На правах рукописи

Горбенко Кирилл Анварович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ ПРИ КУМУЛЯТИВНОМ ПОТОКЕ СТРАХОВЫХ ВЗНОСОВ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2008

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики ГОУ ВПО «Томский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Терпугов Александр Федорович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Воробейчиков Сергей Эрикович

кандидат физико-математических наук Китаева Анна Владимировна

Ведущая организация: ФГОУ ВПО «Сибирский федеральный университет», г. Красноярск

Защита состоится 30 октября 2008 г. в 10:30 на заседании диссертационного совета Д 212.267.08 при Томском государственном университете по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, корп. 2, ауд. 102.

Отзывы на автореферат (в двух экземплярах), заверенные гербовой печатью организации, просим направлять по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, ученому секретарю ТГУ Буровой Н.Ю.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан 15 сентября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.267.08
доктор технических наук, профессор А.В. Скворцов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Проблема прогнозирования будущего состояния финансов страховой компании существовала и существует в настоящее время. В связи с этим, любой страховщик стремится выбрать адекватную модель функционирования своей компании, и на основе уже выбранной модели решать различные задачи, например: прогнозирование средней величины капитала компании и числа обслуживаемых рисков, определение в некотором смысле оптимальных тарифных ставок. При этом существуют два принципиально разных подхода повышения адекватности модели: первый из них – построение более качественных оценок входных параметров модели, второй – включение в модель параметров, отвечающих за воздействие того или иного фактора и удовлетворяющих наиболее общим ограничениям.

В связи со сказанным можно отметить, что разработка и исследование моделей, учитывающих как новые факторы, так и прежние, но с более общими ограничениями, являются актуальными.

Первые исследования по тематике диссертационной работы были начаты Ф. Лундбергом (1903), далее получили строгое математическое оформление в работах Г. Крамера (1955) и развиты Е. Спарре-Андерсеном (1957). В результате этими авторами была разработана и изучена классическая модель поведения капитала страховой компании S_t, которая в научной литературе получила название модели Лундберга-Крамера-Андерсена и построена на следующих предположениях:

1) величина капитала компании в момент времени 0 равна S_0;

2) величина страховых взносов за период времени t равна ct, где c – интенсивность поступления страховых взносов в единицу времени, является детерминированной величиной;

3) между моментом наступления страхового события и моментом осуществления страховой выплаты нет временного разрыва;

4) моменты наступления страховых событий образуют простейший пуассоновский поток, число наступивших страховых событий на временном отрезке $[0,t]$ обозначим N_t;

5) размеры страховых выплат η_i ($i=\overline{1,N_t}$) являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами.

В настоящее время существуют различные усложнения классической модели. Прежде всего, это введение в рассмотрение расходов на рекламу и инвестирование части капитала (Кац В.М.)

Далее, это рассмотрение потока моментов поступления страховых взносов в виде простейшего пуассоновского потока (Лившиц К.И.)

Другое направление связано с рассмотрением нестационарных потоков рисков, интенсивности которых зависят от величины капитала или от числа застрахованных рисков (Ахмедова Д.Д., Лившиц К.И., Змеев О.А.)

Отдельно следует выделить направление, связанное с моделированием деятельности пенсионного фонда (Гарайшина И.Р.) и фонда социального страхования (Вальц О.В., Китаева А.В.)

Помимо рассмотренного подхода, в основе которого лежит классическая модель, существует направление, связанное с построением моделей страховых компаний в виде систем регрессионных уравнений (Крестьянинова М.В., Ковалев О.Н., Охрименко О.И., Суворов С.В.) В данном случае, на основе эмпирических данных выбираются результирующие и определяющие признаки и виды зависимостей между ними.

Следует заметить, что помимо рассмотрения различных подходов моделирования деятельности страховой компании, существуют такие направления, как определение величины тарифных ставок в имущественном (Калашникова Т.В., Овчинникова Т.И., Штрауб Э., Gerber H.U.) и личном (Фалин Г.И., Четыркин Е.М.) страховании, решение задач перестрахования (Булинская Е.В., Григорьев Ю.Д., Dickson D.C.M.), рассмотрение конкурентного взаимодействия страховых компаний (Змеев О.А., Кац В.М., Масяйкин С.А.)

В данной диссертационной работе автором предпринята попытка построения модели деятельности страховой компании в виде системы массового обслуживания с входящим кумулятивным потоком страховых взносов и рекуррентным временем действия договора страхования.

Цель работы заключается в построении класса математических моделей деятельности страховой компании и построении методики управления капиталом компании.

В рамках указанной цели были поставлены **следующие задачи**:

1. Предложить математические модели деятельности страховой компании в виде трехмерных процессов, компонентами которых являются число поступивших рисков, число обслуживаемых рисков, капитал компании, и для указанных компонент определить математические ожидания, дисперсии и ковариации.

2. Задать критерий определения оптимальной тарифной ставки и в рамках указанного критерия определить оптимальное значение тарифной ставки.

Методика исследования. При решении поставленных задач использовались методы теории вероятностей, теории случайных процессов, теории массового обслуживания, дифференциального, интегрального и вариационного исчислений.

Научная новизна полученных автором результатов заключается в следующем:

1. Предложена модель кумулятивного потока страховых взносов, отличающегося от известных тем, что условная вероятность поступления страхового взноса линейно зависит от числа уже поступивших взносов, что позволяет более точно прогнозировать объем поступления денежных средств.

2. Предложены математические модели деятельности страховой компании, отличающиеся от известных моделей тем, что представляются в виде трехмерных процессов, компонентами которых являются число поступивших рисков (число страхо-

вых взносов), число обслуживаемых рисков (число действующих договоров страхования), капитал компании, при этом время действия страхового договора имеет произвольную функцию распределения, что в совокупности позволяет достичь более точного прогнозирования значения величины капитала страховой компании; для указанных компонент получены математические ожидания, дисперсии и ковариации.

3. Предложена методика определения оптимальной тарифной ставки, обеспечивающей максимальный прирост средней величины капитала компании.

Теоретическое значение работы заключается в том, что предложенные в ней математические модели строятся на основе процесса изменения числа поступивших рисков, процесса изменения числа обслуживаемых рисков, процесса изменения величины капитала компании и могут быть обобщены путем включения дополнительных факторов, влияющих на поведение величины капитала.

Практическая ценность работы состоит в том, что полученные в ней результаты могут быть полезны при прогнозировании величины капитала страховой компании и определении тарифной ставки, обеспечивающей максимальный прирост средней величины капитала компании.

Достоверность и обоснованность всех полученных в диссертации результатов подтверждается строгим математическим исследованием с использованием методов теории вероятностей и случайных процессов, теории массового обслуживания, дифференциального, интегрального и вариационного исчислений.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Одномерное распределение вероятностей кумулятивного потока страховых взносов.

2. Четыре математические модели деятельности страховой компании: модель страховой компании при кумулятивном потоке страховых взносов, портфельная модель страховой компании при кумулятивном потоке страховых взносов, модель страховой компании при интегральном кумулятивном потоке страховых взносов, модель страховой компании при дважды стохастическом кумулятивном потоке страховых взносов.

3. Методика определения оптимальной тарифной ставки, обеспечивающей максимальный прирост средней величины капитала страховой компании.

Апробация работы. Основные положения диссертации и отдельные ее результаты докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

1. Третья Международная конференция студентов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук». Томск, 2006 г.

2. Шестая Всероссийская конференция «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур». Шушенское, 2006 г.

3. Пятая Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии и математическое моделирование». Анжеро-Судженск, 2006 г.

4. Восьмой Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике. Адлер, 2007 г.

5. Седьмая Международная научно-техническая конференция «Математическое моделирование, обратные задачи, информационно-вычислительные технологии». Пенза, 2007 г.

6. Шестая Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии и математическое моделирование». Анжеро-Судженск, 2007 г.

7. Региональная научно-практическая конференция студентов, молодых ученых и предпринимателей Сибирского региона «Иммпульс–2007». Томск, 2007 г.

8. Пятнадцатая Международная конференция «Математика. Компьютер. Образование». Дубна, 2008 г.

9. Седьмая Всероссийская конференция «Финансово-актуарная математика и смежные вопросы». Красноярск, 2008 г.

10. Двенадцатая Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи». Анжеро-Судженск, 2008 г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 16 печатных работ, в том числе 2 работы в журнале из перечня ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, приложения и списка литературы из 115 наименований. Общий объем диссертации составляет 172 страницы, в том числе основной текст – 160 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность работы, сформулирована цель и задачи диссертационного исследования, изложена его научная новизна, раскрыты теоретическое значение и практическая ценность полученных результатов, кратко излагается содержание диссертационной работы.

Первая глава посвящена математической модели деятельности страховой компании при кумулятивном потоке страховых взносов. Данная модель включает в себя следующие процессы: N_t – число поступивших рисков за время длительности t, $N_0 = 0$; k_t – число обслуживаемых рисков в момент времени t, $k_0 = 0$; S_t – величина капитала компании в момент времени t. Далее делаются предположения:

1) вероятность поступления нового страхового взноса на временном отрезке $[t, t+\Delta t]$ равна $(\lambda + \beta N_t)\Delta t + o(\Delta t)$, при этом размер страхового взноса моделируется независимой случайной величиной (н.с.в.) ξ с известными первыми начальными моментами $\mathrm{M}\{\xi\} = a_1$ и $\mathrm{M}\{\xi^2\} = a_2$;

2) вероятность осуществления страховой выплаты на временном отрезке $[t, t+\Delta t]$ равна $\mu k_t \Delta t + o(\Delta t)$, при этом размер страховой выплаты моделируется н.с.в. η: $\mathrm{M}\{\eta\} = b_1$ и $\mathrm{M}\{\eta^2\} = b_2$;

3) время обслуживания риска (время действия договора) начинается с момента уплаты страхового взноса и моделируется н.с.в. с произвольной функцией распределения B_x.

В параграфе 1.2 найдены основные характеристики процесса N_t:

1) одномерное распределение вероятностей

$$\begin{cases} \mathrm{P}\{N_t = 0\} = \mathrm{e}^{-\lambda t}, \\ \mathrm{P}\{N_t = n\} = \dfrac{\prod\limits_{i=0}^{n-1}\left(\dfrac{\lambda}{\beta} + i\right)}{n!}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t}\right)^n \mathrm{e}^{-\lambda t}, \; n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

2) математическое ожидание, дисперсия и ковариация, соответственно,

$$\overline{N}_t = -\frac{\lambda}{\beta} + \frac{\lambda}{\beta}\mathrm{e}^{\beta t}, \; \mathrm{D}\{N_t\} = \frac{\lambda}{\beta}\mathrm{e}^{\beta t}\left(\mathrm{e}^{\beta t} - 1\right), \; \mathrm{cov}\{N_{t_1}, N_{t_2}\} = \mathrm{D}\{N_{t_1}\}\mathrm{e}^{\beta(t_2 - t_1)}, \; t_1 \le t_2 .$$

В параграфе 1.3 найдены основные средние характеристики k_t:

$$\overline{k}_t = \lambda\int_0^t P_{t-\tau}\,\mathrm{e}^{\beta\tau}\,d\tau, \; \mathrm{D}\{k_t\} = 2\beta\int_0^t P_{t-\tau}C_{nN}\{\tau|t\}d\tau + \lambda\int_0^t P_{t-\tau}\,\mathrm{e}^{\beta\tau}\,d\tau,$$

$$\mathrm{cov}\{k_{t_1}, k_{t_2}\} = C_{kn}\{t_1 \,|\, t_2\} + \beta C_{nN}\{t_1 \,|\, t_1\}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{e}^{\beta(x - t_1)}P_{t_2 - x}dx,$$

где

$$\frac{dC_{nN}\{t\,|\,T\}}{dt} = \beta C_{nN}\{t\,|\,T\} + \lambda P_{T-t}\,\mathrm{e}^{2\beta t}, \; C_{nN}\{0\,|\,T\} = 0, \; 0 \le t \le T, \; P_x = 1 - B_x,$$

$$C_{kn}\{t\,|\,T\} = \beta\int_0^t P_{t-x}C_{nN}\{x\,|\,T\}dx + \beta\int_0^t P_{T-x}C_{nN}\{x\,|\,t\}dx + \lambda\int_0^t P_{T-x}\,\mathrm{e}^{\beta x}\,dx, \; t_1 \le t_2 .$$

В параграфе 1.4 найдены математическое ожидание, дисперсия и ковариация процесса S_t:

$$\overline{S}_t = S_0 + a_1\frac{\lambda}{\beta}\left(\mathrm{e}^{\beta t} - 1\right) - \lambda b_1\mu\int_0^t \mathrm{e}^{\beta x}\,dx\int_x^t P_{\tau - x}d\tau,$$

$$\mathrm{D}\{S_t\} = 2a_1\beta\int_0^t C_{NS}\{\tau\}d\tau - 2b_1\mu\int_0^t C_{nS}\{\tau|\tau\}d\tau + a_2\frac{\lambda}{\beta}\left(\mathrm{e}^{\beta t} - 1\right) + \lambda b_2\mu\int_0^t \mathrm{e}^{\beta x}\,dx\int_x^t P_{\tau - x}d\tau,$$

$$\mathrm{cov}\{S_{t_1}, S_{t_2}\} = \mathrm{D}\{S_{t_1}\} + a_1\left(\mathrm{e}^{\beta(t_2 - t_1)} - 1\right)C_{NS}\{t_1\} -$$

$$- b_1\mu\left(\int_{t_1}^{t_2} C_{nS}\{t_1 \,|\, \tau\}d\tau + \beta C_{NS}\{t_1\}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{e}^{\beta(x - t_1)}\,dx\int_x^{t_2} P_{\tau - x}d\tau\right),$$

где

$$\frac{dC_{NS}\{t\}}{dt} = \beta C_{NS}\{t\} - b_1\mu C_{nN}\{t|t\} + a_1\lambda\,\mathrm{e}^{2\beta t}, \; C_{NS}\{0\} = 0,$$

$$C_{nS}\{t|T\}=\beta\int_0^t C_{NS}\{\tau\}P_{T-\tau}d\tau+a_1\beta\int_0^t C_{nN}\{\tau|T\}d\tau-b_1\mu\int_0^t C_{kn}\{\tau|T\}d\tau+a_1\lambda\int_0^t P_{T-\tau}\,\mathrm{e}^{\beta\tau}\,d\tau.$$

В параграфе 1.5 введены в рассмотрение модели имущественного и неимущественного страхования, суть которых в уточнении понятия риска, т.е. вводятся понятия страхователя и объекта страхования. Для модели имущественного страхования моменты поступления страхователей, как и прежде, образуют кумулятивный поток, но страховая компания фиксирует ν ($\nu\geq 1$) объектов страхования, например, пришел клиент, желающий застраховать три машины, в этом случае процесс N_t увеличится на 1, а процесс k_t на $\nu=3$. В модели неимущественного страхования в качестве объекта страхования выступает застрахованное лицо, поясним данную модель на примере: пришел клиент, желающий застраховать себя и двух своих родственников от несчастного случая, в этой ситуации и процесс N_t и процесс k_t увеличатся на $\nu=3$.

Для данных моделей получены основные средние характеристики процессов N_t, k_t и S_t, в предположении что ν является н.с.в.: $\mathrm{M}\{\nu\}=u_1$ и $\mathrm{M}\{\nu^2\}=u_2$. Приведем результаты относительно математических ожиданий:

1) модель имущественного страхования:

$$\overline{N}_t=-\frac{\lambda}{\beta}+\frac{\lambda}{\beta}\mathrm{e}^{\beta t},\ \overline{k}_t=u_1\lambda\int_0^t \mathrm{e}^{\beta\tau}P_{t-\tau}d\tau,$$

$$\overline{S}_t=S_0+a_1u_1\frac{\lambda}{\beta}\left(\mathrm{e}^{\beta t}-1\right)-b_1\mu u_1\lambda\int_0^t \mathrm{e}^{\beta x}dx\int_x^t P_{\tau-x}d\tau,$$

где $P_x=1-B_x$;

2) модель неимущественного страхования:

$$\overline{N}_t=-\frac{\lambda}{\beta}+\frac{\lambda}{\beta}\mathrm{e}^{\beta u_1 t},\ \overline{k}_t=u_1\lambda\int_0^t \mathrm{e}^{\beta u_1\tau}P_{t-\tau}d\tau,$$

$$\overline{S}_t=S_0+a_1\frac{\lambda}{\beta}\left(\mathrm{e}^{\beta u_1 t}-1\right)-b_1\mu u_1\lambda\int_0^t \mathrm{e}^{\beta u_1 x}dx\int_x^t P_{\tau-x}d\tau,$$

где $P_x=1-B_x$.

В параграфе 1.6 рассмотрена модель деятельности страховой компании с работающим капиталом. Усложнение модели по сравнению с моделью из параграфа 1.1 состоит в следующем: в дополнение к случайному изменению капитала на отрезке $[t,t+\Delta t]$ добавляется детерминированный прирост капитала равный $\varphi S_t\Delta t$, где φ – ставка процента. В связи с этим, исследованию подлежал только процесс S_t. Приведем уравнение, определяющее математическое ожидание процесса S_t:

$$\frac{d\overline{S}_t}{dt} = \varphi\overline{S}_t + a_1\lambda\,\mathrm{e}^{\beta t} - b_1\mu\lambda\int_0^t P_{t-\tau}\,\mathrm{e}^{\beta\tau}\,d\tau,\ \overline{S}_0 = S_0,$$

где $P_x = 1 - B_x$.

Во второй главе предлагается и исследуется портфельная модель деятельности страховой компании при кумулятивном потоке страховых взносов. Суть модели состоит в том, что страховая компания рассматривается как поставщик некоторого конечного набора услуг. Модель основывается на следующих процессах: $N_i(t)$ – число рисков, поступивших за время t в рамках оказания i-ой услуги, $i = \overline{1,r}$, $N_i(0) = 0$; $k_i(t)$ – число рисков, находящихся на обслуживании в рамках оказания i-ой услуги в момент времени t, $i = \overline{1,r}$, $k_i(0) = 0$; $S_i(t)$ – величина капитала компании, сформированного за счет оказания i-ой услуги, в момент времени t, $i = \overline{1,r}$. Далее делаются следующие предположения:

1) вероятность поступления страхового взноса на отрезке $[t, t+\Delta t]$ в рамках оказания i-ой услуги равна $\left(\lambda_i + \sum_{s=1}^{r}\beta_{is}N_s(t)\right)\Delta t + o(\Delta t)$; при этом размер страхового взноса моделируется н.с.в. ξ_i: $\mathrm{M}\{\xi_i\} = a_{1i}$, $\mathrm{M}\{\xi_i^2\} = a_{2i}$;

2) вероятность осуществления страховой выплаты на отрезке $[t, t+\Delta t]$ в рамках оказания i-ой услуги равна $\sum_{s=1}^{r}\mu_{is}k_s(t)\Delta t + o(\Delta t)$; при этом размер страховой выплаты моделируется н.с.в. η_i: $\mathrm{M}\{\eta_i\} = b_{1i}$, $\mathrm{M}\{\eta_i^2\} = b_{2i}$;

3) время обслуживания риска (время действия договора) в рамках оказания i-ой услуги начинается с момента уплаты страхового взноса и моделируется н.с.в. с функцией распределения $B_i(x)$.

В параграфах 2.2–2.4 были получены математические ожидания, дисперсии и ковариации процессов $N_i(t)$, $k_i(t)$ и $S_i(t)$. Для наглядности приведем вид математических ожиданий:

$$\frac{d\overline{N}(t)}{dt} = \lambda + \beta\overline{N}(t),\ \overline{N}(0) = o,\ \overline{k}(t) = \int_0^t P(t-\tau)d\overline{N}(\tau),$$

$$\overline{S}(t) = S_0 + a_1\overline{N}(t) - b_1\mu\int_0^t \overline{k}(\tau)d\tau,$$

где

$$N(t) = (N_1(t)\ N_2(t)\ \ldots\ N_r(t))^{\mathrm{T}},\ k(t) = (k_1(t)\ k_2(t)\ \ldots\ k_r(t))^{\mathrm{T}},$$

$$S(t) = (S_1(t)\ S_2(t)\ \ldots\ S_r(t))^{\mathrm{T}},\ \lambda = (\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ \lambda_r)^{\mathrm{T}},\ \beta = (\beta_{ij}, i = \overline{1,r}, j = \overline{1,r}),$$

$$\mu = \left(\mu_{ij}, i = \overline{1,r}, j = \overline{1,r}\right),\ b_1 = \mathrm{diag}\left(b_{11},\ b_{12},\ \ldots\ b_{1r}\right),\ a_1 = \mathrm{diag}\left(a_{11},\ a_{12},\ \ldots\ a_{1r}\right),$$

$$o = \left(o_1 = 0\ \ o_2 = 0\ \ldots\ o_r = 0\right)^{\mathrm{T}},\ P(x) = \mathrm{diag}\left(1 - B_1(x),\ 1 - B_2(x),\ \ldots\ 1 - B_r(x)\right).$$

Отметим, что были найдены основные средние характеристики процессов:

$$N_{общ}(t) = \sum_{s=1}^{r} N_s(t),\ k_{общ}(t) = \sum_{s=1}^{r} k_s(t),\ S_{общ}(t) = \sum_{s=1}^{r} S_s(t).$$

Третья глава посвящена модели деятельности страховой компании, в которой вероятность поступления нового страхового взноса зависит от всей истории развития потока страховых взносов. Данная модель отличается от модели из параграфа 1.1 только входящим потоком страховых взносов, а именно: вероятность поступления нового страхового взноса на временном отрезке $[t, t + \Delta t]$ равна $\left(\lambda + \beta \int_0^t N_\tau \mathrm{e}^{-\delta\cdot(\mathrm{t}-\tau)} d\tau\right)\Delta t + o(\Delta t)$, где $\delta > 0$.

Для рассмотренной модели в параграфах 3.2–3.4 были получены основные средние характеристики процессов N_t, k_t и S_t. Как и прежде, приведем только вид математических ожиданий:

$$\overline{N}_t = C_1 \mathrm{e}^{\kappa_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{\kappa_2 t} - \frac{\delta\lambda}{\beta},\ \overline{k}_t = C_1\kappa_1 \int_0^t P_{t-\tau} \mathrm{e}^{\kappa_1 \tau} d\tau + C_2\kappa_2 \int_0^t P_{t-\tau} \mathrm{e}^{\kappa_2 \tau} d\tau,$$

$$\overline{S}_t = S_0 + a_1\left(C_1 \mathrm{e}^{\kappa_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{\kappa_2 t} - \frac{\delta\lambda}{\beta}\right) -$$

$$- b_1\mu\left(C_1\kappa_1 \int_0^t d\tau \int_0^\tau P_{\tau-x} \mathrm{e}^{\kappa_1 x} dx + C_2\kappa_2 \int_0^t d\tau \int_0^\tau P_{\tau-x} \mathrm{e}^{\kappa_2 x} dx\right),$$

где

$$C_1 = \frac{\lambda}{\kappa_2 - \kappa_1}\left(\frac{\kappa_2\delta}{\beta} - 1\right),\ C_2 = \frac{\lambda}{\kappa_2 - \kappa_1}\left(1 - \frac{\kappa_1\delta}{\beta}\right),$$

$$\kappa_1 = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 + 4\beta}}{2},\ \kappa_2 = \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 + 4\beta}}{2},\ P_x = 1 - B_x.$$

В четвертой главе рассматривается модель деятельности страховой компании, которая отличается от модели из параграфа 1.1, только наличием дважды стохастического потока страховых взносов, а именно: вероятность поступления нового страхового взноса на отрезке $[t, t + \Delta t]$ равна $(\lambda_t + \beta N_t)\Delta t + o(\Delta t)$, где λ_t – случайный процесс, описываемый следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$d\lambda_t = \alpha(\rho - \lambda_t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}\, dw_t,$$

$\alpha > 0$, $\sigma > 0$, $\rho > \lambda_0 > 0$, w_t – стандартный винеровский процесс.

В параграфах 4.3–4.5 получены математические ожидания, дисперсии и ковариации процессов N_t, k_t и S_t. Математические ожидания указанных процессов имеют следующий вид:

$$\overline{N}_t = -\frac{\rho}{\beta} - \frac{\lambda_0 - \rho}{\beta + \alpha} e^{-\alpha t} + \left(\frac{\rho}{\beta} + \frac{\lambda_0 - \rho}{\beta + \alpha} \right) e^{\beta t},$$

$$\overline{k}_t = \alpha \frac{\lambda_0 - \rho}{\beta + \alpha} \int_0^t e^{-\alpha\tau} P_{t-\tau} d\tau + \left(\rho + \beta \frac{\lambda_0 - \rho}{\beta + \alpha} \right) \int_0^t e^{\beta\tau} P_{t-\tau} d\tau,$$

$$\overline{S}_t = S_0 + a_1 \left(-\frac{\rho}{\beta} - \frac{\lambda_0 - \rho}{\beta + \alpha} e^{-\alpha t} + \left(\frac{\rho}{\beta} + \frac{\lambda_0 - \rho}{\beta + \alpha} \right) e^{\beta t} \right) -$$

$$- b_1 \mu \left(\alpha \frac{\lambda_0 - \rho}{\beta + \alpha} \int_0^t d\tau \int_0^\tau e^{-\alpha x} P_{\tau - x} dx + \left(\rho + \beta \frac{\lambda_0 - \rho}{\beta + \alpha} \right) \int_0^t d\tau \int_0^\tau e^{\beta x} P_{\tau - x} dx \right),$$

где $P_x = 1 - B_x$.

Пятая глава посвящена определению оптимальной тарифной ставки, обеспечивающей максимальный прирост средней величины капитала компании в предположениях модели из параграфа 1.1, а именно:

$$\frac{d\overline{S}(t)}{dt} \Rightarrow \max_T .$$

При этом делается ряд уточняющих предположений:

1) величина страхового взноса равна $\xi = T \cdot U$, где T – тарифная ставка, $0 \le T \le 1$, U – страховая сумма, моделируемая н.с.в. с плотностью распределения $p_U(x)$; между λ и T предполагается два типа зависимости: $\lambda(T) = \lambda_0 e^{-\kappa T}$ и $\lambda(T) = \lambda_0 \left(1 - T^\gamma\right)$, где $\lambda_0 > 0, \kappa > 0, 0 < \gamma < 1$;

2) величина выплаты определяется следующим образом

$$\eta = \begin{cases} X, \text{ если } X < U, \\ U, \text{ если } X \ge U, \end{cases}$$

где сумма ущерба X является н.с.в. с плотностью распределения $p_X(x)$.

В параграфе 5.2 определяются начальные моменты н.с.в. η:

$$b_n = \mathrm{M}\left\{\eta^n\right\} = \int_0^\infty p_U(u) du \left(\int_0^u x^n p_X(x) dx + u^n \int_u^\infty p_X(x) dx \right), \; n = 1, 2, \ldots$$

Далее в параграфах 5.3–5.5 рассматриваются три принципиально разные зависимости тарифной ставки T от величины страховой суммы U: а) T не зависит от U; б) T непрерывно зависит от U; в) T кусочно-постоянно зависит от U. Приведем результаты для каждой ситуации, для этого обозначим через T^* оптимальную тарифную ставку.

а) T не зависит от U:

а.1) случай экспоненциальной зависимости λ от T:

$$T^* = \begin{cases} \dfrac{1}{\kappa} + \dfrac{d}{c}, \text{ если } \dfrac{1}{\kappa} + \dfrac{d}{c} < 1, \\ 1, \text{ если } \dfrac{1}{\kappa} + \dfrac{d}{c} \geq 1; \end{cases}$$

а.2) случай степенной зависимости λ от T:

$$T^* = \begin{cases} T_{корень}, \text{ если } \dfrac{d}{c} < 1, \\ 1, \text{ если } \dfrac{d}{c} \geq 1, \end{cases}$$

где $c = \overline{U}\,\mathrm{e}^{\beta t}$, $d = b_1 \mu \int\limits_0^t (1 - B(t-\tau))\mathrm{e}^{\beta\tau}\, d\tau$, $T_{корень}$ – единственный корень уравнения

$$-(\gamma+1)T^{\gamma} + \frac{d}{c}\gamma T^{\gamma-1} + 1 = 0.$$

б) T непрерывно зависит от U:

б.1) случай экспоненциальной зависимости λ от T: экстремум функционала $\dfrac{d\overline{S}(t)}{dt}$ может достигаться на кривой

$$T(u) = \frac{d(u)}{cu} + \frac{1}{\kappa};$$

б.2) случай степенной зависимости λ от T: экстремум функционала $\dfrac{d\overline{S}(t)}{dt}$ может достигаться на кривой, заданной следующим уравнением

$$-(1+\gamma)T^{\gamma} + \gamma \frac{d(u)}{cu} T^{\gamma-1} + 1 = 0,$$

где $c = \mathrm{e}^{\beta t}$, $d(u) = \mu \left(\int\limits_0^u x p_X(x) dx + u \int\limits_u^{\infty} p_X(x) dx \right) \int\limits_0^t (1 - B(t-\tau))\mathrm{e}^{\beta\tau}\, d\tau$.

в) T кусочно-постоянно зависит от U: в данном случае подразумевается, что для значений U задано разбиение $\{u_i, i = 0, 1, 2, \ldots\}$, и на интервале $[u_i, u_{i+1})$ требуется определить оптимальную тарифную ставку T_i^*:

в.1) случай экспоненциальной зависимости λ от T:

$$\begin{cases} u_i \leq u < u_{i+1}, \\ T_i^* = \begin{cases} \dfrac{1}{\kappa} + \dfrac{D_i}{C_i}, \text{ если } \dfrac{1}{\kappa} + \dfrac{D_i}{C_i} < 1, \\ 1, \text{ если } \dfrac{1}{\kappa} + \dfrac{D_i}{C_i} \geq 1; \end{cases} \end{cases}$$

в.2) случай степенной зависимости λ от T:

$$T_i^* = \begin{cases} u_i \le u < u_{i+1}, \\ \begin{cases} T_{i,корень}, \text{ если } \dfrac{D_i}{C_i} < 1, \\ 1, \text{ если } \dfrac{D_i}{C_i} \ge 1, \end{cases} \end{cases}$$

где $C_i = c\int\limits_{u_i}^{u_{i+1}} u p_U(u)du$, $D_i = \int\limits_{u_i}^{u_{i+1}} d(u) p_U(u)du$, $T_{i,корень}$ – единственный корень уравнения

$$-(\gamma+1)T^{\gamma} + \gamma\frac{D_i}{C_i}T^{\gamma-1} + 1 = 0.$$

На основе полученных результатов предлагается следующая методика определения оптимальной тарифной ставки:

1) на основе эмпирических данных находятся оценки всех параметров модели из параграфа 1.1 с учетом уточняющих предположений пятой главы;

2) задается критерий, на основе которого выбирается вид зависимости параметра λ от тарифной ставки T (экспоненциальная, степенная);

3) исходя из потребностей практики, выбирается вид зависимости тарифной ставки T от страховой суммы U (постоянная, непрерывная, кусочно-постоянная);

4) в соответствии с результатами шагов 1)–3) выбирается формула, определяющая оптимальное значение тарифной ставки.

В заключении к диссертации приведены основные результаты работы:

1. Введено понятие кумулятивного потока, для которого найдено одномерное распределение вероятностей.

2. Предложены математические модели деятельности страховой компании при кумулятивном потоке страховых взносов в виде трехмерных процессов, компонентами которых являются число поступивших рисков (число страховых взносов), число обслуживаемых рисков (число действующих договоров страхования), капитал компании, при этом время действия страхового договора имеет произвольную функцию распределения; для указанных компонент получены математические ожидания, дисперсии и ковариации.

3. На примере модели из параграфа 1.1 введен критерий максимального прироста средней величины капитала страховой компании и предложена методика определения оптимальной тарифной ставки, обеспечивающей максимальный прирост средней величины капитала страховой компании.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Горбенко К.А., Терпугов А.Ф. Стохастическая модель функционирования страховой компании О. А. Змеева при наличии портфеля рисков // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 290. – С. 128–134.**

2. **Горбенко К.А. Кумулятивный поток // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 293. – С. 88–95.**

3. Горбенко К.А. Стохастическая модель функционирования страховой компании с кумулятивной интенсивностью входящего потока и независимым временем обслуживания клиента с произвольной функцией распределения // Вестник Томского государственного университета. Прил. 2006. Август. – № 18. – С. 290–291.

4. Горбенко К.А. Средние характеристики интегрального кумулятивного потока // Вестник Томского государственного университета. Прил. 2006. Декабрь. – № 19. – С. 145–148.

5. Горбенко К.А. Немарковская кумулятивная модель имущественного страхования // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2008. – № 1. – С. 40–49.

6. Горбенко К.А., Терпугов А.Ф. Определение оптимальной тарифной ставки в модели функционирования страховой компании О.А. Змеева // Теоретическая и прикладная информатика. – Томск, 2004. – Вып. 1. – С. 3–12.

7. Горбенко К.А. Средние характеристики дважды стохастического кумулятивного потока // Перспективы развития фундаментальных наук: Тр. III Международной конф. студентов и молодых ученых. Томск, 16–19 мая 2006 г. – Томск, 2006. – С. 146–148.

8. Горбенко К.А. Средние характеристики конечной совокупности взаимосвязанных кумулятивных СМО с рекуррентным обслуживанием // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2006): Материалы V Международной научно-практической конф. Анжеро-Судженск, 10–11 ноября 2006 г. – Томск, 2006. – Ч. 1. – С. 105–106.

9. Горбенко К.А. Многоканальная СМО с рекуррентным обслуживанием и неординарным кумулятивным потоком: средние характеристики процесса изменения количества обрабатываемых заявок // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2008. – Т. 15, вып. 2. – С. 285–286.

10. Горбенко К.А. Модель страховой компании с интегральным кумулятивным потоком страховых взносов // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2007): Материалы VI Международной научно-практической конф. Анжеро-Судженск, 9–10 ноября 2007 г. – Томск, 2007. – Ч. 2. – С. 108–111.

11. Горбенко К.А. Определение оптимальной тарифной ставки в модели страховой компании с кумулятивным потоком страховых взносов // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2007): Материалы VI Меж-

дународной научно-практической конф. Анжеро-Судженск, 9–10 ноября 2007 г. – Томск, 2007. – Ч. 2. – С. 111–113.

12. Горбенко К.А. Немарковская кумулятивная модель неимущественного страхования // Экономический инновационный бизнес-форум. Иммпульс–2007: Тр. Региональной научно-практической конференции студентов, молодых ученых и предпринимателей. Томск, 23 ноября 2007 г. – Томск, 2007. – С. 59–60.

13. Горбенко К.А. Модель страховой компании с кумулятивным потоком страховых взносов и работающим капиталом // Математическое моделирование, обратные задачи, информационно-вычислительные технологии: Сб. статей VII Международной научно-технической конф. Пенза, декабрь 2007 г. – Пенза, 2007. – Ч. 1. – С. 71–72.

14. Горбенко К.А. Модель страховой компании с дважды стохастическим кумулятивным потоком страховых взносов // Математика. Компьютер. Образование: Сб. тезисов VX Международной конф. Дубна, 28 января – 02 февраля 2008 г. – Ижевск, 2008. – С. 244.

15. Горбенко К.А. Портфельная модель страховой компании с кумулятивным потоком страховых взносов // Тезисы докладов Седьмой Всероссийской конф. по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. Красноярск, 29 февраля – 02 марта 2008 г. – Красноярск, 2008. – С. 30.

16. Горбенко К.А. Модель имущественного страхования с кумулятивным потоком страховых взносов // Научное творчество молодежи: Материалы XII Всероссийской научно-практической конф. Анжеро-Судженск, 18–19 апреля 2008 г. – Томск, 2008. – Ч. 1. – С. 17–19.