Тираж 100 экз.
Отпечатано в КЦ «Позитив»
634050, г. Томск, пр. Ленина, 34 а

На правах рукописи

КОЖУХАРЬ Виктория Андреевна

МЕТОДЫ РЕАЛИЗАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ НЕЧЕТКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

05.13.01 – системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

2008

Работа выполнена на кафедре информационных и управляющих систем в Бийском технологическом институте (филиал) ГОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова» и на кафедре прикладной математики и информатики филиала ГОУ ВПО «Алтайский государственный университет» в г. Бийске

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор Пушков Сергей Григорьевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Демин Николай Серапионович

кандидат физико-математических наук, доцент Колесникова Светлана Ивановна

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет»

Защита диссертации состоится 29 января 2009 года в 10^{30} часов на заседании диссертационного совета Д 212.267.12 при ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 34 а.

Автореферат разослан: 23 декабря 2008 года

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.т.н. В.И. Смагин

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Кожухарь В.А., Пушков С.Г. К общей теории нечетких систем: нечеткая линейность и нечеткие динамические системы // Известия РАН. ТиСУ. – 2008. – № 5. – С. 77-86.**
2. Пушков С.Г., Тырышкина В.А. (Кожухарь В.А.) Нечеткие динамические системы линейные над полями // Фундаментальная и прикладная математика. – 2007. – Т. 13, № 3. – С. 147-155.
3. Кожухарь В.А., Пушков С.Г. О задаче реализации для линейных динамических систем над нечеткими числами // Известия Алтайского государственного университета. – 2007. – С. 24-29.
4. Пушков С.Г., Тырышкина В.А. (Кожухарь В.А.) Нечеткие линейные динамические системы // МАК-2005: материалы Восьмой региональной конференции по математике. - Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2005. – С. 63-64.
5. Тырышкина В.А. (Кожухарь В.А.) Нечеткие динамические системы, линейные над полями // Абелевы группы: труды Всероссийского симпозиума. – Бийск: РИО БПГУ им. В.М. Шукшина, 2005. – С. 41-43.
6. Тырышкина В.А. (Кожухарь В.А.) К вопросу о формализации способов описаний нечетких динамических систем // Математическое образование на Алтае: материалы региональной научно-методической конференции. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2005. – С. 122-123.
7. Кожухарь В.А. Достаточное условие алгебраической реализуемости для линейных динамических систем над нечеткими числами // МАК-2006: материалы девятой региональной конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2006. – С. 81-82.
8. Кожухарь В.А., Пушков С.Г. Об одном методе реализации в пространстве состояний динамических систем над треугольными нечеткими числами // МАК-2007: материалы десятой региональной конференции по математике. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2007. – С. 124-125.
9. Кожухарь В.А. Метод реализации, основанный на параллельной декомпозиции динамических систем над нечеткими числами // Математическое образование в Регионах России: материалы международной научно-практической конференции. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2007. – С. 96-98.
10. Кожухарь В.А. Метод реализации, основанный на параллельной декомпозиции динамических систем над нечеткими треугольными числами // Сборник статей II Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов. – Пенза, 2008. – С. 82-84.
11. Кожухарь В.А. Методы реализации в пространстве состояний для нечетких динамических систем // МАК-2008: материалы одиннадцатой региональной конференции по математике. - Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2008. – С. 93-95.

или

$$F^l = 1,\ G^l = \begin{pmatrix} \omega & \dots & \omega \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times m},\ H^l = \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times 1}.$$

Шаг 4. Строим искомую реализацию как параллельную композицию реализаций $\left(\mathbf{F}\ ,\mathbf{G}\ ,\mathbf{H}\ \right)$ и $\left(F^l, G^l, H^l\right)$ по формулам (18).

В **заключении** изложены основные теоретические и практические выводы настоящего исследования, подведены итоги и определены возможные направления дальнейшего изучения проблемы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Рассмотрен класс нечетких динамических систем. Для данного класса систем с использованием понятия нечеткого линейного отношения введено понятие нечеткой линейной динамической системы и исследованы некоторые свойства нечетких динамических систем линейных над полями.
2. Доказана теорема о возможности декомпозиции реакции нечеткой динамической системы на две части, отвечающие входным и выходным объектам системы.
3. Получен достаточный критерий реализуемости нечетких динамических систем.
4. Разработан метод алгебраической реализации знакоопределенных импульсных последовательностей над нечеткими треугольными числами, основанный на построении алгебраических реализаций последовательностей матриц, составленных из центральных, левых и правых границ нечетких треугольных чисел.
5. Предложен алгоритм, позволяющий строить алгебраические реализации для динамических систем над полностью отрицательными нечеткими треугольными числами.
6. Разработан метод вычисления алгебраических реализаций для динамических систем над положительными нечеткими треугольными числами, основанный на погружении в расширенную нечеткую арифметику.
7. Доказана теорема о параллельной композиции динамических систем над положительными нечеткими треугольными числами.
8. Разработан метод алгебраической реализации динамических систем над нечеткими треугольными числами на основе их декомпозиции в параллельное соединение.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. При изучении реальных объектов управления часто приходится сталкиваться с различного рода неопределенностью в исходных данных. Реальные задачи содержат в себе нечеткие условия и некоторую нечеткость цели в связи с тем, что их постановку осуществляет человек. Иногда нечеткость вызвана ошибками округления, измерений, приближенным представлением исследуемого процесса, воздействиями внешней среды и т. д. Чаще всего конкретное содержание задачи требует обеспечения заданного уровня нечеткости решения. Особенностью изучения реальных объектов управления является то, что значительная часть информации, которая необходима для их математического описания, существует в форме представлений или пожеланий человека.

Задача реализации является одной из основных задач не только теории управления, но и математической теории систем, решение которой зависит от экспериментальных данных. Фундаментальные исследования проблемы реализации в теории систем связаны с именами М. Месаровича и Я. Такахары, Р. Калмана, Б.Л. Хо, С. Эйленберга, Э. Зонтага, Я. К. Виллемса, П. Фурмана, Р. Айсинга, Дж. Риссанена и др.

Для систем, в которых существенную роль играют сложность и неопределенность, характерно наличие одновременно разного рода информации: точечных замеров и значений параметров; допустимых интервалов их изменения; статистических законов распределения для отдельных величин; лингвистических критериев и ограничений, полученных от специалистов-экспертов; отсутствие возможности статистического описания из-за уникальности и неоднозначности ситуаций; психологические аспекты принятия человеком предлагаемых решений и т.д. Наличие в таких системах одновременно различного вида неопределенности делает необходимым для их анализа использование дополнительного математического аппарата. Традиционно методы математического анализа используются при точных исходных данных. Математическая статистика и теория вероятностей использует экспериментальные данные, обладающие строго определенной точностью. Кроме того, применение для оперирования с неопределенными величинами аппарата теории вероятностей приводит к тому, что неопределенность, независимо от ее природы, отождествляется со случайностью, между тем как основным источником неопределенности во многих процессах принятия решений является нечеткость или расплывчатость.

Таким образом, возникает необходимость использования для принятия решений такой теории, которая позволяет адекватно учесть все имеющиеся виды неопределенности. В последнее время, для исследования систем с нечеткостью и неоднозначностью в данных все чаще в качестве эффективного инструмента используются такие подходы, как теория нечетких множеств (Л. Заде, А. Н. Аверкин, Д. А. Поспелов, Д. Дюбуа, А. Прад, С. А. Орловский, Р.А. Алиев, Э.Г. Захарова, С.В. Ульянов и др.).

Большинство работ посвященных анализу, синтезу и исследованию систем управления в последнее время основываются на представлении систем в терминах пространства состояний. При решении задач многомерных систем и сложных замкнутых систем методы пространства состояний позволяют осуществить четкую формализацию и легкость выполнения вычислительных процедур. Основные результаты, связанные с представлением динамических систем в пространстве состояний в теории автоматического управления принадлежат П. Деруссо, Р. Рой и Ч. Клоуз, Г. Розенброку, В. Стрейцу, Ф.Л. Черноусько и др.

Анализ литературы, посвященной динамическим системам с нечеткой неопределенностью, показал, что моделированию и тесно связанной с ним проблеме реализации не уделяется достаточного внимания. В настоящий момент не существует эффективных методов и алгоритмов для нахождения описания такой системы в пространстве состояний, а методы классической теории реализации неприменимы, так как алгебраические свойства множества нечетких чисел в рамках естественной нечеткой арифметики, основанной на принципе распространения, не являются достаточно удовлетворительными. Они не образуют таких удобных алгебраических структур, как кольцо или поле.

Настоящая работа посвящена разработке методов решения задачи реализации для линейных динамических систем с дискретным временем над нечеткими числами. В данной работе рассматриваются (по возможности минимальные) описания пространства состояний динамической системы над нечеткими числами по известному описанию вход-выход, основанному на наблюдении во времени входных сигналов и соответствующей им реакции системы (выходных сигналов).

Целью настоящей **работы** является исследование проблемы формализации способов описаний нечетких систем, разработка методов и алгоритмов решения задачи реализации для линейных динамических систем с дискретным временем над нечеткими треугольными числами.

Поставленная цель достигается решением следующих **задач**:

1. Рассмотрением класса нечетких динамических систем и свойств нечетких динамических систем, линейных над полями.
2. Постановкой задачи реализации для класса линейных динамических систем с дискретным временем над нечеткими числами.
3. Получением критериев реализуемости для динамических систем над нечеткими числами, поведение вход-выход которых описывается импульсной последовательностью матриц над нечеткими числами.
4. Разработкой методов вычисления алгебраических реализаций и созданием на базе этих методов алгоритмов для решения задач реализации.

В качестве **методической основы** для разработки методов, предложенных в данной работе, выбран алгебраический подход к теории систем и методы теории нечетких множеств.

Научная новизна результатов, полученных в настоящей работе, состоит в следующем:

нечеткой алгебраической реализацией будет система $\left(\tilde{\mathbf{F}},\tilde{\mathbf{G}},\tilde{\mathbf{H}}\right)$ с блочными матрицами

$$\tilde{\mathbf{F}}=\begin{pmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & F^l\end{pmatrix},\quad \tilde{\mathbf{G}}=\begin{pmatrix}\mathbf{G}\\ G^l\end{pmatrix},\quad \tilde{\mathbf{H}}=\begin{pmatrix}\mathbf{H} & H^l\end{pmatrix}. \tag{18}$$

Алгоритм 3.4.

Исходные данные. Импульсная последовательность n матриц над нечеткими треугольными числами размера $p\times m$

$$\left\{\tilde{\mathbf{A}}_1,\tilde{\mathbf{A}}_2,\ldots,\tilde{\mathbf{A}}_n\right\}, \tag{19}$$

где $\tilde{\mathbf{A}}=\left(\tilde{\mathbf{a}}_{jk}\right)_i=\left((a_{jk},\alpha_{jk},\beta_{jk})\right)_i$, $i=1,2,...,n,\ j=1,2,...,p,\ k=1,2,...,m$.

Шаг 1. Найдем наименьший элемент из $a_{jk}-\alpha_{jk}$ последовательности матриц над нечеткими треугольными числами (19). Обозначим его ω. Пусть Δ – матрица размерности $p\times m$, все элементы, которой равны ω, т.е.

$$\omega=\left|\min_{\substack{j=1,2,\ldots,p\\ k=1,2,\ldots,m\\ i=1,2,\ldots,n}}\left(a_{jk}-\alpha_{jk}\right)_i\right|,\quad \Delta=\begin{pmatrix}\omega & \ldots & \omega\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega & \ldots & \omega\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{p\times m}.$$

Шаг 2. Разложим исходную последовательность матриц над нечеткими треугольными числами (19) следующим образом

$$\left\{\tilde{\mathbf{A}}_1,\tilde{\mathbf{A}}_2,\ldots,\tilde{\mathbf{A}}_n\right\}=\left\{\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\ldots,\mathbf{A}_n\right\}+\left\{A_1^l,A_2^l,\ldots,A_n^l\right\}=$$
$$=\left\{\mathbf{A}_1+\Delta,\mathbf{A}_2+\Delta,\ldots,\mathbf{A}_n+\Delta\right\}+\left\{-\Delta,\ldots,-\Delta\right\}.$$

Таким образом, мы разложили исходную последовательность матриц на две последовательности: последовательность матриц над положительными нечеткими треугольными числами и последовательность точечных матриц.

Шаг 3. Находим алгебраическую реализацию $\left(\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H}\right)$ для последовательности матриц над положительными нечеткими треугольными числами:

$$\left\{\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\ldots,\mathbf{A}_n\right\}=\left\{\mathbf{A}_1+\Delta,\mathbf{A}_2+\Delta,\ldots,\mathbf{A}_n+\Delta\right\}$$

с помощью методов, представленных выше. Также строим алгебраическую реализацию $\left(F^l,G^l,H^l\right)$ для последовательности точечных матриц

$$\left\{A_1^l,A_2^l,\ldots,A_n^l\right\}=\left\{-\Delta,\ldots,-\Delta\right\}.$$

Эта реализация имеет размерность $n=1$ и матрицы

$$F^l=1,\ G^l=\begin{pmatrix}-\omega & \ldots & -\omega\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times m},\ H^l=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{p\times 1}$$

$\mathbf{\Sigma}_1 = (\mathbf{F}_1, \mathbf{G}_1, \mathbf{H}_1)$ и $\mathbf{\Sigma}_2 = (\mathbf{F}_2, \mathbf{G}_2, \mathbf{H}_2)$, и их параллельная композиция $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}_1 + \mathbf{\Sigma}_2 = (\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$, где матрицы $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ имеют следующий вид

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^1 \\ \mathbf{G}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{H}^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда для отображений вход-выход систем $\mathbf{\Sigma}_1$, $\mathbf{\Sigma}_2$ и $\mathbf{\Sigma}$ имеет место

$$f_{\mathbf{\Sigma}_1 + \mathbf{\Sigma}_2} = f_{\mathbf{\Sigma}_1} + f_{\mathbf{\Sigma}_2}.$$

Следующий результат является обратным к теореме о параллельной композиции динамических систем над нечеткими треугольными числами.

Теорема 3.7. Если две последовательности матриц $\{\tilde{\mathbf{A}}_1^1, \tilde{\mathbf{A}}_2^1, \ldots, \tilde{\mathbf{A}}_i^1\}$ и $\{\tilde{\mathbf{A}}_1^2, \tilde{\mathbf{A}}_2^2, \ldots, \tilde{\mathbf{A}}_i^2\}$ над положительными нечеткими треугольными числами реализуемы с тройками матриц $(\tilde{\mathbf{F}}^1, \tilde{\mathbf{G}}^1, \tilde{\mathbf{H}}^1)$ и $(\tilde{\mathbf{F}}^2, \tilde{\mathbf{G}}^2, \tilde{\mathbf{H}}^2)$ над положительными нечеткими треугольными числами соответственно, то для последовательности

$$\{\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{A}}_i\} = \{\tilde{\mathbf{A}}_1^1, \tilde{\mathbf{A}}_2^1, \ldots, \tilde{\mathbf{A}}_i^1\} + \{\tilde{\mathbf{A}}_1^2, \tilde{\mathbf{A}}_2^2, \ldots, \tilde{\mathbf{A}}_i^2\}$$

система с блочными матрицами над положительными нечеткими треугольными числами

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}^1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \tilde{\mathbf{F}}^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{G}}^1 \\ \tilde{\mathbf{G}}^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}^1 & \tilde{\mathbf{H}}^2 \end{pmatrix}$$

будет являться нечеткой алгебраической реализацией.

С помощью теоремы 3.7 имеется возможность строить различные алгоритмы нахождения алгебраической нечеткой реализации с помощью разложения исходной импульсной последовательности матриц над нечеткими треугольными числами. Имеет место следующий результат, который является следствием теоремы 3.7, и основанный на нем алгоритм нахождения нечеткой алгебраической реализации для последовательности матриц над нечеткими треугольными числами смешанного типа.

Следствие 3.1. Пусть для последовательности матриц над положительными нечеткими треугольными числами

$$\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_i\} \tag{17}$$

существует положительная нечеткая алгебраическая реализация $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$. А также найдется алгебраическая реализация (F^l, G^l, H^l) последовательности точечных матриц $\{A_1^l, A_2^l, \ldots, A_i^l\}$. Тогда, для последовательности матриц над нечеткими треугольными числами

$$\{\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{A}}_i\} = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_i\} + \{A_1^l, A_2^l, \ldots, A_i^l\}$$

1. Рассмотрен класс нечетких динамических систем. Для данного класса систем с использованием понятия нечеткого линейного отношения введено понятие нечеткой линейной динамической системы. Доказана теорема о возможности декомпозиции реакции нечеткой динамической системы на две части, отвечающие входным и выходным объектам системы.
2. Получен достаточный критерий алгебраической реализуемости для класса линейных динамических систем с дискретным временем над нечеткими числами.
3. Сформулированы и обоснованы два новых подхода к построению алгебраических реализаций. Предложен метод алгебраической реализации знакоопределенных импульсных последовательностей над нечеткими треугольными числами, который основан на построении алгебраических реализаций последовательностей матриц, составленных из центральных, левых и правых границ нечетких треугольных чисел. Разработан подход погружения в расширенную нечеткую арифметику, который позволяет вычислять алгебраические реализации для динамических систем над положительными нечеткими треугольными числами.
4. Предложен метод алгебраической реализации динамических систем над нечеткими треугольными числами на основе их декомпозиции в параллельное соединение.

Теоретическая значимость результатов диссертации заключается в том, что полученные результаты являются шагом на пути построения общей теории нечетких систем.

Практическая значимость результатов диссертации заключается в том, что разработанные методы и алгоритмы представления динамических систем над нечеткими числами в пространстве состояний можно использовать при решении практических задач моделирования, прогнозирования и управления в технических, производственных, экологических, экономических и других системах для построения моделей объектов управления с нечеткой неопределенностью.

Положения, выносимые на защиту:

1. Теорема о возможности декомпозиции реакции нечеткой динамической системы на две части, отвечающие входным и выходным объектам системы.
2. Достаточный критерий алгебраической реализуемости динамических систем с дискретным временем над нечеткими числами.
3. Метод алгебраической реализации знакоопределенных импульсных последовательностей над нечеткими треугольными числами, основанный на построении алгебраических реализаций последовательностей матриц, составленных из центральных, левых и правых границ нечетких треугольных чисел.

4. Метод реализации для динамических систем над положительными нечеткими треугольными числами, основанный на погружении в расширенную нечеткую арифметику.

5. Метод алгебраической реализации динамических систем над нечеткими треугольными числами на основе их декомпозиции в параллельное соединение.

6. Комплекс алгоритмов для решения задачи реализации для динамических систем над нечеткими треугольными числами.

Апробация работы. Основные выводы и теоретические положения диссертации докладывались на региональных конференциях по математике «МАК-2005», «МАК-2006», «МАК-2007», «МАК-2008» (Барнаул), на совещаниях в рамках всероссийского симпозиума «Абелевы группы» (Бийск, 2005), на региональной научно-методической конференции "Математическое образование на Алтае" (Барнаул, 2005) и международной научно-практической конференции "Математическое образование в Регионах России" (Барнаул, 2007), на II Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов (Пенза, 2008).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 работ, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из перечня условных обозначений и сокращений, введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложений. Общий объем диссертационной работы составляет 137 страниц. Список литературы включает 149 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дана общая характеристика работы, обоснована актуальность выбранной темы, определены цель, задачи, объект и методы исследования, научная новизна, указаны положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** определены основные понятия теории линейных динамических систем, описаны методы и алгоритмы решения задачи реализации для таких систем, рассмотрены алгоритм Б.Л. Хо и метод, основанный на псевдообращении ганкелевых матриц.

В данной работе рассматриваются динамические системы с пространством состояний. Формальное определение для динамической системы с пространством состояний, исходящее от Р. Калмана, звучит следующим образом.

Определение 1.8. *Линейной стационарной динамической системой с дискретным временем* с m входами и p выходами *над полем* K называется сложный объект $\Sigma = (F, G, H, J)$, где

Для последовательности матриц над нечеткими треугольными числами можно предложить следующий алгоритм, который основан на погружении множеств входных сигналов, состояний и выходных сигналов нечеткой системы в расширенную нечеткую арифметику.

Алгоритм 3.3.

Исходные данные. Импульсная последовательность матриц над нечеткими треугольными числами вида (16).

Шаг 1. Образуем погруженную последовательность матриц с помощью формул (14).

Шаг 2. Найдем алгебраическую реализацию $(\bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{G}}, \bar{\mathbf{H}})$ этой последовательности с помощью классических методов.

Шаг 3. Восстановим нечеткую реализацию $(\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{H}})$ с помощью формулы (15). Согласно теореме (3.5) она должна быть правильной.

Введем в рассмотрение параллельную композицию систем.

Определение 3.9. Пусть заданы две линейные системы над полем K с одинаковыми пространствами входных (U) и выходных (Y) сигналов $\Sigma_1 = (F_1, G_1, H_1)$ и $\Sigma_2 = (F_2, G_2, H_2)$ с пространствами состояний X_1 и X_2 соответственно. Их *параллельная композиция* Σ, которую мы будем обозначать через $\Sigma_1 + \Sigma_2$, определяется как система $\Sigma = (F, G, H)$ с пространствами входных сигналов U, выходных сигналов Y и состояний $X_1 \oplus X_2$, где гомоморфизмы F, G и H определяются в соответствии со следующими правилами:

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix} : X_1 \oplus X_2 \to X_1 \oplus X_2, \quad F(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} F_1 X_1 & F_2 X_2 \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} : U \to X_1 \oplus X_2, \quad G(a) = \begin{pmatrix} G_1 a \\ G_2 a \end{pmatrix};$$

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \end{pmatrix} : X_1 \oplus X_2 \to Y, \quad H\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = H_1 x_1 + H_2 x_2.$$

Для отображений вход-выход систем Σ_1, Σ_2 и $\Sigma_1 + \Sigma_2$ имеет место, следующее соотношение, доказательство которого можно найти в:

$$f_{\Sigma_1 + \Sigma_2} = f_{\Sigma 1} + f_{\Sigma_2}.$$

Данный результат оказывается верен и для случая динамических систем над нечеткими треугольными числами.

Теорема 3.6. (О параллельной композиции динамических систем над нечеткими треугольными числами**)** Пусть имеются динамические системы над нечеткими треугольными числами одинаковой размерности

$$\Pi\tilde{\mathbf{F}}\Pi^{-1}\xi(t)+\Pi\tilde{\mathbf{G}}\Omega^{-1}\theta(t)\ominus\xi(t+1)=0,$$

$$\Gamma\tilde{\mathbf{H}}\Pi^{-1}\xi(t)\ominus\eta(t)=0.$$

Таким образом, получается, что описание динамического поведения погруженной системы над $\overline{\mathbb{FR}}$ имеет вид:

$$\xi(t+1)=\Pi\tilde{\mathbf{F}}\Pi^{-1}\xi(t)+\Pi\tilde{\mathbf{G}}\Omega^{-1}\theta(t),$$

$$\eta(t)=\Gamma\tilde{\mathbf{H}}\Pi^{-1}\xi(t).$$

Отсюда имеем

$$\overline{\mathbf{F}}=\Pi\tilde{\mathbf{F}}\Pi^{-1},\ \overline{\mathbf{G}}=\Pi\tilde{\mathbf{G}}\Omega^{-1},\ \overline{\mathbf{H}}=\Gamma\tilde{\mathbf{H}}\Pi^{-1}.$$

Получается, что при погружении последовательность матриц (16) примет вид:

$$\overline{A}_1=\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{G}}=\Gamma\tilde{\mathbf{H}}\Pi^{-1}\Pi\tilde{\mathbf{G}}\Omega^{-1}=\Gamma\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{G}}\Omega^{-1}=\Gamma\tilde{\mathbf{A}}_1\Omega^{-1},$$

$$\overline{A}_1=\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{F}}\overline{\mathbf{G}}=\Gamma\tilde{\mathbf{H}}\Pi^{-1}\Pi\tilde{\mathbf{F}}\Pi^{-1}\Pi\tilde{\mathbf{G}}\Omega^{-1}=\Gamma\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{G}}\Omega^{-1}=\Gamma\tilde{\mathbf{A}}_2\Omega^{-1},$$

$$\ldots$$

$$\overline{A}_i=\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{F}}^{i-1}\overline{\mathbf{G}}=\Gamma\tilde{\mathbf{H}}\Pi^{-1}(\Pi\tilde{\mathbf{F}}\Pi^{-1})^{i-1}\Pi\tilde{\mathbf{G}}\Omega^{-1}=\Gamma\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{F}}^{i-1}\tilde{\mathbf{G}}\Omega^{-1}=\Gamma\tilde{\mathbf{A}}_i\Omega^{-1}.$$

При переходе из расширенной нечеткой арифметики в естественную, не всегда получаются нечеткие треугольные числа, с положительной величиной нечеткости слева и справа.

Определение 3.8. Нечеткое треугольное число (a,α,β), полученное при переходе из расширенной нечеткой арифметики в естественную, будем называть правильным, если $\alpha>0$, $\beta>0$. В противном случае оно называется неправильным.

Определение 3.9. Матрицу над нечеткими треугольными числами, полученную при переходе из расширенной нечеткой арифметики в естественную, будем называть правильной, если она содержит правильные нечеткие треугольные числа.

Имеет место следующий результат.

Теорема 3.5. Если погруженная последовательность матриц над положительными нечеткими треугольными числами

$$\left\{\overline{\mathbf{A}}_1,\overline{\mathbf{A}}_2,\ldots\right\},\ \overline{\mathbf{A}}_i\in\overline{\mathbb{FR}}^{p\times m},\ i=1,2,\ldots$$

реализуема в расширенной нечеткой арифметике с матрицами $(\overline{\mathbf{F}},\overline{\mathbf{G}},\overline{\mathbf{H}})$ над нечеткими треугольными числами и, если соответствующая им тройка матриц $(\tilde{\mathbf{F}},\tilde{\mathbf{G}},\tilde{\mathbf{H}})$ над нечеткими треугольными числами в естественной арифметике является правильной, то $(\tilde{\mathbf{F}},\tilde{\mathbf{G}},\tilde{\mathbf{H}})$ - алгебраическая реализация исходной последовательности матриц $\left\{\tilde{\mathbf{A}}_1,\tilde{\mathbf{A}}_2,\ldots\right\},\ \tilde{\mathbf{A}}_i\in\mathbb{FR}^{p\times m},\ \ i=1,2,\ldots$ над нечеткими треугольными числами.

$$F:X\to X,$$

$$G:K^m\to X,$$

$$H:X\to K^p,$$

$$J:K^m\to K^p$$

есть K - линейные отображения (K -гомоморфизмы): K^m, K^p – пространства входных и выходных сигналов соответственно, X – некоторое абстрактное векторное пространство над K (пространство состояний).

Динамическое поведение системы Σ определяется следующими уравнениями:

$$x(t+1)=Fx(t)+Gu(t)$$

$$y(t)=Hx(t)+Ju(t),\quad t=0,1,2,\ldots,$$

где $t\in\mathbb{Z},\quad x(t),x(t+1)\in X,\quad u(t)\in U=K^m,\quad y(t)\in Y=K^p.$ Размерность пространства X, $\dim X$, определяет размерность системы Σ, $\dim\Sigma$.

В большинстве случаев вместо этой модели используется модель без учета связи в прямых каналах. В этом случае $J=0$ и модель приобретает вид

$$x(t+1)=Fx(t)+Gu(t),$$

$$y(t)=Hx(t),\quad t=0,1,2,\ldots$$

Для обозначения систем такого типа используется запись $\Sigma=(F,G,H)$.

Проблема построения модели пространства состояний, в классической теории систем известная как проблема реализации, для класса линейных стационарных динамических систем с дискретным временем успешно решается в рамках алгебраического подхода к проблеме, предложенного Р. Калманом и состоит в определении модели пространства состояний для динамической системы, заданной своим поведением вход-выход. Поведение вход-выход линейной стационарной многомерной управляемой системы может быть охарактеризовано импульсной последовательностью матриц размера $p\times m$ (m – число входов, p – число выходов системы):

$$\left\{A_1,A_2,\ldots\right\}.$$

В этом случае выходная последовательность векторов определяется соотношениями

$$y(t)=\sum_{i=1}^{t}A_iu(t-i),\quad t=1,2,\ldots.$$

Задача реализации для данного класса систем состоит в определении математической модели этой системы в пространстве состояний, которая описывается разностными уравнениями. Определению подлежат матрицы F, G и H вместе с их размерностями.

Задача реализации может быть сформулирована таким образом:

для заданной последовательности матриц $\{A_1, A_2, \ldots\}$ *размера* $p \times m$ *над полем* K *построить тройку матриц* (F, G, H) *над тем же полем* K *таких, что*

$$A_i = HF^{i-1}G, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

где для некоторого n *(которое также нужно определить)* H *– матрица размера* $p \times n$, F *– матрица размера* $n \times n$, G *– матрица размера* $n \times m$.

В данной главе излагаются сведения из истории теории нечетких множеств. Приведены основные подходы к определению нечетких динамических систем, дан обзор работ в области управления нечеткими динамическими системами.

Во второй главе исследуется проблема формализации способов описаний нечетких систем. Она посвящена анализу понятия нечеткой линейности для класса нечетких динамических систем. В ней рассмотрен класс общих нечетких систем, понятие нечеткой линейности для данного класса, а также класс нечетких линейных систем. Введен класс нечетких динамических систем. Для данного класса систем с использованием понятия нечеткого линейного отношения введено понятие нечеткой линейной динамической системы. Рассмотрены некоторые свойства нечетких динамических систем, линейных над полями. В частности, доказано фундаментальное для линейных систем свойство, заключающееся в возможности декомпозиции реакции системы на две части, отвечающие входным и выходным объектам системы, соответственно. Все результаты, предложенные в данной главе, проиллюстрированы числовыми примерами.

Рассматривается класс нечетких динамических систем. Нечеткая динамика определяется парой отображений, характеризующих изменение состояний системы и ее реакцию. Введем следующее определение нечеткой динамической системы.

Определение 2.4. Нечеткой динамической системой (с дискретным временем) будем называть объект $S = (U, X, Y, \varphi, \eta)$, где φ и η – определяют нечеткие отношения:

$$\varphi : X \times U \times X \to [0,1], \ \eta : X \times U \times Y \to [0,1],$$

U, X, Y – (нечеткие) объекты входных сигналов, состояний и выходных сигналов, соответственно. Динамическое поведение системы S определяется следующими соотношениями:

$$\mu_{X(t+1)}(x) = \max_{x' \in X, u \in U} T_3(\mu_{X(t)}(x'), \mu_{U(t)}(u), \varphi(x', u, x)),$$

$$\mu_{Y(t)}(y) = \max_{x \in X, u \in U} T_3(\mu_{X(t)}(x), \mu_{U(t)}(u), \eta(x, u, y)),$$

$$X(0) \in F(X), \ t = 0, 1, 2 \ldots$$

треугольных чисел вида $(\overline{a}; \overline{\alpha}, \overline{\beta})$, а операции $\overline{+}$ и $\overline{\cdot}$ - определены следующим образом

$$(\overline{a}_1; \overline{\alpha}_1; \overline{\beta}_1) \overline{+} (\overline{a}_2; \overline{\alpha}_2; \overline{\beta}_2) = (\overline{a}_1 + \overline{a}_2; \overline{\alpha}_1 \oplus \overline{\alpha}_2; \overline{\beta}_1 \oplus \overline{\beta}_2),$$

$$(\overline{a}_1; \overline{\alpha}_1; \overline{\beta}_1) \overline{\cdot} (\overline{a}_2; \overline{\alpha}_2; \overline{\beta}_2) = (\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2; \overline{\alpha}_1 \otimes \overline{\alpha}_2; \overline{\beta}_1 \otimes \overline{\beta}_2).$$

Пусть (a, α, β) - нечеткое треугольное число в естественной арифметике, $(\overline{a}; \overline{\alpha}, \overline{\beta})$ - нечеткое треугольное число в расширенной арифметике. Переход от (a, α, β) к $(\overline{a}; \overline{\alpha}, \overline{\beta})$ и обратно, будем осуществлять с помощью функции $f(x) = x$, по следующим правилам:

$$\overline{a} = a, \overline{\alpha} = a - \alpha, \overline{\beta} = a + \beta, \tag{14}$$

$$a = \overline{a}, \alpha = a - \overline{\alpha}, \beta = \overline{\beta} - a. \tag{15}$$

Сформулируем задачу реализации в пространстве состояний динамических систем над нечеткими треугольными числами: для заданной последовательности матриц над нечеткими треугольными числами

$$\{\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \ldots\}, \ \tilde{\mathbf{A}}_i \in \mathbb{FR}^{p \times m}, \ i = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

построить тройку матриц $(\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{H}})$ над нечеткими треугольными числами таких, что выполняются матричные уравнения

$$\tilde{\mathbf{A}}_i = \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{F}}^{i-1}\tilde{\mathbf{G}}, \ i = 1, 2, \ldots,$$

где $\tilde{\mathbf{F}} \in \mathbb{FR}^{n \times n}$, $\tilde{\mathbf{G}} \in \mathbb{FR}^{n \times m}$, $\tilde{\mathbf{H}} \in \mathbb{FR}^{p \times n}$.

Динамическое поведение системы над нечеткими треугольными числами описывается следующими уравнениями:

$$x(t+1) = \tilde{\mathbf{F}}x(t) + \tilde{\mathbf{G}}u(t),$$

$$y(t) = \tilde{\mathbf{H}}x(t)$$

или

$$\tilde{\mathbf{F}}x(t) + \tilde{\mathbf{G}}u(t) \ominus x(t+1) = 0,$$

$$\tilde{\mathbf{H}}x(t) \ominus y(t) = 0.$$

Пусть состояниям системы $x(t)$ и $x(t+1)$ в моменты времени t и $t+1$, управлению $u(t)$ и выходу $y(t)$ соответствуют $\xi(t)$, $\xi(t+1)$, $\theta(t)$ и $\eta(t)$. Тогда, погружая динамическую систему над нечеткими треугольными числами над $\mathbb{FR}$ в $\overline{\mathbb{FR}}$, получим:

$$\Pi(\tilde{\mathbf{F}}\Pi^{-1}(\xi(t)) + \tilde{\mathbf{G}}\Omega^{-1}(\theta(t)) \ominus \Pi^{-1}(\xi(t+1))) = 0,$$

$$\Gamma(\tilde{\mathbf{H}}\Pi^{-1}(\xi(t)) \ominus \Gamma^{-1}(\eta(t))) = 0.$$

Раскроем скобки и получим

ческие системы над нечеткими треугольными числами $(\mathbf{F},-\mathbf{G},\mathbf{H})$ или $(\mathbf{F},\mathbf{G},-\mathbf{H})$.

Как было показано выше алгебраические свойства множества нечетких чисел в рамках естественной нечеткой арифметики, как и алгебраические свойства классической интервальной арифметики не являются достаточно удовлетворительными. Они не позволяют нам воспользоваться классическими методами для решения задачи реализации. Для того чтобы решить данную задачу нам необходимо перенести ее из рамок естественной нечеткой арифметики в расширенную нечеткую арифметику, которая обладает более широкими алгебраическими свойствами. Подход к решению задачи реализации для линейных систем над нечеткими числами, предложенный в данной работе, основан на переходе множеств входных сигналов, состояний и выходных сигналов нечеткой системы в расширенные нечеткие пространства. В этом случае имеет место следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{FR}^m & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{G}}} & \mathbb{FR}^n & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{F}}} & \mathbb{FR}^n & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{H}}} & \mathbb{FR}^p \\
\Omega\downarrow\uparrow\Omega^{-1} & & \Pi\downarrow\uparrow\Pi^{-1} & & \Pi\downarrow\uparrow\Pi^{-1} & & \Gamma\downarrow\uparrow\Gamma^{-1}. \\
\overline{\mathbb{FR}}^m & \xrightarrow{\bar{\mathbf{G}}} & \overline{\mathbb{FR}}^n & \xrightarrow{\bar{\mathbf{F}}} & \overline{\mathbb{FR}}^n & \xrightarrow{\bar{\mathbf{H}}} & \overline{\mathbb{FR}}^p
\end{array}$$

На этой диаграмме $\mathbb{FR}$ обозначает множество нечетких чисел с обычной нечеткой арифметикой, а $\overline{\mathbb{FR}}$ обозначает множество нечетких чисел относительно расширенной нечеткой арифметики, Π, Ω и Γ - погружения нечеткого пространства $\mathbb{FR}$ в расширенную нечеткую арифметику $\overline{\mathbb{FR}}$.

Для построения расширенной нечеткой арифметики возьмем в качестве основной функции $f(x)=x$. Рассмотрим поле действительных чисел $\langle\mathbb{R},\oplus,\otimes\rangle$. Функция $f(x)=x$ является взаимно однозначным отображением $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$. Определим операции $\oplus$ и $\otimes$ таким образом, чтобы f являлось изоморфизмом соответствующих систем. Для этого должны выполнятся следующие равенства:

$$\bar{\alpha}\oplus\bar{\beta}=f(f^{-1}(\bar{\alpha})+f^{-1}(\bar{\beta})),$$
$$\bar{\alpha}\otimes\bar{\beta}=f(f^{-1}(\bar{\alpha})\cdot f^{-1}(\bar{\beta}))$$

Для функции $f(x)=x$ эти равенства примут вид

$$\bar{\alpha}\oplus\bar{\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta},$$
$$\bar{\alpha}\otimes\bar{\beta}=\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}$$

Определение 3.7. *Расширенная нечеткая арифметика* – это алгебраическая система $\langle\overline{\mathbb{FR}},\bar{+},\bar{\cdot}\rangle$, носитель которой – множество всех нечетких

Для класса нечетких динамических систем с использованием понятия нечеткого линейного отношения введем понятие нечеткой линейной динамической системы.

Определение 2.5. Пусть K – поле, U,X,Y – линейные пространства над полем K. Нечеткую динамическую систему S, определенную согласно определению 2.4, будем называть нечеткой K-линейной динамической системой, если φ и η определяют нечеткие K-линейные отношения, т.е. для любых $x,x',\hat{x},\hat{x}'\in X$, $u,u'\in U$, $y,y'\in Y$ и любого $\lambda\in K$ выполняются условия:

$$\varphi(x+x',u+u',\hat{x}+\hat{x}')\ge T(\varphi(x,u,\hat{x}),\varphi(x',u',\hat{x}')),$$
$$\varphi(\lambda x,\lambda u,\lambda\hat{x})\ge\varphi(x,u,\hat{x}),$$
$$\varphi(0_X,0_U,0_X)=1,$$

и

$$\eta(x+x',u+u',y+y')\ge T(\eta(x,u,y),\eta(x',u',y')),$$
$$\eta(\lambda x,\lambda u,\lambda y)\ge\eta(x,u,y),$$
$$\eta(0_X,0_U,0_Y)=1,$$

где $0_X,0_U,0_Y$ – нулевые элементы пространств U,X,Y соответственно.

Для нечетких динамических систем, линейных над полями, можно доказать следующую теорему. Аналог этого результата для обычных (ненечетких) систем играет фундаментальную роль в теории систем.

Теорема 2.1. Пусть U,X,Y – линейные пространства над полем K. Нечеткая динамическая система S с

$$\varphi:X\times U\times X\to[0,1],\eta:X\times U\times Y\to[0,1],$$

является K-линейной, если существуют две пары нечетких K- линейных отношений

$$\varphi_1:X\times X\to[0,1],\varphi_2:U\times X\to[0,1],$$
$$\eta_1:X\times Y\to[0,1],\eta_2:U\times Y\to[0,1],$$

что для всех $x,\hat{x}\in X,u\in U,y\in Y$ выполняется:

$$\varphi(x,u,\hat{x})=\max_{x'\in X}T(\varphi_1(x,x'),\varphi_2(u,\hat{x}-x')),$$
$$\eta(x,u,y)=\max_{y'\in Y}T(\eta_1(x,y'),\eta_2(u,y-y')).$$

Замечание 2.1. Теорема 2.1 верна и в тех случаях, когда в качестве условий (2.18) и (2.19) используются следующие пары условий:

$$(\exists x'\in X)\ \varphi(x,u,\hat{x})=T(\varphi_1(x,x'),\varphi_2(u,\hat{x}-x'));$$
$$(\exists y'\in Y)\ \eta(x,u,y)=T(\eta_1(x,y'),\eta_2(u,y-y'));$$
$$\max_{x'\in X}\ T(\varphi_1(x,x'),\varphi_2(u,\hat{x}-x'))\ge\varphi(x,u,\hat{x});$$
$$\max_{y'\in Y}\ T(\eta_1(x,y'),\eta_2(u,y-y'))\ge\eta(x,u,y);$$

$$(\exists x' \in X)\ T(\varphi_1(x,x'),\varphi_2(u,\hat{x}-x')) \geq \varphi(x,u,\hat{x});$$
$$(\exists y' \in Y)\ T(\eta_1(x,y'),\eta_2(u,y-y')) \geq \eta(x,u,y);$$
$$\varphi(x,u,\hat{x}) > 0 \Leftrightarrow (\exists x' \in X)\ T(\varphi_1(x,x'),\varphi_2(u,\hat{x}-x')) > 0;$$
$$\eta(x,u,y) > 0 \Leftrightarrow (\exists y' \in Y)\ T(\eta_1(x,y'),\eta_2(u,y-y')) > 0;$$
$$\varphi(x,u,\hat{x}) \geq \delta \Leftrightarrow (\exists x' \in X)\ T(\varphi_1(x,x'),\varphi_2(u,\hat{x}-x')) \geq \delta, \text{где } \delta > 0;$$
$$\eta(x,u,y) \geq \delta \Leftrightarrow (\exists y' \in Y)\ T(\eta_1(x,y'),\eta_2(u,y-y')) \geq \delta, \text{где } \delta > 0.$$

Третья глава посвящена описанию нескольких определений динамических систем над нечеткими числами с дискретным временем. В ней очерчен круг проблем, возникающих при исследовании подобных систем, введена в рассмотрение задача реализации для систем рассматриваемого типа. В данной главе получен достаточный критерий реализуемости нечетких динамических систем. Вводится в рассмотрение метод алгебраической реализации знакоопределенных импульсных последовательностей над нечеткими треугольными числами и метод погружения в расширенную нечеткую арифметику, позволяющий вычислять алгебраические реализации для динамических систем над положительными нечеткими треугольными числами. Рассмотрен метод алгебраической реализации динамических систем над смешанными нечеткими треугольными числами. Доказана теорема о параллельной композиции динамических систем над положительными нечеткими треугольными числами, дающая возможность конструировать различные алгоритмы реализации динамических систем над нечеткими треугольными числами. Глава содержит числовые примеры, иллюстрирующие применение предложенных методов и алгоритмов.

Подход, используемый в данной главе, является обобщением подхода к решению проблемы реализации для класса интервальных динамических систем. Так как интервал можно рассматривать как частный случай нечеткого числа, с функцией принадлежности, равной единице на всем заданном интервале. Математическая модель многомерного нечетко заданного объекта управления представляется в виде системы уравнений с нечеткими параметрами и понимается как семейство математических моделей многомерных динамических объектов, которые имеют различные степени принадлежности этому семейству. Следуя этому подходу, введем следующее определение.

Определение 3.1. *Линейной стационарной динамической системой с дискретным временем (с m входами, n состояниями и p выходами) с нечеткими параметрами* будем называть объект $[\Sigma] = (\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H})$, динамическое поведение которого описывается уравнениями

$$x(t+1) = \mathbf{F}x(t) + \mathbf{G}u(t),\ y(t) = \mathbf{H}x(t), \qquad (1)$$

$\hat{\mathbf{F}}, \hat{\mathbf{G}}, \hat{\mathbf{H}}$ будут нечеткие числа $L-R$ типа, носители которых есть интервалы $\Gamma_{\mathbf{F}} = \left[\underline{\hat{F}}, \overline{\hat{F}}\right], \Gamma_{\mathbf{G}} = \left[\underline{\hat{G}}, \overline{\hat{G}}\right], \Gamma_{\mathbf{H}} = \left[\underline{\hat{H}}, \overline{\hat{H}}\right]$) является нечеткой алгебраической реализацией этой последовательности.

Следующий алгоритм позволяет строить конечномерные реализации для последовательностей матриц над положительными нечеткими числами с использованием теорем 3.3 и 3.4.

Алгоритм 3.1.

Исходные данные. Импульсная последовательность матриц над положительными нечеткими треугольными числами вида (6).

Шаг 1. Находим центральную, левую и правую реализации импульсной последовательности матриц над положительными нечеткими треугольными числами.

Шаг 2. Если найденные реализации удовлетворяют условиям теоремы 3.3, то соответствующая нечеткая алгебраическая реализация и будет искомой, иначе переходим к шагу 3.

Шаг 3. Согласно теореме 3.4, с помощью преобразований подобия (3.16) попытаемся найти эквивалентные (с точностью до изоморфизма) алгебраические реализации, для которых условия теоремы 3.3 выполняются.

При выполнении шага 1 данного алгоритма для вычисления реализаций могут применяться, например, алгоритм Б.Л. Хо, либо другие методы вычисления конечномерных реализаций.

Данный метод реализаций может использоваться также и для вычисления нечеткой алгебраической реализации для последовательностей матриц над неположительными нечеткими треугольными числами. В этом случае нечеткая алгебраическая реализация строится в соответствии со следующими шагами.

Алгоритм 3.2.

Исходные данные. Импульсная последовательность матриц над нечеткими числами вида (6).

Шаг 1. Образуем из исходной импульсной последовательности матриц над неположительными нечеткими треугольными числами новую последовательность матриц над неотрицательными нечеткими треугольными числами следующего вида:

$$\{-\mathbf{A_1}, -\mathbf{A_2}, \ldots\} = \left\{\left(-\tilde{A}_1, \overline{A}_1, \underline{A}_1\right), \left(-\tilde{A}_2, \overline{A}_2, \underline{A}_2\right), \ldots\right\}.$$

Шаг 2. Для полученной таким образом последовательности с помощью алгоритма 3.1 вычисляем нечеткую алгебраическую реализацию $(\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H})$.

Шаг 3. Строим реализацию исходной последовательности матриц над нечеткими треугольными числами, в качестве которой могут быть динами-

$$\left\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ...\right\} \tag{10}$$

будем называть *центральными последовательностями матриц* (9), последовательности

$$\left\{\underline{A}_1, \underline{A}_2, ...\right\} \tag{11}$$

будем называть *левыми последовательностями матриц* (9), а последовательности

$$\left\{\overline{A}_1, \overline{A}_2, ...\right\} \tag{12}$$

будем называть *правыми последовательностями матриц* (9).

Имеет место следующий результат.

Теорема 3.3. Если для последовательности матриц над нечеткими треугольными числами (9) существуют матрицы одинаковой размерности $\left(\tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{H}\right), \left(\underline{F}, \underline{G}, \underline{H}\right)$ и $\left(\overline{F}, \overline{G}, \overline{H}\right)$ для которых выполняется

1) $\tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{H}, \underline{F}, \underline{G}, \underline{H}, \overline{F}, \overline{G}, \overline{H}$ - положительные;

2) $\underline{F} \le \tilde{F} \le \overline{F}, \underline{G} \le \tilde{G} \le \overline{G}, \underline{H} \le \tilde{H} \le \overline{H}$,

то нечеткая система $\left(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}\right) = \left(\left(\tilde{F}, \underline{F}, \overline{F}\right), \left(\tilde{G}, \underline{G}, \overline{G}\right), \left(\tilde{H}, \underline{H}, \overline{H}\right)\right)$ (где элементами матриц $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ будут нечеткие числа $L-R$ типа, носители которых есть интервалы $\Gamma_{\mathbf{F}} = \left[\underline{F}, \overline{F}\right], \Gamma_{\mathbf{G}} = \left[\underline{G}, \overline{G}\right], \Gamma_{\mathbf{H}} = \left[\underline{H}, \overline{H}\right]$) является нечеткой алгебраической реализацией этой последовательности.

Часто оказывается, что найденные реализации не удовлетворяют условиям теоремы 3.3. Но, если выбрать подходящий базис пространств состояний для полученных реализаций, то можно добиться того, чтобы реализации удовлетворяли условиям теоремы 3.3. Имеет место следующий результат, который является следствием теоремы 3.3.

Теорема 3.4. Если для матриц одинаковой размерности $\left(\tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{H}\right), \left(\underline{F}, \underline{G}, \underline{H}\right)$ и $\left(\overline{F}, \overline{G}, \overline{H}\right)$ некоторой последовательности матриц (9) найдутся такие матрицы T_1, T_2 и T_3, что выполняются условия

$$\underline{\hat{F}} \le \hat{\tilde{F}} \le \hat{\overline{F}}, \underline{\hat{G}} \le \hat{\tilde{G}} \le \hat{\overline{G}}, \underline{\hat{H}} \le \hat{\tilde{H}} \le \hat{\overline{H}} ,$$

где

$$\begin{aligned} &\hat{\tilde{F}} = T_1 \tilde{F} T_1^{-1}, \hat{\tilde{G}} = T_1 \tilde{G}, \hat{\tilde{H}} = \tilde{H} T_1^{-1}, \\ &\underline{\hat{F}} = T_2 \underline{F} T_2^{-1}, \underline{\hat{G}} = T_2 \underline{G}, \ \underline{\hat{H}} = \underline{H} T_2^{-1}, \\ &\hat{\overline{F}} = T_3 \overline{F} T_3^{-1}, \hat{\overline{G}} = T_3 \overline{G}, \ \hat{\overline{H}} = \overline{H} T_3^{-1} \end{aligned} \tag{13}$$

$\hat{\tilde{F}}, \hat{\tilde{G}}, \hat{\tilde{H}}, \underline{\hat{F}}, \underline{\hat{G}}, \underline{\hat{H}}, \hat{\overline{F}}, \hat{\overline{G}}, \hat{\overline{H}}$ - положительные, то нечеткая система $\left(\hat{\mathbf{F}}, \hat{\mathbf{G}}, \hat{\mathbf{H}}\right) = \left(\left(\hat{\tilde{F}}, \underline{\hat{F}}, \hat{\overline{F}}\right), \left(\hat{\tilde{G}}, \underline{\hat{G}}, \hat{\overline{G}}\right), \left(\hat{\tilde{H}}, \underline{\hat{H}}, \hat{\overline{H}}\right)\right)$ (где элементами матриц

где $u(t) \in \mathbb{R}^m, x(t) \in \mathbb{R}^n, y(t) \in \mathbb{R}^p$, и понимать как семейство математических моделей

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), y(t) = Hx(t), \tag{2}$$

матрицы, $\left(F, G, H\right)$ которых принадлежат заданным матрицам $\left(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}\right)$ над нечеткими числами, т.е.

$$F \in \mathbf{F} \in \mathbb{FR}^{n \times n}, G \in \mathbf{G} \in \mathbb{FR}^{n \times m}, H \in \mathbf{H} \in \mathbb{FR}^{p \times n},$$

со степенями принадлежности $\mu\left(F\right) = \min_{i,j} \mu\left(f_{i,j}\right)$, $\mu\left(G\right) = \min_{i,j} \mu\left(g_{i,j}\right)$, $\mu\left(H\right) = \min_{i,j} \mu\left(h_{i,j}\right)$, соответственно, где $\mu\left(f_{i,j}\right)$ – степень принадлежности элемента $f_{i,j}$ в матрице F, $\mu\left(g_{i,j}\right)$ – степень принадлежности элемента $g_{i,j}$ в матрице G, $\mu\left(h_{i,j}\right)$ – степень принадлежности элемента $h_{i,j}$ в H. Степень принадлежности модели (2) семейству (1) в этом случае равна $\min\left(\mu(F), \mu(G), \mu(H)\right)$.

Определение 3.3. *Линейной стационарной динамической системой с дискретным временем (с m входами, n состояниями и p выходами) с нечеткими объектами и нечеткими параметрами* будем называть объект $\left[\Sigma\right] = \left(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}\right)$, динамическое поведение которого описывается уравнениями

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t), \tag{3}$$

где

$$\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t+1) \in \overline{X} \cong \mathbb{FR}^n, \mathbf{u}(t) \in \overline{U} \cong \mathbb{FR}^m, \mathbf{y}(t) \in \overline{Y} \cong \mathbb{FR}^p$$

$$\mathbf{F} \in \mathbb{FR}^{n \times n}, \mathbf{G} \in \mathbb{FR}^{n \times m}, \mathbf{H} \in \mathbb{FR}^{p \times n} .$$

Представленные выше типы динамических систем над нечеткими числами являются примерами обобщения обычных линейных стационарных динамических систем с дискретным временем. Они не исчерпывают всех возможных типов обобщений и видов нечеткой неопределенности.

С нечеткими системами, представленными определениями (3.1) и (3.3) можно связать импульсную последовательность матриц

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{H}\mathbf{F}^{i-1}\mathbf{G}, i = 1, 2, ..., \tag{5}$$

где матричные произведения выполняются справа налево, т.е. сначала вычисляется произведение $\mathbf{FG}$, затем $\mathbf{F}(\mathbf{FG})$ и т. д. Этой последовательности матриц можно поставить в соответствие отображение вход-выход.

Для системы с нечеткими параметрами под отображением вход-выход следует понимать семейство отображений $f_\alpha : U^{\mathbb{Z}_+} \to Y^{\mathbb{Z}_+}$, порождаемых соотношениями

$$y(t)=\sum_{i=1}^{t}A_i^{\alpha}u(t-i),\ t=1,2,....$$

для

$$A_i^{\alpha}\in\mathbf{A_i}\in\mathbb{FR}^{p\times m},\ i=1,2,....$$

Для системы с нечеткими объектами и нечеткими параметрами под отображением вход-выход целесообразно понимать отображение $f:\overline{U}^{\mathbb{Z}_+}\to\overline{Y}^{\mathbb{Z}_+}$, порождаемое нечеткими соотношениями

$$\mathbf{y}(t)=\sum_{i=1}^{t}\mathbf{A}_i\mathbf{u}(t-i),\ t=1,2,....$$

Для заданного отображения вход-выход нечеткой системы, представленного импульсной последовательностью матриц над нечеткими числами можно поставить задачу реализации. Одной из возможных формулировок задачи реализации для систем над нечеткими числами может быть такая: *для заданной последовательности матриц размера* $p\times m$ *над нечеткими числами*

$$\{\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,...\},\ \mathbf{A}_i\in\mathbb{FR}^{p\times m},\ i=1,2,... \qquad (6)$$

определить размерность n *и тройку матриц* $(\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H})$ *над нечеткими числами таких, что выполняются уравнения (5), где* $\mathbf{F}\in\mathbb{FR}^{n\times n},\mathbf{G}\in\mathbb{FR}^{n\times m},\mathbf{H}\in\mathbb{FR}^{p\times n}$.

Для классического случая рекуррентность заданной импульсной последовательности матриц является необходимым и достаточным условием ее реализуемости. В случае систем над нечеткими числами рекуррентность остается достаточным условием реализуемости.

Определение 3.4. Будем говорить, что последовательность матриц размера $p\times m$ над нечеткими числами

$$\{\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,...\},\ \mathbf{A}_i\in\mathbb{FR}^{p\times m},\ i=1,2,... \qquad (7)$$

рекуррентна, если существует такое целое $r>0$ и коэффициенты $\beta_1,\beta_2,...,\beta_r\in\mathbb{FR}$ такие, что

$$\mathbf{A}_{r+j+1}=\sum_{i=1}^{r}\beta_i\mathbf{A}_{i+j},\ j=0,1,2,...\,.$$

Для динамических систем над нечеткими числами, поведение вход-выход которых описывается импульсной последовательностью матриц над нечеткими числами, имеет место следующий результат.

Теорема 3.1. Если последовательность матриц над нечеткими числами (7) рекуррентна, то для нее существует нечеткая алгебраическая реализация.

Определение 3.5.

Матрицу $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}(a_{11},\alpha_{11},\beta_{11}) & (a_{12},\alpha_{12},\beta_{12}) & ... & (a_{1n},\alpha_{1n},\beta_{1n})\\ (a_{21},\alpha_{11},\beta_{11}) & (a_{22},\alpha_{22},\beta_{22}) & ... & (a_{2n},\alpha_{2n},\beta_{2n})\\ ... & ... & ... & ...\\ (a_{m1},\alpha_{m1},\beta_{11}) & (a_{m2},\alpha_{m2},\beta_{m2}) & ... & (a_{mn},\alpha_{mn},\beta_{mn})\end{pmatrix}$, элементами которой являются нечеткие треугольные числа можно представить в виде

$$\mathbf{A}=\left(\tilde{A},\underline{A},\overline{A}\right),$$

где

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn}\end{pmatrix}$$

матрица, составленная из центров a_{ij} элементов матрицы $\mathbf{A}$,

$$\underline{A}=\begin{pmatrix}a_{11}-\alpha_{11} & a_{12}-\alpha_{12} & ... & a_{1n}-\alpha_{1n}\\ a_{21}-\alpha_{21} & a_{22}-\alpha_{22} & ... & a_{2n}-\alpha_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{m1}-\alpha_{m1} & a_{m2}-\alpha_{m2} & ... & a_{mn}-\alpha_{mn}\end{pmatrix}$$

матрица, составленная из элементов $a_{ij}-\alpha_{ij}$ матрицы $\mathbf{A}$,

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}a_{11}+\beta_{11} & a_{12}+\beta_{11} & ... & a_{1n}+\beta_{1n}\\ a_{21}+\beta_{21} & a_{22}+\beta_{22} & ... & a_{2n}+\beta_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{m1}+\beta_{m1} & a_{m2}+\beta_{m2} & ... & a_{mn}+\beta_{mn}\end{pmatrix}$$

матрица, составленная из элементов $a_{ij}+\beta_{ij}$ матрицы $\mathbf{A}$.

С импульсной последовательностью матриц над нечеткими треугольными числами можно связать три обычные (вещественные) импульсные последовательности, определяемые центральными, левыми и правыми границами матриц. Используя, сказанное выше введем следующее определение.

Определение 3.6. Для последовательности матриц с нечеткими треугольными числами

$$\{\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,...\}=\left\{\left(\tilde{A}_1,\underline{A}_1,\overline{A}_1\right),\left(\tilde{A}_2,\underline{A}_2,\overline{A}_2\right),...\right\} \qquad (9)$$

последовательности