно оценить вероятность правильной классификации при заданном пороге.

7. Найден общий вид спектральной плотности стационарного процесса авторегрессии со случайными коэффициентами.

8. Проведено экспериментальное исследование алгоритмов оценивания и их сравнение с известными процедурами по методу наименьших квадратов. Моделирование подтвердило эффективность и преимущества предложенных процедур.

9. Проведено численное моделирование процедуры классификации. В результате экспериментального исследования подтвердилась эффективность предложенного алгоритма.

Список публикаций по теме диссертации

1. Кашковский Д. В. Одноэтапная процедура гарантированного оценивания параметров авторегрессии со случайными коэффициентами // Наука. Технологии. Инновации: Материалы Всеросс. науч. конф. молодых ученых. 08-11 декабря 2005. Новосибирск. — Новосибирск: НГТУ. — 2006. — Ч.1. — С. 25-27.
2. Кашковский Д. В. Последовательная идентификация параметров авторегрессии со случайными коэффициентами // Обозрение прикладной и промышленной математики. Четырнадцатая Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам. — 2007. — Т.14, вып. 3. — С. 498-499.
3. Кашковский Д. В. Последовательная идентификация параметров авторегрессии со случайными коэффициентами // Вестник Томского гос. ун-та. — 2006. — № 293. — С. 105-109.
4. Кашковский Д. В. Последовательное оценивание параметров авторегрессии со случайными коэффициентами // Перспективы развития фундаментальных наук: Труды IV Междунар. конф. студентов и молодых ученых. 15-18 мая 2007. Томск. — Томск: ТПУ. — 2007. — С. 242-243.
5. Кашковский Д. В. Последовательная процедура классификации процессов авторегрессии со случайными коэффициентами // Автометрия. — 2006. — Т. 42, № 1. — С. 77-87.
6. Кашковский Д. В., Конев В. В. О последовательных оценках параметров авторегрессии со случайными коэффициентами // Автометрия. — 2008. — Т. 44, № 1. — С. 70-81.