На правах рукописи

Гердт Ирина Владимировна

МАЛЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2009

Работа выполнена на кафедре алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Самуил Яковлевич Гриншпон
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор В.М. Левчук
	кандидат физико-математических наук, доцент А.И. Шерстнева
Ведущая организация:	Московский педагогический государственный университет

Защита состоится «22» июня 2009 г. в 14 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.21 при Томского государственном университете по адресу: 634050, Томск, ул. Ленина, д. 36, ауд. 119.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Томского государственного университета по адресу: 634050, Томск, ул. Ленина, д. 34а.

Автореферат разослан «14» мая 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета А.Н. Малютина

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Абелевы группы составляют один из важнейших классов групп. Теория абелевых групп тесно переплетается с теориями модулей, колец, множеств, чисел. С одной стороны, теория абелевых групп, являясь частью теории модулей, использует ее идеи и методы, с другой стороны, она – один из основных источников новых исследований в теории модулей. Структурные результаты для важных классов периодических абелевых групп были получены Г. Прюфером, Г. Ульмом, Л.Я. Куликовым. В теории абелевых групп без кручения развиты структурные теории групп без кручения конечого ранга, вполне разложимых и почти вполне разложимых групп, векторных групп, групп Батлера. Для смешанных абелевых групп построена хорошая структурная теория групп с тотально проективными периодическими частями, осуществлено построение групп с заданой последовательностью Ульма, развита теория групп Уорфилда. Серьезное влияние на развитие теории абелевых групп оказали монографии Л. Фукса [12], [13] и И. Капланского [27]. В последнее время теория абелевых групп интенсивно развивается.

При изучении алгебраических систем большую роль играют отображения этих систем, среди которых особое значение имеют гомоморфизмы.

Тот факт, что множество всех гомоморфизмов абелевой группы A в абелеву группу B образует абелеву группу $\mathrm{Hom}(A, B)$, оказался исключительно важным. Алгебраическое строение группы $\mathrm{Hom}(A, B)$ известно только в некоторых частных случаях. Основные результаты здесь были получены Р. Пирсом, который нашел инварианты группы $\mathrm{Hom}(A, B)$ как алгебраически компактной группы в случае периодической группы A ([30]).

В последнее время тематика, связанная с группой $\mathrm{Hom}(A, B)$ и вообще с гомоморфизмами абелевых групп, приобретает все большую актуальность. Изучению строения групп гомоморфизмов абелевых групп и исследованию их свойств посвящены работы Л. Фукса [22], [23], Л.И. Власовой [1], С.Я. Гриншпона [2], П.А. Крылова [3], А.М. Себельдина [9], [10], П. Гросса [25], [26], Ф. Шульца [32], А. Мадера [29], Р. Уорфилда [33], Л. Лиувена [28] и других алгебраистов. Важные результаты о группах гомоморфизмов и кольцах эндоморфизмов абелевых групп приведены в [4].

При исследовании групп гомоморфизмов большой интерес представляют гомоморфизмы в прямые суммы и прямые произведения и гомоморфизмы из прямых сумм и прямых произведений. Изучаются различные классы групп, связанные с такими гомоморфизмами.

Д. Лось открыл замечательный класс групп без кручения – класс узких групп. Пусть P обозначает прямое произведение счетного числа бесконечных циклических групп, $P = \prod_{n=1}^{\infty} \langle e_n \rangle$, где $o(e_n) = \infty$. Группа без кручения A называется *узкой* ([13], с. 189), если при любом гомоморфизме $\eta : P \to A$ для почти всех n выполняется равенство $\eta e_n = 0$. Оказывается, что класс узких групп достаточно широк и обладает рядом интересных свойств (см., например, [13], [21], [31]).

Пусть $\mathfrak{K}$ – произвольный класс групп. В [6] А.В. Иванов называет группу A *группой Уорфилда* относительно класса $\mathfrak{K}$, если для любых групп $B_i \in \mathfrak{K}$ и для любого гомоморфизма $\varphi : A \to \bigoplus_{i \in I} B_i$ существуют натуральное число n, конечное подмножество J множества I и существенная подгруппа $H \subset nA$, для которых $\varphi H \subset \bigoplus_{i \in J} B_i$.

В работе С.Ю. Максимова [8] группа A называется *CW-группой*, если для любых групп B_i и для любого гомоморфизма $\varphi : A \to \bigoplus_{i \in I} B_i$ существуют счетное подмножество J множества I и разложение группы $A = A_1 \oplus A_2$, где A_2 – счетная прямая сумма ограниченных групп, и для всякого ненулевого элемента $a_1 \in A_1$ существует такое целое число n, что $\varphi(na_1) \in \bigoplus_{i \in J} B_i$ и $na_1 \neq 0$.

В [12] (проблема 44) поставлена задача исследования абелевых групп A, обладающих свойством: если A содержится в прямой сумме редуцированных групп, то существует такое натуральное число n, что nA содержится в прямой сумме конечного числа этих групп. Обобщая эту проблему в [5], А.В. Иванов вводит понятие Фукс-44 группы относительно произвольного класса групп $\mathfrak{K}$ и исследует введенные группы.

В [7] А.В. Иванов доказал, что факторгруппа прямого произведения неизмеримого множества произвольных групп по прямой сумме этих групп является Фукс-44 группой. Для измеримого множества групп это в общем случае уже не так.

В [24] дается обобщение узких групп и рассматривается их связь с Фукс-44

группами.

Д. Арнольд и К. Мерли в [15] рассматривают понятие самомалых групп. Абелева группа A называется *самомалой группой* , если для любых групп $A_i \cong A$ и для любого гомоморфизма $\varphi : A \to \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ существует конечное подмножество J множества I такое, что $\varphi A \subset \bigoplus\limits_{i\in J} A_i$. Для самомалых модулей определение дается аналогично. Исследованию самомалых абелевых групп и самомалых модулей посвящено большое количество работ (см., например, [4], [14], [17]-[20]).

В [12] доказано, что существует естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(A, \prod_{i\in I} B_i) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(A, B_i).$$

Если же взять группы гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(A, \bigoplus\limits_{i\in I} B_i)$ и $\bigoplus\limits_{i\in I}\mathrm{Hom}(A, B_i)$, то в общем случае естественного изоморфизма нет. Возникает естественный вопрос: для каких абелевых групп A существует изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(A, \bigoplus_{i\in I} B_i) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(A, B_i).$$

Пусть $\mathfrak{K}$ – некоторый класс абелевых групп. Абеелву группу A назовем $\mathfrak{K}$-*малой* (или *малой относительно* $\mathfrak{K}$), если для любого гомоморфизма $\varphi : A \to \bigoplus\limits_{i\in I} B_i$, где $B_i \in \mathfrak{K}$ для всякого $i \in I$, существует конечное подмножество J множества I такое, что $\varphi A \subset \bigoplus\limits_{i\in J} B_i$.

Очевидно, что абелева группа A является $\mathfrak{K}$-малой тогда и только тогда, когда существует естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(A, \bigoplus_{i\in I} B_i) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(A, B_i),$$

где $B_i \in \mathfrak{K}$ для всякого $i \in I$.

Если класс $\mathfrak{K}$ совпадает с классом всех абелевых групп, то $\mathfrak{K}$-малую группу A будем называть *малой*.

Заметим, что введенное определение малой группы согласуется с определением из [11] малого объекта в категории с копроизведениями.

Цель работы. Целью диссертационной работы является изучение малых групп относительно различных классов групп $\mathfrak{K}$.

Научная новизна. Все основные результаты диссертационной работы являются новыми. Основными результатами работы можно считать следующие.

1. Исследованы свойства малых групп относительно произвольного класса групп.

2. Описаны группы, малые относительно класса всех групп, класса всех делимых групп и класса всех нередуцированных групп.

3. Найдены условия, эквивалентные $\mathfrak{R}$-малости произвольной группы, где $\mathfrak{R}$ – класс всех редуцированных групп.

4. Описаны $\mathfrak{R}$-малые периодические группы и $\mathfrak{R}$-малые группы без кручения.

5. Исследованы группы, малые относительно класса групп без кручения.

6. Описаны вполне разложимые группы, малые относительно произвольного класса групп без кручения.

7. Исследованы прямые произведения групп, малые относительно класса узких групп.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертационной работы имеют теоретическое значение и могут быть использованы в исследованиях по теории абелевых групп и модулей, а также при чтении спецкурсов для студентов старших курсов и аспирантов.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на Международной конференции по математике и механике (Томск, 2003), на VII Региональной молодежной конференции "Математика: ее содержание, методы и значение" (Томск, 2005), на XLIII Международной научной конференции "Студент и научно-технический прогресс" (Новосибирск, 2005), на Всероссийских симпозиумах по абелевым группам (Бийск, 2005, 2006), на XIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" и на конференции молодых ученых ММФ МГУ (Москва, 2006), на пятой Всероссийской молодежной научной школе-конференции "Лобачевские чтения" (Казань, 2006), на Международной конференции по алгебре и теории чисел, посвященной 80-летию В.Е. Воскресенского (Самара, 2007), на Международной конференции "Алгебра и ее приложения", посвященной 75-летию В.П. Шункова (Красноярск, 2007), на Международной алгебраической

конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша (Москва, 2008), на Всероссийской конференции по математике и механике, посвященной 130-летию Томского государственного университета и 60-летию механико-математического факультета (Томск, 2008). Основные результаты неоднократно докладывались на семинарах кафедры алгебры Томского государственного университета (руководитель – доктор физико-математических наук, профессор П.А. Крылов). По теме диссертации опубликовано 16 работ ([34]-[49]).

Структура и объем работы. Представляемая диссертационная работа состоит из введения, списка обозначений, трех глав и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 66 страницы. Библиография содержит 56 наименований.

Содержание работы. В данной работе слово "группа" будет означать абелеву группу. В первой главе диссертации рассматриваются определение и свойства $\mathfrak{K}$-малых групп. В первом параграфе этой главы приводятся основные известные определения и факты, используемые в дальнейшем при изучении малых групп, и доказывается несколько вспомогательных результатов. Во втором дается основное определение и исследуются общие свойства $\mathfrak{K}$-малых групп.

Основным результатом второго параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть $\mathfrak{K}$ – некоторый класс групп и $A = \bigoplus_{i\in I} C_i$, где для каждой группы C_i существует группа B_i из класса $\mathfrak{K}$ такая, что* $\mathrm{Hom}(C_i, B_i) \neq 0$. *Группа A является $\mathfrak{K}$-малой тогда и только тогда, когда I – конечное множество и каждая группа C_i является $\mathfrak{K}$-малой.*

С помощью этой теоремы получается такой результат.

Теорема 2.4. *Пусть $\mathfrak{K}$ – некоторый класс групп и $A = \bigoplus_{i\in I} C_i$, где каждая группа C_i – ненулевая группа из класса $\mathfrak{K}$. Группа A является $\mathfrak{K}$-малой тогда и только тогда, когда I – конечное множество и каждая группа C_i является $\mathfrak{K}$-малой.*

Вторая глава состоит из трех параграфов. В третьем параграфе исследуется малость делимых групп относительно произвольного класса групп $\mathfrak{K}$ и показывается, что при изучении $\mathfrak{K}$-малых групп можно ограничиться редуцированными группами.

Основными результатами этого параграфа являются следующие теоремы.

Теорема 3.1. *Группа A является $\mathfrak{K}$-малой тогда и только тогда, когда ее делимая и редуцированная части являются $\mathfrak{K}$-малыми группами.*

Обозначим через $D(\mathfrak{K})$ класс групп, состоящий из делимых частей групп класса $\mathfrak{K}$, а через $P(D(\mathfrak{K}))$ – множество всех таких простых чисел p, для которых в классе $D(\mathfrak{K})$ существует группа с ненулевой p-компонентой.

Теорема 3.6. *Делимая группа A является $\mathfrak{K}$-малой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *если в классе $D(\mathfrak{K})$ есть хотя бы одна периодическая группа, то A – периодическая группа, у которой $A_p = 0$ для всякого $p \in P(D(\mathfrak{K}))$;*

2) *если каждая группа класса $D(\mathfrak{K})$ является группой без кручения, то ранг без кручения группы A конечен.*

В четвертом параграфе дается полное описание малых групп (то есть групп, малых относительно класса всех абелевых групп) и групп, малых относительно класса $\mathfrak{D}$ всех делимых групп и класса $\mathfrak{N}$ всех нередуцированных групп.

Теорема 4.2. *Для группы A следующие условия эквивалентны:*

1) *A – $\mathfrak{D}$-малая группа;*

2) *A – конечно порожденная группа;*

3) *A – малая группа;*

4) *A – $\mathfrak{N}$-малая группа.*

Следующим шагом в работе является описание малых групп относительно класса $\mathfrak{R}$ всех редуцированных групп. В пятом параграфе сначала дается описание $\mathfrak{R}$-малых групп с помощью эпиморфных образов.

Теорема 5.1. *Для группы A следующие условия эквивалентны:*

1) *A – $\mathfrak{R}$-малая группа;*

2) *если M есть эпиморфный образ группы A и M – прямая сумма циклических групп конечного порядка, то M – ограниченная группа;*

3) *если M есть эпиморфный образ группы A и M – периодическая группа, то M – прямая сумма делимой и ограниченной групп;*

4) *для любых групп B_i $(i \in I)$ таких, что $B_i^1 = 0$, и любого гомоморфизма $\varphi : A \to \bigoplus\limits_{i \in I} B_i$ существует конечное подмножество $J \subset I$ такое, что $\varphi(A) \subset \bigoplus\limits_{i \in J} B_i$.*

Далее находятся критерии $\mathfrak{R}$-малости для конкретных классов групп. Получены следующие результаты.

Теорема 5.2. *Пусть A – периодическая группа. Группа A является $\mathfrak{R}$-малой тогда и только тогда, когда A является прямой суммой делимой и ограниченной групп.*

Теорема 5.3. *Всякая $\mathfrak{R}$-малая группа без кручения является факторно делимой.*

Теорема 5.4. *Группа без кручения конечного ранга является $\mathfrak{R}$-малой тогда и только тогда, когда она – факторно делимая группа.*

В третьей главе изучаются группы, малые относительно произвольного класса групп без кручения $\mathfrak{L}$.

Назовем подгруппу A группы G *факторно ограниченной*, если факторгруппа G/A ограничена.

Основным результатом шестого параграфа является следующая теорема.

Теорема 6.2. *Следующие условия для группы G эквивалентны:*

1) *G – $\mathfrak{L}$-малая группа.*

2) *Любая факторно ограниченная подгруппа группы G является $\mathfrak{L}$-малой группой.*

3) *Некоторая факторно ограниченная подгруппа группы G является $\mathfrak{L}$-малой группой.*

4) *Любая подгруппа конечного индекса группы G является $\mathfrak{L}$-малой группой.*

5) *Некоторая подгруппа конечного индекса группы G является $\mathfrak{L}$-малой группой.*

В седьмом параграфе получено полное описание $\mathfrak{L}$-малых вполне разложимых групп, где $\mathfrak{L}$ – произвольный класс групп без кручения. Пусть A – вполне разложимая группа без кручения, то есть $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$, где $r(A_i) = 1$ $(i \in I)$. Для любого $i \in I$ обозначим $\mathfrak{L}_i = \{G \in \mathfrak{L} \mid$ в G существует ненулевой элемент g такой, что $t(g) \geq t(A_i)\}$. Пусть $\mathfrak{L}' = \bigcup\limits_{i\in I} \mathfrak{L}_i$. Очевидно, что $\mathfrak{L}'$ является подклассом класса $\mathfrak{L}$.

Теорема 7.4. *Вполне разложимая группа $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ является $\mathfrak{L}$-малой тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: для всякого бесконечного подмножества I' множества I не существует отображения $\alpha : I' \to \mathfrak{L}'$ такого, что для любого $i \in I'$ $\alpha(i) \in \mathfrak{L}_i$.*

В восьмом параграфе рассматриваются прямые произведения групп, малые относительно классов узких групп. При рассмотрении прямых

произведений вводится ограничение – неизмеримость множества компонент. Это ограничение зависит, по-видимому, лишь от аксиоматики теории множеств. Пока неизвестно, совместно или нет существование измеримых кардинальных чисел с аксиоматикой ZF теории множеств. В этом параграфе получены такие результаты ($\mathfrak{S}$ – некоторый класс узких групп).

Теорема 8.2. *Всякое прямое произведение групп без кручения конечного ранга с неизмеримым множеством компонент является $\mathfrak{S}$-малой группой.*

Следствие 8.3. *Векторная группа, множество компонент ранга 1 которой неизмеримо, является $\mathfrak{S}$-малой группой.*

Теорема 8.4. *Пусть $\mathfrak{R}_1$ – класс всех счетных редуцированных групп без кручения, $\{A_i\}_{i\in I}$ – некоторое семейство групп без кручения, где множество I неизмеримо, и $A = \prod\limits_{i\in I} A_i$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *Группа A является $\mathfrak{R}_1$-малой тогда и только тогда, когда каждая группа A_i $(i \in I)$ является $\mathfrak{R}_1$-малой.*

2) *Если каждая группа A_i $(i \in I)$ имеет конечный ранг, то A – $\mathfrak{R}_1$-малая группа.*

3) *Если A – векторная группа, то A – $\mathfrak{R}_1$-малая группа.*

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю профессору Самуилу Яковлевечу Гринсшону за постановку задач, внимание к работе и помощь в оформлении диссертации.

Список литературы

[1] Власова Л.И. Об определяемости групп группами гомоморфизмов // Вестник МГУ. Математика, механика. – 1979. – № 5. – С. 52-55.

[2] Гриншпон С.Я. О равенстве нулю группы гомоморфизмов абелевых групп // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 9. – С. 42-46.

[3] Крылов П.А. Об абелевых группах без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1980. – С. 91-101.

[4] Крылов П.А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов / П.А. Крылов, А.В. Михалев, А.А. Туганбаев. – Томск: Томский государственный университет, 2002. – 464 с.

[5] Иванов А.В. Об одной проблеме абелевых групп // Мат. сб. – 1978. – № 4. – С. 525-542.

[6] Иванов А.В. Об одном классе абелевых групп // Мат. заметки. – 1981. – Т. 29. – № 3. – С. 351-358.

[7] Иванов А.В. Прямые суммы и полные прямые суммы абелевых групп // Абелевы группы и модули. Томск, 1980. – С. 70-90.

[8] Максимов С.Ю. CW-группы // Вестник МГУ. Математика. Механика. – 1982. – № 1. – С. 27-31.

[9] Себельдин А.М. Группы гомоморфизмов вполне разложимых абелевых групп без кручения // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 7. – С. 77-84.

[10] Себельдин А.М. О группах гомоморфизмов абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1976. – С. 78-86.

[11] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории / К. Фейс. – М.: Мир, 1977. – Т. 1. – 686 с.

[12] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс – М.: Мир, 1974. – Т. 1. – 335 с.

[13] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс – М.: Мир, 1977. – Т. 2. – 416 с.

[14] Albrecht U. The flat dimension of mixed Abelian groups as E-Modules / U. Albrecht, P. Goeters, W. Wickless // Rocky Mountain J. Math. – 1995. – V. 25. – № 2. – P. 569-590.

[15] Arnold D.M. Abelian group A, such that $\mathrm{Hom}(A, -)$ preserves direct sums of copies of A / D.M. Arnold, C.E. Murley // Pacific J. Math. – 1975. – V. 56. – № 1. – P. 7-20.

[16] Beaumont R.A. Torsion-free rings / R.A. Beaumont, R.S. Pierce // Illinois J. Math. – 1961. – V. 5. – P. 61-98.

[17] Breaz S. Self-small torsion free Abelian groups // Math. – 2000. – V. 42. – № 1. – P. 3-7.

[18] Breaz S. Self-small Abelian groups as modules over their endomorphism rings // Commun. Algebra. – 2003. – V. 31. – № 10. – P. 4911-4924.

[19] Files S. Direct sums of self-small mixed group / S. Files, W. Wickless // J. Algebra. – 1999. – V. 222. – P. 1-16.

[20] Fomin A. Quotient divisible Abelian groups / A. Fomin, W. Wickless // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – V. 126. – № 1. – P. 45-52.

[21] Fuchs L. Abelian groups / L. Fuchs – Budapest: Publ. House of the Hungar. Acad. Sci., 1958.

[22] Fuchs L. Note on Abelian groups, I // Ann. Univ. Sci. Budapest. – 1959. – V. 2. – P. 5-23.

[23] Fuchs L. Note on Abelian groups, II // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1960. – V. 11. – P. 117-125.

[24] Gobel R. A general theory of slender groups and Fuchs-44-groups / R. Gobel, S.V. Richkov, B. Wold // Lecture Notes Math. – 1981. – V. 874. – P. 194-201.

[25] Grosse P. Maximale periodische Klassen abelscher Gruppen // Math. Z. – 1966. – V. 94. – № 4. – P. 235-255.

[26] Grosse P. Homomorphismen endlicher Ordnung // Ann. Univ. Sci. Budapest. – 1967. – V. 10. – P. 31-35.

[27] Kaplansky I. Infinite Abelian groups / I. Kaplansky – Ann Arbor: University of Michigan Press, 1954.

[28] Leeuwen L.C.A. van. On torsion-free cotorsion groups // Indag. Math. – 1969. – V. 31. – № 4. – P. 388-393.

[29] Mader A. A Galois correspondence in Abelian groups // Lecture Notes Math. – 1977. – V. 616. – P. 384-391.

[30] Pierce R. Homomorphisms of primary Abelian groups // Topics in Abelian Groups, Chicago, Illinois. – 1963. – P. 215-310.

[31] Sasiada E. Proof that every countable and reduced torsion-free Abelian group is slender // Bull. Acad. Polon. Sci. – 1959. – V. 7 – P. 143-144.

[32] Schultz P. Torsion-free extensions of torsion-free Abelian groups // J. Algebra. – 1974. – V. 30. – № 1-3. – P. 75-91.

[33] Warfield R.B. Homomorphisms and duality for torsion-free groups // Math. Z. – 1968. – V. 107. – № 3. – P. 189-200.

Работы автора по теме диссертации

[34] Гердт И.В. Малые абелевы группы // Международная конференция по математике и механике. Тезисы докладов. 16-18 сентября 2003. – Томск: Изд-во Томского университета, 2003. – С. 38.

[35] Гердт И.В. $\mathfrak{K}$-малые абелевы группы // Материалы XLIII Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Математика. – Новосибирск: Изд-во Новосибирского университета, 2005. — С. 5.

[36] Гердт И.В. Малые абелевы группы // Абелевы группы. Труды Всероссийского симпозиума (Бийск, 22-25 августа 2005) – Бийск: Изд-во РИО БПГУ, 2005. – С. 9-11.

[37] Гердт И.В. $\mathfrak{K}$-малые абелевы группы // Материалы XIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов". Том IV. — М.: Изд-во Московского университета, 2006. — С. 63-64.

[38] Гердт И.В. $\mathfrak{R}$-малые абелевы группы // Абелевы группы. Материалы Всероссийского симпозиума (Бийск, 19-25 августа 2006) – Бийск: Изд-во РИО БПГУ, 2006. – С. 10-12.

[39] Гердт И.В. Малые абелевы группы относительно различных классов абелевых групп // Лобачевские чтения – 2006. Материалы пятой всероссийской молодежной научной школы-конференции. Труды математического центра имени Лобачевского. Том 34. – Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2006. – С. 54-55.

[40] Гердт И.В. $\mathfrak{R}$-малые абелевы группы // Вестник Томского государственного университета. Бюллетень оперативной научной информации – Томск: Изд-во Томского университета, 2005. – № 54. – С. 31-37.

[41] Гердт И.В. Малые абелевы группы // Вестник Томского государственного университета. Серия "Математика. Кибернетика. Информатика". — Томск: Изд-во Томского университета, 2006. – № 290. – С. 14-18.

[42] Гердт И.В. $\mathfrak{R}$-малые абелевы группы // Труды XXVIII конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ (9-21 апреля 2006). – М.: Изд-во Московского университета, 2006. — С. 15-18.

[43] Гердт И.В. Абелевы группы, малые относительно групп без кручения // Международная конференция по алгебре и теории чисел, посвященная 80-летию В.Е. Воскресенского, Самара (21-25 мая 2007). – Самара: Изд-во Универс групп, 2007. – С. 11-12.

[44] Гердт И.В. Малые абелевы группы // Фундамент. и прикл. мат. – 2007. – Том 13. – № 3. – С. 3-8.

[45] Гриншпон С.Я. Малые абелевы группы / С.Я. Гриншпон, И.В. Гердт // Международная конференция "Алгебра и ее приложения", посвященная 75-летию В.П. Шункова: Тезисы докладов. – Красноярск, 2007. – С. 43-44.

[46] Гриншпон С.Я. Малые прямые суммы и прямые произведения групп без кручения / С.Я. Гриншпон, И.В. Гердт // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша. – М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2008. – С. 76-77.

[47] Гриншпон С.Я. Малость векторных групп / С.Я. Гриншпон, И.В. Гердт // Всероссийская конференция по математике и механике. Тезисы докладов. 22-25 сентября 2008. – Томск: Изд-во Томского университета, 2008. – С. 40-41.

[48] Gerdt I.V. Small Abelian groups // J. Math. Sci. – 2008. – V. 154. – № 3. – P. 279-283.

[49] Гердт И.В. Абелевы группы, малые относительно редуцированных групп // Изв. вузов. Математика. – 2009. – № 4. – С. 20-24.