На правах рукописи

Лопухова Светлана Владимировна

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ ОДНОРОДНЫХ СОБЫТИЙ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2008

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики ГОУ ВПО «Томский государственный университет»

Научный руководитель: доктор технических наук,
профессор Назаров Анатолий Андреевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Змеев Олег Алексеевич

кандидат физико-математических наук
Колесникова Светлана Ивановна

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет», г. Кемерово

Защита состоится 20 ноября 2008 г. в 10:30 на заседании диссертационного совета Д 212.267.08 при ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, корп. 2, ауд. 102.

Отзывы на автореферат (в двух экземплярах), заверенные гербовой печатью организации, просим направлять по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, ученому секретарю ТГУ Буровой Н.Ю.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: г. Томск, пр. Ленина, 34а
.

Автореферат разослан 2 октября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.267.08
доктор технических наук, профессор А.В. Скворцов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. В настоящее время теория массового обслуживания получила существенное развитие. Если первоначально наибольший интерес у исследователей вызывали вопросы обслуживания абонентов телефонной станции, то сейчас можно с уверенностью утверждать, что такого типа задачи возникают в самых различных направлениях: в экономике, технике, транспорте и, главным образом, в информационных технологиях, стремительное развитие которых вызывает большой рост требований к телекоммуникационным системам. По мере усложнения реальных систем, возникает проблема выбора методов и способов их исследования. Главным образом возникает проблема приближения условий, в которых существуют описывающие реальные процессы математические модели, к истинной картине изучаемых явлений.

В связи с этим, возникает проблема расширения класса математических моделей потоков однородных событий. Зачастую классические модели случайных потоков событий (пуассоновских и рекуррентных) не могут быть адекватны реальным информационным, телекоммуникационным потокам. Экспериментальная проверка, предпринятая в различных областях знаний, показала, что простейший поток наблюдается, не так часто, как это предполагалось первоначально. Поэтому проблема существенного расширения класса математических моделей случайных потоков однородных событий, а также развитие методов их исследования является весьма важной и актуальной.

Множество математических моделей случайных потоков условно разделим на *классические*, изучаемые в стандартных курсах теории массового обслуживания и теории вероятностей, и *неклассические*, используемые в оригинальных научных исследованиях.

Вопросам исследования пуассоновского потока посвящены работы Е. Марчевского, Т. Нисиды, Л.Ф. Китанина, А.Я. Хинчина, Д. Кокса и П. Льюиса. Исследованию рекуррентного потока событий посвящено не меньшее количество работ. Д. Коксом и В. Смитом подробно исследован рекуррентный поток событий как основная и наиболее простая модель теории восстановления. Достаточно большое количество работ посвящено исследованию систем массового обслуживания с пуассоновским и рекуррентным входящими потоками. Такие системы массового обслуживания исследуются в книге Б.В. Гнеденко и И.Н. Коваленко, в статьях П.П. Бочарова, Ч. Д'Апиче, А.В. Печинкина, В.В. Чаплыгина, А. Двуреченского и Г.А. Ососкова.

Следуя необходимости создания адекватных моделей различных явлений и систем, многие исследователи разработали схемы потоков событий, при помощи которых можно учитывать различные реальные факторы и, в частности, зависимость между поступающими требованиями. Б.В.Гнеденко и И.Н. Коваленко такие потоки назвали *специальными потоками однородных событий*. В 1955 году Д. Кокс предложил рассматривать поток, интенсивность которого зависит от состояний управляющего потоком процесса. Такой поток был назван *процессом Кокса*. Обобщением этой модели стал марковский поток однородных событий (Markovian Arrival Process), введенный Ньютсом в 1979 году, а затем, во

время нового всплеска исследований уточненный Лукантони. Описание этого потока однородных событий можно найти в работах Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко, А.Н. Дудина, А.А. Назарова.

Наиболее общим потоком однородных событий принято считать полумарковский поток (Semi-Markovian process). Идея введения такого потока была выдвинута Леви (1954) и Смитом (1955). Системы массового обслуживания с таким входящим потоком интенсивно изучаются в настоящее время. Такие системы представлены в работах А.В. Печинкина, В.В. Чаплыгина, А.Н. Дудина, В.И. Клименок, C.S. Kim, M.H. Lee.

Однако проблема исследования непосредственно специальных потоков однородных событий, являющихся наиболее адекватными математическими моделями реальных потоков в различных предметных областях, оставалась открытой до настоящего времени, поэтому представленная диссертация, несомненно, актуальна.

Целью работы является классификация и определение различных моделей специальных потоков однородных событий, разработка метода асимптотического анализа повышенной точности и исследование допредельных моделей рассматриваемых потоков однородных событий, которое позволит найти распределение вероятностей числа событий, наступивших в потоке за определенное время.

В рамках указанной цели были поставлены **следующие задачи**:

1. Классификация и определение различных моделей специальных потоков однородных событий.
2. Развитие метода асимптотического анализа для исследования моделей потоков специального вида.
3. Разработка метода асимптотического анализа повышенной точности, который может применяться для исследования рассматриваемых моделей потоков однородных событий.
4. Модификация асимптотического метода для решения систем дифференциальных уравнений для характеристических функций числа событий, наступивших в рассматриваемом потоке.
5. Исследование допредельных моделей специальных потоков однородных событий.

Научная новизна и результаты, выносимые на защиту, состоят в следующем:

1. Выполнена марковизация математических моделей специальных потоков однородных событий, а именно модели марковски модулированного пуассоновского потока событий (MMP-потока), MAP-потока, рекуррентного потока, потока марковского восстановления (MR-потока) и полумарковского потока однородных событий (SM-потока). Для полученных моделей определены распределения вероятностей, для которых составлены системы дифференциальных уравнений Колмогорова и записаны системы дифференциальных уравнений для характеристических функций числа событий, наступивших в исследуемом потоке за определенное время.

2. Разработан новый метод исследования моделей потоков однородных событий – модифицированный метод асимптотического анализа решения систем дифференциальных уравнений Колмогорова для характеристических функций, позволяющий найти распределение вероятностей числа событий, наступивших в потоке.

3. Получен метод асимптотического анализа потоков однородных событий повышенной точности путем нахождения асимптотик более высокого порядка.

4. Найдены допредельные распределения вероятностей числа событий, наступивших в потоках за определенное время в виде интегральных преобразований.

Методы исследования. Основная часть исследований носит теоретический характер и основана на рассмотрении различных математических моделей потоков однородных событий специального вида. В ходе исследования рассмотренных моделей потоков применялся аппарат теории вероятностей, теории случайных процессов, теории восстановления, теории массового обслуживания, теории возмущений. В работе использовался метод асимптотического анализа повышенной точности. Для определения области применимости допредельных и асимптотических результатов применялись численные расчеты на основе полученных формул.

Результаты, представленные в работе, имеют как теоретическое, так и практическое значение.

Теоретическая ценность работы отражается в дальнейшем развитии теории восстановления и теории массового обслуживания, заключающемся в расширении классов моделей потоков однородных событий и методов их исследования, а также в обобщении полученных ранее результатов асимптотического анализа на более сложные случаи и асимптотики более высокого порядка.

Практическая ценность разработанного модифицированного метода асимптотического анализа повышенной точности заключается в возможности применения его для исследования широкого класса задач анализа и оптимизации работы различных систем массового обслуживания, входящими потоками которых являются специальные потоки однородных событий.

Достоверность и обоснованность всех полученных в диссертации результатов подтверждается строгим математическим исследованием с использованием методов теории вероятностей и случайных процессов, теории массового обслуживания, теории возмущений, дифференциального и интегрального исчислений.

Апробация работы. Основные положения работы и отдельные ее результаты докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

1. IV Всероссийская научно-практическая конференция «Информационные технологии и математическое моделирование». г. Анжеро-Судженск, 2005 г.

2. X Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи». г. Анжеро-Судженск, 2006 г.

3. Международная конференция «Проблемы кибернетики и информатики». г. Баку, 2006 г.

4. V Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии и математическое моделирование». г. Анжеро-Судженск, 2006 г.

5. Международная научная конференция «Математические методы повышения эффективности функционирования телекоммуникационных сетей». г. Минск, 2007.

6. XI Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи». г. Анжеро-Судженск. 2007 г.

7. VI Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии и математическое моделирование». г. Анжеро-Судженск, 2007 г.

8. Всероссийская научно-практическая конференция «Актуальные проблемы математики и методики ее преподавания». г. Томск, 2007 г.

9. VII Всероссийская конференция по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. г. Красноярск, 2008 г.

10. XII Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи». г. Анжеро-Судженск, 2008 г.

Публикации. По результатам выполненных исследований автором опубликовано 16 печатных работ, в том числе 4 статьи, из них 2 в изданиях, рекомендованных списком ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 112 наименований. Общий объем работы составляет 167 страниц, в том числе основной текст 156 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении обоснована актуальность работы, сформулирована цель и задачи диссертационного исследования, изложена его научная новизна, раскрыты теоретическое значение и практическая ценность полученных результатов, кратко излагается содержание диссертационной работы.

В главе 1 строится математическая модель ММР-потока, и рассматриваются его два наиболее простых частных случая – стационарный пуассоновский поток и ММР-поток с двумя состояниями, на примере которых сформулированы основные идеи метода асимптотического анализа в условии растущего времени случайных потоков однородных событий и показана математическая корректность применяемых предельных переходов и асимптотических разложений.

Асимптотическое условие растущего времени определим следующими условиями. Пусть T – неограниченно возрастающая положительная величина. Равенство

$$t = T\tau,$$

определяющее зависимость времени t от «медленного времени» τ, будем называть *асимптотическим условием растущего времени*, так как для любого фиксированного значения $\tau > 0$ значение t неограниченно возрастает. Все рассмотренные асимптотики данной диссертации реализованы в условии растущего времени.

При исследовании ММР-потока с двумя состояниями, была построена математическая модель его основной характеристики $n(t)$ – числа событий, наступивших в потоке за время t. Так как процесс $n(t)$ не является марковским,

то ввели процесс $\{k(t), n(t)\}$, который является двумерной цепью Маркова с непрерывным временем, здесь $k(t)$ – управляющая ММР-потоком эргодическая цепь Маркова с двумя состояниями. Получена система дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей $P\{k(t)=k, n(t)=n\}=P(k,n,t)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(1,n,t)}{\partial t} = -(\lambda_1+q_1)P(1,n,t)+\lambda_1 P(1,n-1,t)+q_2 P(2,n,t), \\ \dfrac{\partial P(2,n,t)}{\partial t} = -(\lambda_2+q_2)P(2,n,t)+\lambda_2 P(2,n-1,t)+q_1 P(1,n,t). \end{cases}$$

Частное решение системы для стационарного ММР-потока определяется следующими начальными условиями

$$P(1,n,0)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad n>0, \\ R(1), & \text{если} \quad n=0, \end{cases} \qquad P(2,n,0)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad n>0, \\ R(2), & \text{если} \quad n=0, \end{cases}$$

где $\{R(1), R(2)\}$ – стационарное распределение вероятностей значений цепи Маркова $k(t)$ имеет вид

$$R(1)=\frac{q_2}{q_1+q_2}, \qquad R(2)=\frac{q_1}{q_1+q_2}. \tag{1}$$

Обозначим функции

$$H(k,u,t)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{jun}P(k,u,t)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{jun}P\{n(t)=n \mid k(t)=k\}P\{k(t)=k\}=$$
$$=P\{k(t)=k\}M\{e^{jun(t)} \mid k(t)=k\}=R(k)M\{e^{jun(t)} \mid k(t)=k\},$$

где $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица, которые будем называть *функции, аналогичные характеристическим.* Для этих функций из системы дифференциальных уравнений Колмогорова и начальных условий получим следующую задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(1,u,t)}{\partial t} = \{\lambda_1(e^{ju}-1)-q_1\}H(1,u,t)+q_2 H(2,u,t), \\ \dfrac{\partial H(2,u,t)}{\partial t} = q_1 H(1,u,t)+\{\lambda_2(e^{ju}-1)-q_2\}H(2,u,t), \\ H(1,u,0)=R(1), \\ H(2,u,0)=R(2), \end{cases} \tag{2}$$

для которой было найдено ее решение $H(k,u,t)$. Функции $H(1,u,t)$ и $H(2,u,t)$ определяют характеристическую функцию $h(u,t)$ числа $n(t)$ событий, наступивших в рассматриваемом потоке за время t, следующим равенством

$$h(u,t)=H(1,u,t)+H(2,u,t).$$

Рассмотренный ММР-поток с двумя состояниями является наиболее простым из класса ММР-потоков, а также других классов специальных потоков однородных событий. И даже для наиболее простого потока с двумя состояниями полученные формулы достаточно громоздкие. Поэтому естественно возникает необходимость развития других методов исследования более сложных потоков и, прежде всего, метода асимптотического анализа.

При асимптотическом исследовании предложены замены, которые позволяют от задачи Коши для функций $H(k,u,t)$ перейти к сингулярно возмущенной по малому параметру ε задаче для функций $F(k,w,\tau,\varepsilon)$.

Из-за наличия сингулярностей решение $F(k,w,\tau,\varepsilon)$ сингулярно возмущённой задачи, как правило, не имеет предела при $\varepsilon\to 0$, либо пределом является нулевое значение, поэтому его даже приближённо нельзя выразить через решение предельной невозмущённой задачи. Но в отличие от стандартной ситуации, сингулярно возмущённые задачи, рассматриваемые в данной диссертации, обладают некоторыми исключительными особенностями, которые приводят к тому, что для решения $F(k,w,\tau,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной задачи существует при $\varepsilon\to 0$ предел $F(k,w,\tau)$, который определяется решением предельных невозмущённых задач.

Особенности асимптотического исследования рассмотрены в доказательствах лемм 1–9 первой главы. Основным результатом вышеприведённых рассуждений являются формулы для пределов $F(k,w,\tau)$ при $\varepsilon\to 0$ решения $F(k,w,\tau,\varepsilon)$ сингулярно возмущённой задачи, полученные предельным переходом в формулах, определяющих явное выражение для их решения. Этот же результат можно получить, применяя метод асимптотического анализа, не решая достаточно сложную сингулярно возмущенную задачу.

Идеи самого метода асимптотического анализа изложены в доказательствах теорем 1 и 2 первого раздела диссертации.

Обозначая $1/T=\varepsilon$, в задаче (2) выполним замены

$$t\varepsilon=\tau,\qquad u=\varepsilon w,\qquad H(k,u,t)=F_1(k,w,\tau,\varepsilon),$$

получим сингулярно возмущённую малым параметром ε задачу Коши

$$\begin{cases}\varepsilon\dfrac{\partial F_1(1,w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=\{\lambda_1(e^{j\varepsilon w}-1)-q_1\}F_1(1,w,\tau,\varepsilon)+q_2F_1(2,w,\tau,\varepsilon),\\ \varepsilon\dfrac{\partial F_1(2,w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=q_1F_1(1,w,\tau,\varepsilon)+\{\lambda_2(e^{j\varepsilon w}-1)-q_2\}F_1(2,w,\tau,\varepsilon),\\ F_1(1,w,0,\varepsilon)=R(1),\\ F_1(2,w,0,\varepsilon)=R(2).\end{cases}\tag{3}$$

Теорема 1. *Для решения* $F_1(k,w,\tau,\varepsilon)$ *сингулярно возмущённой задачи* (3) *существует предел* $F_1(k,w,\tau)$ *при* $\varepsilon\to 0$*, который совпадает с решением невозмущённой (предельной) задачи и имеет вид*

$$F_1(k,w,\tau)=R(k)\exp\{jw\kappa_1\tau\},$$

где вероятности $R(k)$ *имеют вид* (1), *а величина* κ_1 *определяется равенством*

$$\kappa_1=\lambda_1R(1)+\lambda_2R(2).$$

Следствие. Функцию

$$h_1(u,t)=\exp\{ju\kappa_1t\}$$

будем называть *асимптотикой первого порядка* характеристической функции $h(u,t)$ числа событий $n(t)$, наступивших в потоке за время t, которая имеет вид

$$h(u,t)=H(1,u,t)+H(2,u,t)=M\{\exp(jun(t))\}.$$

Для нахождения асимптотики второго порядка в задаче (2) выполним замену

$$H(k,u,t)=\exp\{ju\kappa_1t\}H_2(k,u,t),$$

тогда для функций $H_2(k,u,t)$ получим задачу, в которой, обозначив $1/T=\varepsilon^2$, выполним замены

$$t\varepsilon^2=\tau, \qquad u=\varepsilon w, \qquad H_2(k,u,t)=F_2(k,w,\tau,\varepsilon),$$

получим сингулярно возмущённую задачу

$$\begin{cases} \varepsilon^2\dfrac{\partial F_2(1,w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=\{\lambda_1(e^{j\varepsilon w}-1)-q_1-j\varepsilon w\kappa_1\}F_2(1,w,\tau,\varepsilon)+q_2F_2(2,w,\tau,\varepsilon), \\ \varepsilon^2\dfrac{\partial F_2(2,w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=q_1F_2(1,w,\tau,\varepsilon)+\{\lambda_2(e^{j\varepsilon w}-1)-q_2-j\varepsilon w\kappa_1\}F_1(2,w,\tau,\varepsilon), \\ F_2(1,w,0,\varepsilon)=R(1), \\ F_2(2,w,0,\varepsilon)=R(2). \end{cases} \qquad (4)$$

Теорема 2. *Для решения* $F_2(k,w,\tau,\varepsilon)$ *сингулярно возмущённой задачи* (4) *при* $\varepsilon\to 0$ *существует предел* $F_2(k,w,\tau)$, *который совпадает с решением невозмущённой (предельной) задачи и имеет вид*

$$F_2(k,w,\tau)=R(k)\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\tau\right\},$$

где вероятности $R(k)$ *определяются равенствами* (1), *а величина* κ_2 *равна*

$$\kappa_2=\kappa_1+2\frac{(\lambda_2-\lambda_1)^2}{q_1+q_2}R(1)R(2).$$

Следствие. Функцию

$$h_2(u,t)=\exp\left\{ju\kappa_1t+\frac{(ju)^2}{2}\kappa_2t\right\}$$

будем называть *асимптотикой второго порядка* характеристической функции числа событий $n(t)$, наступивших в потоке за время t

В главе 2 рассмотрен МАР-поток, для которого, аналогично главе 1, определена математическая модель его основной характеристики $n(t)$ – числа событий, наступивших в потоке за время t. В силу того, что процесс $n(t)$ не является марковским, определили двумерный процесс $\{k(t),n(t)\}$, который является цепью Маркова с непрерывным временем, здесь $k(t)$ – управляющая МАР-потоком цепь Маркова. Для вероятностей $P\{k(t)=k,n(t)=n\}=P(k,n,t)$ получена система дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(k,n,t)}{\partial t}=(P(k,n-1,t)-P(k,n,t))\lambda_k+$$
$$+\sum_{\nu}^{K}\{P(\nu,n-1,t)d_{\nu k}+P(\nu,n,t)(1-d_{\nu k})\}q_{\nu k},$$

при заданном начальном условии, где $R(k)$ – стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова $k(t)$

$$\begin{cases} P(k,0,0)=R(k), \\ P(k,n,0)=0, \quad n\ge 1. \end{cases}$$

Для функций, аналогичных характеристическим, записана задача Коши в матричном виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(u,t)}{\partial t} = H(u,t)\left(Q + \left(e^{ju} - 1\right)B\right), \\ H(u,0) = R, \end{cases}$$

где $R = \{R(1), R(2), ...\}$ – вектор-строка стационарного распределения вероятностей состояний цепи Маркова $k(t)$, Q – матрица инфинитезимальных характеристик цепи Маркова $k(t)$, управляющей потоком, матрица B – сумма двух матриц Λ и A, где Λ – диагональная матрица с элементами λ_k на главной диагонали, а матрица $A = D * Q$ – есть произведение Адамара двух матриц D и Q, здесь D – матрица с нулевыми элементами на главной диагонали и элементами $d_{k_1 k_2}$ вне главной диагонали. Тогда характеристическая функция числа $n(t)$ событий, наступивших в рассматриваемом потоке за время t, имеет вид

$$Me^{jun(t)} = H(u,t)E = h(u,t),$$

здесь E – единичный вектор-столбец.

Данная модель исследована модифицированным методом асимптотического анализа, который был проведен в условии растущего времени. Наиболее принципиальной частью модификации метода являются замены

$$H(u,t) = e^{ju\kappa_1 t} H_2(u,t),$$

$$H_{m-1}(u,t) = \exp\left(\frac{(ju)^{m-1}}{(m-1)!}\kappa_{m-1} t\right) H_m(u,t), \text{ при } m \geq 3, \tag{5}$$

позволяющие, реализуя выкладки соответствующих разделов главы 2, находить асимптотики $h_m(u,t)$ все более высоких порядков m.

Для функций $H_m(u,t)$, учитывая (5), можно записать

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_m(u,t)}{\partial t} = H_m(u,t)\left(Q + \left(e^{ju} - 1\right)B - \sum\limits_{i=1}^{m-1} \dfrac{(ju)^i}{i!}\kappa_i I\right), \\ H_m(u,0) = R. \end{cases} \tag{6}$$

Обозначив $1/T = \varepsilon^m$, в задаче (6) выполним замены

$$\varepsilon^m t = \tau, \qquad u = \varepsilon w, \qquad H_m(u,t) = F_m(w,\tau,\varepsilon),$$

получим

$$\begin{cases} \varepsilon^m \dfrac{\partial F_m(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = F_m(w,\tau,\varepsilon)\left(Q + (e^{jw\varepsilon} - 1)B - \sum\limits_{i=1}^{m-1} \dfrac{(jw\varepsilon)^i}{i!}\kappa_i I\right), \\ F_m(w,0,\varepsilon) = R. \end{cases} \tag{7}$$

Лемма. *Решение задачи* (7) *при* $\varepsilon \to 0$ *имеет вид*

$$F_m(w,\tau) = R \cdot \Phi_m(w,\tau),$$

где вектор-строка R *определена выше, а скалярная функция* $\Phi_m(w,\tau)$ *удовлетворяет начальному условию* $\Phi_m(w,0) = 1$.

Теорема 3. *Скалярная функция* $\Phi_m(w,\tau)$ *имеет вид*

$$\Phi_m(w,\tau) = \exp\left(\frac{(jw)^m}{m!}\kappa_m \tau\right),$$

где величина κ_m *определяется из рекуррентной последовательности*

$$\kappa_1 = RBE,$$

$$\kappa_m = \kappa_1 + \sum_{i=1}^{m-1} C_m^i f_{i+1} BE,$$

здесь векторы f_i *являются решениями последовательности неоднородных систем уравнений*

$$f_2 Q + R(B - \kappa_1 I) = 0,$$

$$f_i Q + R(B - \kappa_{i-1} I) + \sum_{\nu=1}^{i-2} C_{i-1}^{\nu} f_{\nu+1}(B - \kappa_{i-1-\nu} I) = 0.$$

Следствие. Функцию

$$h_m(u,t) = \exp\left\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{(ju)^m}{m!} \kappa_m t \right\} \tag{8}$$

будем называть *асимптотикой m-го порядка* характеристической функции числа событий $n(t)$, наступивших в потоке за время t.

Сформулирован алгоритм построения аппроксимации второго порядка

$$P_2(n,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jun} h_2(u,t) du$$

допредельного распределения числа событий, наступивших в потоке за время t, применением асимптотики второго порядка $h_2(u,t)$, который обобщается на случай произвольного порядка аппроксимации.

Асимптотика m-го порядка $h_m(u,t)$ для допредельной характеристической функции $Me^{jun(t)}$ имеет достаточно простой вид (8) и определяется лишь параметрами κ_i, $i = \overline{1,m}$, которые при $t = 1$ имеют смысл семиинвариантов числа событий наступивших в MAP-потоке за единицу времени. При $t \neq 1$ асимптотические семиинварианты $\kappa_i t$ пропорциональны длине t интервала наступления событий в потоке.

Так как MAP-поток является общим потоком, как для исследованного в первой главе MMP-потока, так и для синхронного MAP-потока, рекуррентного PH-потока и полумарковского PH-потока, то результаты второй главы могут быть применимы для исследования этих частных случаев MAP-потока.

В главе 3 рассматриваются полумарковские потоки однородных событий, а именно рекуррентный поток событий как самый простой частный случай полумарковского потока, поток марковского восстановления (Markovian renewal process) и полумарковский поток однородных событий (Semi-Markovian process).

В разделе 3.1 и 3.2 рассмотрены математические модели рекуррентного потока событий и потока марковского восстановления, для распределения вероятностей числа событий наступивших в которых были составлены системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Исследование этих потоков не проводилось, так как они являются частными случаями общего полумарковского потока.

Очевидно, и в этом случае процесс $n(t)$ является немарковским, поэтому определили еще два случайных процесса: $z(t)$ – длину интервала от момента времени t до момента наступления очередного события в рассматриваемом потоке, $s(t)$ – непрерывный слева процесс с непрерывным временем, значения которого на интервале $(t_n, t_{n+1}]$ постоянны и определяются равенствами $s(t) = \xi(n+1)$. В силу сделанных определений, случайный процесс $\{s(t), n(t), z(t)\}$ является трехмерным марковским процессом с непрерывным временем, поэтому для его распределения вероятностей $P(s,n,z,t) = P\{s(t) = s, n(t) = n, z(t) < z\}$, можно составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(s,n,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(s,n,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial P(s,n,0,t)}{\partial z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\partial P(\nu,n-1,0,t)}{\partial z} A_{\nu k}(z).$$

Обозначим $H(s,u,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(s,n,z,t)$, тогда

$$\frac{\partial H(s,u,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial H(s,u,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial H(s,u,0,t)}{\partial z} + e^{ju} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\partial H(\nu,u,0,t)}{\partial z} A_{\nu k}(z).$$

Обозначим строку вектор функцию $H(u,z,t) = \{H(1,u,z,t), H(2,u,z,t), ...\}$, так же матрицу $A(z)$ с элементами $A_{\nu k}(z)$, тогда полученную систему перепишем в матричном виде

$$\frac{\partial H(u,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial H(u,z,t)}{\partial z} + \frac{\partial H(u,0,t)}{\partial z} \{e^{ju} A(z) - I\},$$

где I – единичная матрица, а $R(z)$ – стационарное распределение двумерного марковского процесса $\{s(t), z(t)\}$. Решение матричного уравнения удовлетворяет начальному и краевому условиям $H(u,z,0) = R(z)$, $H(u,0,t) = 0$.

Выполнен асимптотический анализ SM-потока, найдена асимптотика первого порядка

$$h_1(u,t) = e^{ju\kappa_1 t},$$

где величина κ_1 определяется равенством

$$\kappa_1 = \frac{1}{rAE}, \text{ где } A = \int_0^{\infty} (P - A(x))dx,$$

E – единичный вектор-столбец, r – стационарное распределение вероятностей вложенной цепи Маркова $\xi(n)$ с дискретным временем, которая определена матрицей P.

Асимптотика второго порядка определяется в виде

$$h_2(u,t) = \exp\left\{ ju\kappa_1 t + \frac{(ju)^2}{2} \kappa_2 t \right\},$$

где

$$\kappa_2 = \kappa_1 + 2 f_2'(0) E,$$

вектор-строка $f_2'(0)$ является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} f_2'(0)(P-I)=\kappa_1 r(\kappa_1 A-I), \\ f_2'(0)AE=\dfrac{\kappa_1^2 r}{2}A^{(2)}E-1, \end{cases}$$

где матрица $A^{(2)}$ определяется равенством

$$A^{(2)}=\int_0^\infty x^2 dA(x).$$

Асимптотика третьего порядка допредельной характеристической функции $Me^{jun(t)}$ имеет вид

$$h_3(u,t)=\exp\left\{ju\kappa_1 t+\frac{(ju)^2}{2!}\kappa_2 t+\frac{(ju)^3}{3!}\kappa_3 t\right\},$$

где величины κ_1 и κ_2 определены выше, а величина κ_3 определяется равенством

$$\kappa_3=\kappa_1+3f_2'(0)E+3f_3'(0)E,$$

здесь вектор-строка $f_3'(0)$ является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} f_3'(0)(P-I)=2f_2'(0)(\kappa_1 A-P)-\kappa_1 r+\kappa_1(2\kappa_1+\kappa_2)rA-\kappa_1^3 rA^{(2)}, \\ f_3'(0)AE=1+\kappa_1\left(f_2'(0)+\dfrac{\kappa_2}{2}r\right)A^{(2)}E-\dfrac{\kappa_1^3}{3}rA^{(3)}E, \end{cases}$$

где матрица $A^{(3)}$ определяется равенством

$$A^{(3)}=\int_0^\infty x^3 dA(x).$$

Используя формулы для нахождения асимптотик первого, второго и третьего порядков, нашли аппроксимации соответствующих порядков

$$P_m(n,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-jun}h_m(u,t)du,\ m=1,2,3.$$

В главе 4 рассмотрены допредельные модели исследуемых в работе потоков однородных событий. Полученные в данной главе равенства, определяют распределение вероятностей $P(n,t)$, числа событий наступивших в MAP-потоке и в SM-потоке в виде интегральных преобразований.

Теорема 4. *Распределение вероятностей $P(n,t)$ числа событий, наступивших в MAP-потоке за время t, вычисляется по формуле*

$$P(n,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-j\alpha t}R\left((B-Q-j\alpha I)^{-1}B\right)^n(B-Q-j\alpha I)^{-1}Ed\alpha.$$

Теорема 5. *Распределение вероятностей* $P(n,t)$ *числа событий, наступивших в полумарковском потоке за время* t*, вычисляется по формулам*

$$\begin{cases} P(0,t) = 1 - \dfrac{\kappa_1 r}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{y^2}\left(1 - e^{-jyt}\right)\left(I - A^*(y)\right)Edy, \\ P(n,t) = \dfrac{\kappa_1 r}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{y^2}\left(1 - e^{-jyt}\right)\left(1 - A^*(y)\right)^2 A^{*n-1}(y)Edy, \end{cases}$$

где $A^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha z} dA(z)$.

Численная реализация допредельных формул позволяет определить значения вероятностей для достаточно широкого класса значений параметров, определяющих потоки и значений t. Но естественно, что возможности численных реализаций ограничены вычислительными ресурсами.

На проблему выбора способа исследования потока: численное нахождение допредельного распределения вероятностей числа событий наступивших в потоке или асимптотическое исследование, – влияет область применимости каждого из способов исследования. Эти области взаимно дополняют друг друга, так как численное исследование реализуемо при значениях величины $\kappa_1 t$ ограниченной сверху, то асимптотическое исследование дает все меньшую точность с увеличением значений величины $\kappa_1 t$. Для достаточно больших значений $\kappa_1 t$ асимптотический метод остается единственно возможным. Так же важен порядок аппроксимации – чем он выше, тем более точные результаты дает метод асимптотического анализа.

В Заключении диссертации приведены основные результаты.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Лопухова С.В., Назаров А.А. Исследование MAP-потока методом асимптотического анализа N-го порядка // Вестник Томского государственного университета. Серия Информатика. Кибернетика. Математика. – 2006. – № 293. – С. 110–115.

2. Назаров А.А., Лопухова С.В., Гарайшина И.Р. Исследование полумарковского потока событий // Вычислительные технологии, 2008. – Т. 13. – Спецвыпуск 5. – С. 56–62.

3. Лопухова С.В., Назаров А.А. Исследование моментов высших порядков MP-потока, управляемого эргодической цепью Маркова // Информационные технологии и математическое моделирование: Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции. Томск, 2005. – Ч. 2. – С. 10–12.

4. Лопухова С.В., Назаров А.А. Численный алгоритм нахождения распределения вероятностей для MCMP-потока // Вестник Томского государственного университета. Серия Информатика. Кибернетика. Математика. – 2006. – Приложение № 16.– С. 113–119.

5. Лопухова С.В., Назаров А.А. Исследование МСМР-потока асимптотическим методом третьего порядка // Вестник Кемеровского государственного университета. Серия Математика. – 2005. – Вып. 4 (24). – С. 218–227.

6. Лопухова С.В., Назаров А.А. Исследование моментов высших порядков МАР-потока, управляемого эргодической цепью Маркова // Материалы X Всероссийской научно-практической конференции «Научное творчество молодежи». – Томск, 2006. – Ч. 1. – С. 156–158.

7. Назаров А.А., Лопухова С.В. Исследование МАР-потока методом асимптотического анализа второго порядка // Проблемы кибернетики и информатики: Материалы международной конференции. – Баку, 2006. – Т. 1. – С. 201–204.

8. Лопухова С.В., Назаров А.А. Исследование потока марковского восстановления асимптотическим методом первого порядка // Информационные технологии и математическое моделирование: Материалы V Международной научно-практической конференции. – Томск, 2006. – Ч. 1 – С. 121–123.

9. Лопухова С.В., Назаров А.А. Исследование потока марковского восстановления асимптотическим методом второго порядка // Вестник Томского государственного университета. Серия Информатика. Кибернетика. Математика. – 2006. – Приложение №19. – С.178–183.

10. Назаров А.А., Лопухова С.В. Исследование потока марковского восстановления асимптотическим методом второго порядка // ММПЭИТС: Материалы международной научной конференции. – Минск, 2007. – С. 170–174.

11. Лопухова С.В., Назаров А.А. Исследование рекуррентного потока // Вестник Томского государственного университета. Серия Управление, вычислительная техника и информатика. – 2007. – № 1. – С. 67–76.

12. Лопухова С.В. Исследование моментов рекуррентного потока // Научное творчество молодежи: Материалы XI Всероссийской научно-практической конференции. – Томск. 2007. – Ч. 1. – С. 34–37.

13. Лопухова С.В. Исследование полумарковского потока асимптотическим методом третьего порядка // Информационные технологии и математическое моделирование: Материалы VI Международной научно-практической конференции. – Томск, 2007. – Ч. 2. – С. 30–34.

14. Лопухова С.В. Моделирование задачи оценивания длительности мертвого времени и параметров альтернирующего потока событий // Актуальные проблемы математики и методики ее преподавания: Материалы заочной Всероссийской научно-практической конференции / ТГПУ. – Томск, 2007. – С. 5–17.

15. Лопухова С.В. Исследование ММР-потока событий // Тезисы докладов VII Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. – Красноярск, 2008. – С. 50.

16. Лопухова С.В. Исследование ММР-потока асимптотическим методом в условиях растущего времени // Научное творчество молодежи: Материалы XII Всероссийской научно-практической конференции. – Томск, 2008. – Ч. 1. – С. 31–32.