На правах рукописи

Кулешова Елена Викторовна

УПРАВЛЕНИЕ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКОЙ В СЛУЧАЕ КОНЕЧНОГО ВРЕМЕННОГО ГОРИЗОНТА: ПРИНЦИП МАГИСТРАЛИ, ЗОЛОТОЕ ПРАВИЛО НАКОПЛЕНИЯ, ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РОСТ

05. 13. 01 – Системный анализ, управление и обработка информации
(в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2009

Работа выполнена на кафедре прикладной математики в ГОУ ВПО "Томский государственный университет".

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Дёмин Николай Серапионович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
доцент Рожкова Светлана Владимировна

доктор физико-математических наук,
доцент Воробейчиков Сергей Эрикович

Ведущая организация:
Государственный университет управления (г. Москва)

Защита состоится
24 декабря 2009 г. в 10.30 на заседании диссертационного совета Д 212.267.12 при Томском государственном университете по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 (корп. 2, ауд. 212б).

С диссертацией можно ознакомится:
В научной библиотеке Томского государственного университета по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 34.

Автореферат разослан: 18 ноября 2009 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
доктор технических наук, профессор В.И. Смагин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Основными составляющими современной макроэкономической теории являются следующие проблемы: 1) производство, потребление, распределение, экономический рост; 2) экономическое развитие как научно-технический прогресс; 3) равновесие на рынках благ, денег, капитала, труда; 4) общее экономическое равновесие; 5) экономические циклы; 6) открытая экономика. Данная диссертация является исследованием в рамках *первой* проблемы.

Проблема *экономического роста* в односекторной (агрегированной) экономике – это, по сути, задача об *оптимальных пропорциях* между *потреблением* и *накоплением*, решение которой обеспечивает устойчивый экономический рост, который понимается как монотонное возрастание во времени произведенного экономикой продукта (национального дохода, ВВП).

Становление современной теории экономического роста, которая получила название *«неоклассической»* связано с работами Рамсея (F. Ramsey), Харрода (R. Harrod) и Домара (E. Domar) на начальном этапе и с работами нобелевских лауреатов по экономике Р. Солоу (R. Solow) и К. Эрроу (K. Arrow), которые окончательно сформулировали проблему экономического роста как *задачу оптимального управления.* Оказалось, что функционирование экономики в рамках неоклассической модели происходит в соответствии с *«Принципом магистрали»*, означающим наискорейший выход экономики на траекторию *сбалансированного роста*, на котором распределение продукта между накоплением и потреблением происходит в соответствии с *«Золотым правилом накопления»*, впервые сформулированным нобелевским лауреатом Э. Фелпсом (E. Phelps).

В базовой неоклассической модели экономического роста, во-первых, продукт расходуется на текущее потребление и накопление, которое в свою очередь определяет будущее потребление, и в этом смысле кон-

фликт интересов не возникает, а во-вторых, отсутствуют ограничения на накопление и потребление. В тоже время в экономике на макроуровне присутствуют *три основных субъекта экономической деятельности*, а именно: наемные работники (трудовые ресурсы), работодатели (владельцы основных фондов) и государство, интересы которых, как правило, не совпадают. Таким образом, *актуальной проблемой* является исследование задачи экономического роста при распределении национального дохода на накопление, на потребление трудовых ресурсов, на потребление работодателей и на налоговые отчисления с учетом ненулевой материалоемкости и наличия ограничений на накопление, потребление и налоговые отчисления.

Цель работы. 1. Провести полное исследование задач оптимального управления односекторной (агрегированной) экономикой в соответствии с тремя критериями оптимальности: а) максимизация потребления трудовых ресурсов; б) максимизация потребления работодателей как владельцев основных фондов; в) максимизация налоговых поступлений. 2. Для всех трех критериев оптимальности исследовать возможность реализации «Магистрального принципа» функционирования экономики. 3. Для всех трех критериев оптимальности получить «Золотое правило накопления». 4. Для всех трех критериев оптимальности выделить случаи, когда в течение всего планового периода осуществляется экономический рост. 5. Осуществить конкретизацию результатов для одного частного случая линейно-однородных производственных функций, а именно, для функции Кобба-Дугласа.

Методы исследования включают в себя теорию оптимального управления, теорию дифференциальных уравнений, математическую теорию оптимальных процессов, математический анализ.

Научная новизна. 1. Проведено полное исследование задач оптимального управления односекторной экономикой в случае конечного временного горизонта при учете потребления трудовых ресурсов и работодателей как владельцев основных фондов, а также налоговых

отчислений, ненулевой материалоемкости экономики и ограничений на накопление, потребление и налоговые отчисления в соответствии с тремя критериями оптимальности: а) максимизация потребления трудовых ресурсов; б) максимизация потребления работодателей как владельцев основных фондов; в) максимизация налоговых поступлений. 2. Для всех трех критериев оптимальности доказано существование «Магистрального принципа» функционирования экономики и получены условия осуществления этого принципа. 3. Для всех трех магистралей получено «Золотое правило накопления», определяющее единственный способ распределения произведенного продукта на магистрали между накоплением, потреблением трудовых ресурсов, потреблением работодателей, налоговыми отчислениями и отчислениями на удовлетворение ненулевой материалоемкости. 4. Получены условия функционирования экономики в соответствии с «Принципом магистрали» и выделен случай, когда в течение всего планового периода осуществляется экономический рост, а именно: на магистрали – сбалансированный рост, а на начальном интервале выхода экономики на магистраль и на конечном интервале времени схода экономики с магистрали для удовлетворения условий экономического горизонта – расширенный рост.

Достоверность полученных результатов диссертации подтверждается математическими исследованиями с использованием методов математической теории оптимальных процессов, теории дифференциальных уравнений и математического анализа.

Теоретическая значимость. Полученные результаты могут служить основой для дальнейших исследований в области решения задач управления односекторной экономикой с расширением моделей, в частности, с учетом экологических затрат и рассмотрением моделей открытой экономики.

Практическая значимость. Полученные в диссертации теоретические результаты могут использоваться при оценке различных аспектов функционирования экономики, а именно: 1) при прогнозировании

темпов накопления (увеличения ВВП) и экономического роста; 2) при определении оптимального размера инвестиций в производство; 3) при оценке того, какому временному интервалу планового периода и какому критерию оптимальности в большей мере соответствует функционирование экономики для принятия необходимых корректирующих действий и решений.

Апробация работы. Основные результаты докладывались на следующих конференциях, симпозиумах: 1) 4-я Всероссийская конференция «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» (Томск, 2002 г.); 2) 6-й Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике (Санкт-Петербург, 2005 г.); 3) Всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Научная сессия ТУСУР-2007» (Томск, 2007 г.); 4) Девятая Всероссийская научная конференция «Краевые задачи и математическое моделирование» (Новокузнецк, 2008 г.); 5) VIII международная конференция «Финансово-актуарная математика и смежные вопросы» (Красноярск, 2009 г.). Также результаты были представлены на: 1) 5-ом Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Кисловодск, 2004 г.); 2) 5-й Всероссийской конференции «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» (Иркутск, 2004 г.).

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в 11 печатных работах, четыре из которых опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы; общий объем работы 197 страниц, из которых 23 страницы рисунков, 13 страниц – библиография из 149 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении показана актуальность представляемой диссертации,

приведен краткий обзор работ зарубежных и российских авторов по данной тематике, сформулирована цель, обоснован выбор методики исследования, а также приведены краткое содержание работы и полученные результаты.

В первой главе рассмотрена задача управления односекторной экономикой на конечном интервале времени по критерию максимизации потребления трудовых ресурсов при наличии ограничений на потребление и накопление и при учете потребления работодателей, налоговых отчислений и ненулевой материалоемкости экономики. В п.1.1 формулируется постановка задачи. Пусть на интервале времени $t \in [0, T]$, составляющем плановый период, задано соотношение $Y(t) = F(K(t), L(t))$, где $Y(t)$ – произведенный экономикой продукт, $K(t)$ – основные фонды (капитал), $L(t) = L_0 \exp\{\lambda t\}$, $L_0 > 0$, $\lambda > 0$ – трудовые ресурсы, $F(K, L)$ – линейно-однородная производственная функция, удовлетворяющая неклассическим условиям. Весь продукт делиться на четыре части в виде $Y(t) = I(t) + C(t) + N(t) + \Psi(t)$, где $I(t)$ – накопление, $C(t)$ – потребление, $N(t)$ – налоговые отчисления, $\Psi(t)$ – материалоемкость экономики. Пусть $s(t)$– норма накопления, удовлетворяющая ограничениям $0 \leq s_0 \leq s(t) \leq s_1 \leq 1$, а $\tilde{s}(t) = (1 - s(t))$ – норма потребления. Если $\mu > 0$ – коэффициент амортизации основных фондов, то для $K(t)$ справедливо дифференциальное уравнение $\dot{K}(t) = (1-\gamma)(1-u))s(t)F(K(t), L(t)) - \mu K(t)$. В качестве критерия, подлежащего максимизации в плановом периоде $[0, T]$, примем потребление с коэффициентом дисконтирования $\delta > 0$. Перейдя к нормированным (удельным) относительно трудовых ресурсов величинам ($k(t) = K(t)/L(t)$ – фондовооруженность, $y(t) = f(k(t))$ – средняя производительность труда), получаем следующую задачу оптимального управления (u– норма налоговых отчислений, γ – норма материалоемкости):

$$\dot{k}(t) = (1-\gamma)(1-u)s(t)f(k(t)) - \nu k(t), t \in [0, T]; \tag{1}$$

$$k(0) = k_0, k(T) \geq k_T > 0; \tag{2}$$

$$J = \int\limits_0^T (1-\gamma)(1-u)(1-s(t))f(k(t))\exp\{-\delta t\}dt \to \max_{\{s(t)\}}; \tag{3}$$

$$0 \leq s_0 \leq s(t) \leq s_1 \leq 1;$$

$$\nu = \mu + \lambda, \quad \mu > 0, \quad \lambda > 0, \quad \delta > 0, \quad 0 \leq \gamma < 1, \quad 0 \leq u < 1. \tag{4}$$

Решение задачи (1) – (4) проведено с использованием принципа максимума Понтрягина. В п.1.2 доказана лемма 1.2.1, определяющая класс оптимальных управлений. В п.1.3 исследованы свойства фазовых траекторий (леммы 1.3.1 – 1.3.4). В п.1.4 исследован алгоритм управления и найден интервал разрешимости задачи $k \in [k_2, k_1]$. В п.1.5 результаты проведенных исследований формулируются в виде «Магистральной теоремы» («МТ»).

Теорема 1.5.1.(«МТ») *При достаточно большом плановом периоде $[0, T]$ решение задачи имеет следующий вид:*

1) интервал времени $[0, T]$ разбивается на три интервала, т.е. $[0, T] = [0, T^*) \cup [T^*, T^{**}] \cup (T^{**}, T]$;

2) управление $s(t) \in \{s_1; s_0; s^*\}$, т.е. является кусочно-постоян--ным;

3) на магистральном интервале времени $t \in [T^*, T^{**}]$ $s(t) = s^*$, которое определяется формулой

$$s^* = \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)} - \frac{\delta k^*}{(1-\gamma)(1-u)f(k^*)}, \tag{5}$$

а фондовооруженность $k(t)$ сохраняет постоянное значение k^*, являющееся единственным корнем уравнения

$$k^* : f'(k) = (\nu + \delta)/(1-\gamma)(1-u); \tag{6}$$

4) на начальном интервале времени $t \in [0, T^*)$, когда происходит выход экономики на магистраль, $s(t) = s_1$, если $k_0 < k^*$, и $s(t) = s_0$, если $k_0 > k^*$, и происходит соответственно возрастание либо убывание $k(t)$ от k_0 до k^*;

5) на конечном интервале времени $t \in (T^{**}, T]$, когда происходит сход экономики с магистрали для удовлетворения условия экономического горизонта $k(T) = k_T$, $s(t) = s_1$, если $k_T > k^*$, и $s(t) = s_0$, если $k_T < k^*$, и происходит соответственно возрастание либо убывание $k(t)$ от k^* до k_T.

Для значений T^*, T^{**} и J приведены формулы соответственно для четырех случаев соотношений между k_0, k^* и k_T: a) $k_0 < k^*$, $k_T < k^*$; b) $k_0 < k^*$, $k_T > k^*$; c) $k_0 > k^*$, $k_T < k^*$; d) $k_0 > k^*$, $k_T > k^*$.

В п.1.6 сформулировано «Золотое правило накопления» («ЗПН»).

Теорема 1.6.1.(«ЗПН») *На интервале времени $t \in [T^*, T^{**}]$, когда экономика находится на магистрали и $s(t) = s^*$, $k(t) = k^*$:*

1) на накопление используется $(1-\gamma)(1-u)$-я часть дохода с основных фондов $Y_K^*(t)$ минус величина $\delta K^*(t)$, т.е.

$$I^*(t) = (1-\gamma)(1-u)Y_K^*(t) - \delta K^*(t), \tag{7}$$

$$Y_K^*(t) = \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial K^*(t)} K^*(t); \tag{8}$$

2) на потребление используется $(1-\gamma)(1-u)$-я часть дохода с трудовых ресурсов $Y_L^*(t)$ плюс величина $\delta K^*(t)$, т.е.

$$C^*(t) = (1-\gamma)(1-u)Y_L^*(t) + \delta K^*(t), \tag{9}$$

$$Y_L^*(t) = \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial L(t)} L(t); \tag{10}$$

3) на налоговые отчисления используется сумма $[(1-\gamma)u]$ -ых частей доходов с основных фондов и трудовых ресурсов, т.е.

$$N^*(t) = (1-\gamma)u[Y_K^*(t) + Y_L^*(t)] = (1-\gamma)uF(K^*(t), L(t)); \tag{11}$$

4) материальные затраты равны сумме оставшихся $[1-(1-\gamma)(1-$ $-u) - (1-\gamma)u]$-ых частей доходов с основных фондов и трудовых ресурсов, т.е.

$$\Psi^*(t) = [1-(1-\gamma)(1-u)-(1-\gamma)u][Y_K^*(t)+Y_L^*(t)] = \gamma F(K^*(t), L(t)). \tag{12}$$

В п.1.7 полученные результаты конкретизированы для производственной функции Кобба-Дугласа (ПФКД) $F(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$, $f(k) = Ak^{\alpha}$, $A > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, где α – коэффициент эластичности по основным фондам, β – коэффициент эластичности по трудовым ресурсам.

Теорема 1.7.1. *В случае производственной функции Кобба-Дугласа решение задачи в форме «Магистральной теоремы» имеет следующий вид:*

1) для s^*, $\tilde{s}^*$, k^* справедливы следующие формулы:

$$s^* = \frac{\nu}{(\nu+\delta)}\alpha, \quad \tilde{s}^* = \frac{\delta}{(\nu+\delta)} + \frac{\nu}{(\nu+\delta)}\beta, \quad k^* = \left[\frac{(1-\gamma)(1-u)\alpha A}{(\nu+\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}; \qquad (13)$$

2) на интервале $t \in [0, T^*)$:

$$k(t) = \left[\frac{(1-\gamma)(1-u)s_1 A - [(1-\gamma)(1-u)s_1 A - \nu k_0^{1-\alpha}]e^{-\nu(1-\alpha)t}}{\nu}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, k_0 < k^*; \qquad (14)$$

$$k(t) = \left[\frac{(1-\gamma)(1-u)s_0 A + [\nu k_0^{1-\alpha} - (1-\gamma)(1-u)s_0 A]e^{-\nu(1-\alpha)t}}{\nu}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, k_0 > k^*; \qquad (15)$$

3) на интервале $t \in (T^{**}, T]$:

$$k(t) = \left[\frac{(1-\gamma)(1-u)s_1 A - [(1-\gamma)(1-u)s_1 A - \nu k_T^{1-\alpha}]e^{\nu(1-\alpha)(T-t)}}{\nu}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad k_T > k^*; \qquad (16)$$

$$k(t) = \left[\frac{(1-\gamma)(1-u)s_0 A + [\nu k_T^{1-\alpha} - (1-\gamma)(1-u)s_0 A]e^{\nu(1-\alpha)(T-t)}}{\nu}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad k_T < k^*. \qquad (17)$$

Для T^{**}, T^*, J конкретизированы общие формулы.

В п.1.8 приведено обсуждение результатов проведенного исследования, в завершении которого получены условия существования решения в форме «МТ» и выделен случай экономического роста на всем интервале времени $t \in [0, T]$. В п.1.9 рассмотрен частный случай задачи Солоу, в которой в качестве управления используется текущее

удельное потребление. Для данной задачи проведены те же исследования, что и для задачи Рамсея в предыдущих пунктах. В п.1.10 задача обобщена на случай учета потребления работодателей как владельцев основных фондов, когда весь продукт делится на пять частей в виде $Y(t) = I(t) + C_L(t) + C_K(t) + N(t) + \Psi(t)$, где $I(t)$ – накопление, $C_K(t)$ – потребление работодателей, $C_L(t)$ – потребление трудовых ресурсов, $N(t)$ – налоговые отчисления, $\Psi(t)$ – материалоемкость экономики (производственные затраты). Основные результаты для этого общего случая представлены в теоремах 1.10.1 («МТ»), 1.10.2 («ЗПН») и 1.10.3 («МТ» для ПФКД). В п.1.11 приведены выводы по главе 1.

В второй главе рассмотрена задача управления односекторной экономикой на конечном интервале времени по критерию максимизации потребления работодателей как владельцев основных фондов. В п.1.1. формулируется постановка задачи. Пусть на интервале времени $t \in [0, T]$ задано соотношение $Y(t) = F(K(t), L(t))$, где $L(t) = L_0 \exp\{\lambda t\}$, $L_0 > 0$, $\lambda > 0$. Весь продукт $Y(t)$ делиться на пять частей в соответствии с балансовым соотношением $Y(t) = I(t) + C_K(t) + C_L(t) + N(t) + \Psi(t)$, где $C_K(t)$ – потребление работодателей, $C_L(t)$ – потребление наемных работников. Пусть $s(t)$ – норма накопления, $s_K(t)$ – норма потребления работодателей, $s_L(t) = 1 - [s(t) + s_K(t)]$ – норма потребления наемных работников, причем, $0 \le s(t) \le 1$, $0 \le s_K(t) \le 1$, $s(t) + s_K(t) \le 1$. Считаем, что экономика функционирует в условиях совершенной конкуренции, т.е. выполняется основное соотношение теории предельной производительности труда

$$C_L(t) = [\partial F(K(t), L(t))/\partial L(t)]\, L(t). \tag{18}$$

В качестве критерия, подлежащего максимизации в плановом периоде $[0, T]$, примем потребление работодателей с дисконтированием. Перейдя в сформулированной задаче к нормированным относительно трудовых ресурсов величинам, получаем следующую задачу оптимального управ-

ления:

$$\dot{k}(t) = (1-\gamma)(1-u)s(t)f(k(t)) - \nu k(t); \tag{19}$$

$$t \in [0,T], \quad k(0) = k_0, \quad k(T) \geq k_T > 0;$$

$$J = \int\limits_0^T (1-\gamma)(1-u)s_K(t)f(k(t))\exp\{-\delta t\}dt \to \max_{\{s_K(t)\}}; \tag{20}$$

$$(1-\gamma)(1-u)[1-s(t)-s_K(t)]f(k(t)) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)), \tag{21}$$

$$\nu = \mu + \lambda, \quad \mu > 0, \quad \lambda > 0, \quad \delta > 0, \quad 0 \leq \gamma < 1, \quad 0 \leq u < 1. \tag{22}$$

В п.2.2 доказана лемма 2.2.1, определяющая класс оптимальных управлений. В п.2.3 исследованы свойства фазовых траекторий (леммы 2.3.1 – 2.3.4). В п.2.4 исследован алгоритм управления и найден интервал разрешимости задачи $k \in (0, k_1]$. В п.2.5 результаты проведенных исследований формулируются в виде «Магистральной теоремы».

Теорема 2.5.1.(«МТ») *При достаточно большом времени управления T решение задачи имеет следующий вид:*

1) интервал времени $[0,T]$ разбивается на три интервала, т.е. $[0,T] = [0,T^*) \cup [T^*,T^{**}] \cup (T^{**},T]$;

2) управление $w(t) = \{s(t); s_K(t); s_L(t)\}$ имеет структуру: $s(t) \in \in \{\bar{s}_K(t); 0; s^*\}, s_K(t) \in \{0; \bar{s}_K(t); s_K^*\}, s_L(t) \in \{1-\bar{s}_K(t); s_L^*\}$. Таким образом, управления $s(t)$, $s_K(t)$ и $s_L(t)$ являются кусочно-непрерывными, где $\bar{s}_K(t)$ определяется формулой

$$\bar{s}_K(t) = \frac{k(t)f'(k(t))}{(1-\varepsilon)f(k(t))} - \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)}, \quad \varepsilon = 1-(1-\gamma)(1-u); \tag{23}$$

3) на магистральном интервале времени $t \in [T^*,T^{**}]$ $s(t) = s^*$, $s_K(t) = s_K^*$, $s_L(t) = s_L^*$, которые определяются формулами:

$$s_K^* = \frac{k^*f'(k^*)}{(1-\varepsilon)f(k^*)} - \frac{\nu k^*}{(1-\varepsilon)f(k^*)} - \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)}, \tag{24}$$

$$s^* = \frac{\nu k^*}{(1-\varepsilon)f(k^*)}, \quad s_L^* = \frac{1}{(1-\varepsilon)}\left[1 - \frac{k^*f'(k^*)}{f(k^*)}\right], \tag{25}$$

а $k(t) = k^*$, которое является единственным корнем уравнения

$$k^* : (1-\gamma)(1-u)f'(k) + kf''(k) = \nu + \delta; \tag{26}$$

4) на начальном интервале времени $t \in [0, T^*)$ $s_K(t) = 0$, $s(t) = \bar{s}_K(t)$, $s_L(t) = 1 - \bar{s}_K(t)$, если $k_0 < k^*$, и $s_K(t) = \bar{s}_K(t)$, $s(t) = 0$, $s_L(t) = 1 - \bar{s}_K(t)$, если $k_0 > k^*$, и наблюдается соответственно возрастание либо убывание $k(t)$ от k_0 до k^*;

5) на конечном интервале времени $t \in (T^{**}, T]$ $s_K(t) = 0$, $s(t) = \bar{s}_K(t)$, $s_L(t) = 1 - \bar{s}_K(t)$, если $k_T > k^*$, и $s_K(t) = \bar{s}_K(t)$, $s(t) = 0$, $s_L(t) = 1 - \bar{s}_K(t)$, если $k_T < k^*$, и наблюдается соответственно возрастание либо убывание $k(t)$ от k^* до k_T.

Для значений T^*, T^{**} и J получены формулы соответственно для четырех случаев соотношений между k_0, k^* и k_T.

В п.2.6 сформулировано «Золотое правило накопления».

Теорема 2.6.1.(«ЗПН») *На интервале времени $t \in [T^*, T^{**}]$, когда экономика находится на магистрали и $s(t) = s^*$, $s_K(t) = s_K^*$, $s_L(t) = s_L^*$, $k(t) = k^*$, доход с капитала $Y_K^*(t)$ распределяется на накопление $I^*(t)$, потребление работодателей $C_K^*(t)$, налоговые отчисления $N^*(t)$ и производственные затраты $\Psi^*(t)$, а доход с трудовых ресурсов $Y_L^*(t)$ равняется потреблению наемных работников, т.е.*

$$Y_K^*(t) = I^*(t) + C_K^*(t) + N^*(t) + \Psi^*(t), Y_L^*(t) = C_L^*(t). \tag{27}$$

В п.2.7 полученные результаты конкретизированы для производственной функции Кобба-Дугласа.

Теорема 2.7.1. *В случае производственной функции Кобба-Дугласа решение задачи в форме «Магистральной теоремы» имеет следующий вид:*

1) для k^*, s^*, s_K^*, s_L^* справедливы следующие формулы:

$$k^* = \left[\frac{A\alpha(\alpha-\varepsilon)}{(\nu+\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, s_K^* = \frac{(\alpha-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)}\left[1 - \frac{\nu}{(\nu+\delta)}\alpha\right], \tag{28}$$

$$s^* = \frac{\nu}{(\nu+\delta)}\frac{\alpha(\alpha-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)}, s_L^* = \frac{(1-\alpha)}{(1-\varepsilon)}; \tag{29}$$

2) на интервале $t \in [0, T^*)$:

$$k(t) = \left[\frac{A\big(\alpha-\varepsilon\big)-[A\big(\alpha-\varepsilon\big)-\nu k_0^{1-\alpha}]e^{-\nu(1-\alpha)t}}{\nu}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, k_0 < k^*; \tag{30}$$

$$k(t) = k_0 \exp\{-\nu t\} = k^* \exp\{\nu(T^* - t)\}, k_0 > k^*; \tag{31}$$

3) на интервале $t \in (T^{**}, T]$:

$$k(t) = \left[\frac{A(\alpha-\varepsilon)-[A(\alpha-\varepsilon)-\nu k_T^{1-\alpha}]e^{\nu(1-\alpha)(T-t)}}{\nu}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, k_T > k^*; \tag{32}$$

$$k(t) = k^* \exp\{-\nu(t - T^{**})\} = k_T \exp\{\nu(T - t)\}, k_T < k^*. \tag{33}$$

Для T^*, T^{**}, J конкретизированы общие формулы и проведено исследование решения на магистрали.

В п.2.8 приведено обсуждение результатов исследования, в завершении которого получены условия существования решения в форме «МТ» и выделен случай экономического роста на всем интервале времени $t \in [0, T]$. В п.2.9 рассмотрен частный случай нулевой материалоемкости и отсутствия налоговых отчислений, когда на интервалах выхода экономики на магистраль и схода экономики с магистрали весь валовый продукт может направляется только на потребление либо только на накопление (аналог классической задачи). В п.2.10 приведены выводы по главе 2.

В третьей главе рассмотрена задача управления односекторной экономикой на конечном интервале времени по критерию максимизации налоговых отчислений при наличии на них ограничений. В п.3.1 формулируется постановка задачи. Пусть на интервале времени $t \in [0, T]$ задано соотношение $Y(t) = F(K(t), L(t))$. Весь продукт $Y(t)$ делиться на четыре части в соответствии с балансовым соотношением $Y(t) = I(t) + C(t) + N(t) + \Psi(t)$. Пусть s – норма накопления, $0 < s < 1$, а $\tilde{s} = (1 - s)$ – норма потребления, а $u(t)$ – норма налоговых отчислений. Для $K(t)$ справедливо дифференциальное уравнение

$\dot{K}(t) = s(1-\gamma)(1-u(t))F(K(t), L(t)) - \mu K(t)$. В качестве критерия, подлежащего максимизации в плановом периоде $[0, T]$, примем налоговые отчисления с дисконтированием. Перейдя в сформулированной задаче к нормированным относительно трудовых ресурсов величинам, получаем следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{k}(t) = s(1-\gamma)(1-u(t))f(k(t)) - \nu k(t), \tag{34}$$

$$t \in [0, T], \quad k(0) = k_0, \quad k(T) \geq k_T > 0; \tag{35}$$

$$J = \int\limits_0^T (1-\gamma)u(t)f(k(t))\exp\{-\delta t\}dt \to \max_{\{u(t)\}}, \tag{36}$$

$$0 \leq u_1 \leq u(t) \leq u_2 \leq 1;$$

$$0 < s < 1, \nu = \mu + \lambda, \quad \mu > 0, \quad \lambda > 0, \quad \delta > 0, \quad 0 \leq \gamma < 1. \tag{37}$$

В п.3.2 доказана лемма 3.2.1, определяющая класс оптимальных управлений. В п.3.3 исследованы свойства фазовых траекторий (леммы 3.3.1 – 3.3.4). В п.3.4 исследован алгоритм управления и найден интервал разрешимости задачи $k \in [k_2, k_1]$. В п.3.5 результаты проведенных исследований формулируются в виде «Магистральной теоремы».

Теорема 3.5.1.(«МТ») *При достаточно большом времени управления T решение задачи имеет следующий вид:*

1) интервал времени $[0, T]$ разбивается на три интервала, т.е. $[0, T] = [0, T^*) \cup [T^*, T^{**}] \cup (T^{**}, T]$;

2) управление $u(t) \in \{u_1; u_2; u^*\}$, т.е. является кусочно-постоян--ным с тремя возможными значениями;

3) на магистральном интервале времени $t \in [T^*, T^{**}]$ $u(t) = u^*$, которое определяется формулой

$$u^* = 1 - \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)} + \frac{\delta k^*}{s(1-\gamma)f(k^*)}, \tag{38}$$

а фондовооруженность $k(t)$ сохраняет постоянное значение k^*, являющееся единственным корнем уравнения

$$k^* : f'(k) = (\nu + \delta)/s(1-\gamma); \tag{39}$$

4) на начальном интервале времени $t \in [0, T^*)$ $u(t) = u_1$, если $k_0 < k^*$, и $u(t) = u_2$, если $k_0 > k^*$, и происходит соответственно возрастание либо убывание $k(t)$ от k_0 до k^*;

5) на конечном интервале времени $t \in (T^{**}, T]$ $u(t) = u_1$, если $k_T > k^*$, и $u(t) = u_2$, если $k_T < k^*$, и происходит соответственно возрастание либо убывание $k(t)$ от k^* до k_T.

Для значений T^*, T^{**} и J приведены формулы соответственно для четырех случаев соотношений между k_0, k^* и k_T.

В п.3.6 сформулировано «Золотое правило накопления».

Теорема 3.6.1.(«ЗНП») *На интервале времени $t \in [T^*, T^{**}]$, когда экономика находится на магистрали и $u(t) = u^*$, $k(t) = k^*$:*

1) суммарно на накопление и потребление используется $(1-\gamma)$-я часть дохода с основных фондов $Y_K^*(t)$ минус величина $(\delta/s)K^*(t)$, т.е.

$$I^*(t) + C^*(t) = (1-\gamma)Y_K^*(t) - (\delta/s)K^*(t); \tag{40}$$

2) на налоговые отчисления используется $(1-\gamma)$-я часть дохода с трудовых ресурсов $Y_L^*(t)$ плюс величина $(\delta/s)K^*(t)$, т.е.

$$N^*(t) \quad = (1-\gamma)Y_L^*(t) + (\delta/s)K^*(t); \tag{41}$$

3) материальные затраты равны сумме оставшихся $[1-(1-\gamma)]$-ых частей доходов с основных фондов и трудовых ресурсов, т.е.

$$\Psi^*(t) = [1-(1-\gamma)]Y_K^*(t) + [1-(1-\gamma)]Y_L^*(t) = \gamma F(K^*(t), L(t)). \tag{42}$$

В п.3.7 полученные результаты конкретизированы для производственной функции Кобба-Дугласа.

Теорема 3.7.1. *В случае производственной функции Кобба-Дугласа решение задачи в форме «Магистральной теоремы» имеет следующий вид:*

1) для u^* и k^* справедливы следующие формулы:

$$u^* = 1 - \frac{\nu}{(\nu+\delta)}\alpha, \quad k^* = \left[\frac{s(1-\gamma)\alpha A}{(\nu+\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}; \tag{43}$$

2) на интервале $t \in [0, T^*)$ ($v_i = s(1-\gamma)(1-u_i)$, $i = 1; 2$):

$$k(t) = \left[\frac{v_1 A - [v_1 A - \nu k_0^{1-\alpha}] \exp\{-\nu(1-\alpha)t\}}{\nu}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, k_0 < k^*; \tag{44}$$

$$k(t) = \left[\frac{v_2 A + [\nu k_0^{1-\alpha} - v_2 A] \exp\{-\nu(1-\alpha)t\}}{\nu}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, k_0 > k^*; \tag{45}$$

3) на интервале $t \in (T^{**}, T]$:

$$k(t) = \left[\frac{v_1 A - [v_1 A - \nu k_T^{1-\alpha}] \exp\{\nu(1-\alpha)(T-t)\}}{\nu}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, k_T > k^*; \tag{46}$$

$$k(t) = \left[\frac{v_2 A + [\nu k_T^{1-\alpha} - v_2 A] \exp\{\nu(1-\alpha)(T-t)\}}{\nu}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, k_T < k^*. \tag{47}$$

Для T^*, T^{**}, J конкретизированы общие формулы.

В п.3.8 приведено обсуждение результатов исследования, в завершении которого получены условия существования решения в форме «МТ» и выделен случай экономического роста на всем интервале времени $t \in [0, T]$. В п.3.9 обобщена задача на случай учета потребления работодателей как владельцев основных фондов. Основные результаты для этого общего случая представлены в теоремах 3.9.1(«МТ»), 3.9.2 («ЗПН») и 3.9.3 («МТ» для ПФКД). В п.3.10 приведены выводы по главе 3.

В заключении формулируются

Основные результаты, выносимые на защиту.

1. Исследование задач оптимального управления односекторной экономикой при достаточно общих предположениях в соответствии с тремя критериями оптимальности: 1) максимизация потребления трудовых ресурсов; 2) максимизация потребления работодателей как владельцев основных фондов; 3) максимизация налоговых поступлений.

2. Доказательство для указанных критериев «Магистральных теорем», обосновывающих осуществление «Принципа магистрали» функционирования экономики.

3. Получение соотношений, определяющих «Золотое правило накопления» как единственный способ распределения произведенного эконо-

микой продукта на магистралях.

4. Получение условий функционирования экономики в соответствии с «Принципом магистрали».

5. Конкретизация результатов для производственной функции Кобба-Дугласа.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Демин Н.С., Кулешова Е.В. Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени с учетом потребления работодателей // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 9.– С. 140 – 155.**

2. **Демин Н.С., Кулешова Е.В.Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени с учетом налоговых отчислений // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2008. – № 6. – С. 87 – 98.**

3. **Демин Н.С., Кулешова Е.В. Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени по критерию максимизации налоговых отчислений // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2009. – Т. 12, № 1(37). – С. 74 – 88.**

4. **Демин Н.С., Кулешова Е.В. Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени в модели Солоу // Вестник Томского государственного университета. – 2004. – № 284. – С. 53 – 58.**

5. Демин Н.С., Кулешова Е.В. Принцип магистрали в задаче управления односекторной экономикой при наличии ограничений на накопление и потребление // Вестник Томского государственного университета. УВТиИ. – 2009. – № 2(7). – С. 5 – 23.

6. Демин Н.С., Кулешова Е.В. Максимизация потребления работодателей на конечном интервале времени при постоянных трудовых ресурсах // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2004. – №9 (II). – С. 150 – 155.

7. Демин Н.С., Кулешова Е.В., Решетникова Г.Н. Об эквивалентности решений задачи управления односекторной экономикой в моделях Рамсея и Солоу // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2002. – № 1(I). – С. 150 – 153.

8. Кулешова Е.В., Демин Н.С. Исследование математической модели односекторной экономики на стационарных траекториях с учетом потребления работодателей // Краевые задачи и математическое моделирование: Сборник статей. – Новокузнецк: Кемеровский государственный университет, 2008. – Т. 3. – С. 93 – 97.

9. Кулешова Е.В. Управление односекторной экономики на конечном интервале времени по критерию максимизации потребления предпринимательского сектора // Научная сессия ТУСУР-2007: Материалы докладов. – Томск: «В-Спектр», 2007. – Т. 4. – С. 196 – 199.

10. Демин Н.С., Кулешова Е.В. Максимизация потребления работодателей в случае производственной функции общего вида // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2004. – Т. 11, вып. 2. – С. 326 – 327.

11. Кулешова Е.В., Дёмин Н.С. Магистральное решение в задаче управления односекторной экономикой при наличии ограничений на накопление и потребление // Труды VIII международной ФАМ'2009 конференции. Ч. 1. / Под ред. О.Ю. Воробьёва. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2009. – С. 150 – 155.