На правах рукописи

Носова Мария Геннадьевна

АВТОНОМНАЯ НЕМАРКОВСКАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ДЕМОГРАФИИ

05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Томск – 2010

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета.

Научный руководитель: доктор технических наук,
профессор Назаров Анатолий Андреевич.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Змеев Олег Алексеевич.

кандидат физико-математических наук,
доцент Гарайшина Ирина Рашитовна.

Ведущая организация: Сибирский федеральный университет, г.Красноярск.

Защита состоится 18 марта 2010 года в $10^{\underline{30}}$ на заседании диссертационного совета Д 212.267.08 при Томском государственном университете по адресу: 634050, г.Томск, пр.Ленина, 36, корп. 2, ауд. 102.

Отзывы на автореферат (в двух экземплярах), заверенные гербовой печатью организации, просим направлять по адресу: 634050, г.Томск, пр.Ленина, 36, ученому секретарю ТГУ Буровой Н.Ю.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета по адресу: 634050, г.Томск, пр.Ленина, 34а.

Автореферат разослан 12 февраля 2010 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.267.08
доктор технических наук, профессор А.В. Скворцов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. В настоящее время демографические прогнозы востребованы в самых разных отраслях экономики, в образовании, здравоохранении и т.д. В связи с этим возникает необходимость построения научно обоснованных демографических прогнозов, как на ближайшее, так и на более отдаленное будущее.

При анализе и прогнозировании демографических процессов наиболее эффективным инструментом является использование методов математического моделирования.

К первым математическим моделям демографических процессов относятся детерминированные модели роста человечества, а именно модели линейного и экспоненциального роста, описание которых встречается в работах И.Г. Венецкого, Д. Кендалла, Х. Касвелла и других авторов.

Наиболее известная детерминированная модель – модель стабильного населения (непрерывные и дискретные модели). Ее создание связывают с такими именами как Л. Эйлер, Г. Кнапп, В. Лексис, Дж. Лотка, В. Борткевич, П. Лесли. Большой вклад в разработку методов практического применения стабильного населения внесли советские демографы С.А. Новосельский, В.В. Паевский, А.Я. Боярский, И.Г. Венецкий и др.

Современный этап развития теории стабильного населения связывают с обобщением основных выводов на случай демографических процессов с переменными интенсивностями. В этом направлении работали А. Коул и А. Лопес. А также Р. Лии, Д. Ахлбург, З. Сайкес, М. Алхо, Б. Спенсер, Дж. Поллард, Дж. Кохен, Н. Кейфиц и другие.

В конце XIX века учеными была предпринята попытка использовать в качестве модели, описывающей рост человечества, логистическую кривую. Этой модели придерживались Р. Пирль и Л. Рид.

Еще одной детерминированной моделью воспроизводства населения является модель гиперболического изменения численности населения, предложенная в 1960 г. Х. Ферстером, П. Мором и Л. Амиотом. В настоящее время в этом направлении работает С.П. Капица.

Значительный вклад в математическую демографию сделан О.В. Староверовым, который рассматривал демографические процессы в виде марковских моделей в форме цепей Маркова. Староверовым О.В. предложена стохастическая модель развития населения с дискретным временем, учитывающая случайность в рождаемости и смертности.

Метод компонент или метод передвижки разработан П.К. Уэлптоном. В России перспективными исчислениями численности насе-

ления методом возрастных передвижек занимались С.Г. Струмилин, А.Я. Боярский, П.П. Шушерин, М.С. Бедный, а в последнее время Государственный комитет Российской Федерации по статистике, Центр демографии и экологии человека, Отдел населения ООН.

Приведенный анализ множества моделей, показал, что в моделировании демографических процессов наиболее распространены детерминированные модели (дискретные и непрерывные) и стохастические дискретные. Преимущество стохастических моделей перед детерминированными моделями заключается в том, что они учитывают отклонение частот демографических событий от их вероятностей.

Однако демографические процессы протекают в непрерывном времени и являются стохастическими. Методы исследования таких процессов в математической демографии недостаточно развиты. Именно поэтому актуальной является задача существенного расширения математических моделей процесса изменения демографической ситуации, а также развития методов их исследования.

Целью работы является разработка и исследование математической модели процесса изменения демографической ситуации в виде автономной немарковской системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов, которая составляет новый класс в теории массового обслуживания и позволяет моделировать технические, биологические и другие автономные стохастические системы, функционирующие в непрерывном времени.

В рамках указанной цели были поставлены **следующие задачи**:

1. Разработка математического метода исследования автономных стохастических систем с непрерывным и дискретным временем.

2. Разработка стохастических моделей демографии в виде упрощенных автономных систем массового обслуживания с PH-распределением времени обслуживания и развитие методов моментов и асимптотического анализа для их исследования.

3. Разработка новой математической модели процесса изменения демографической ситуации в виде автономной немарковской системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов и произвольным временем обслуживания.

4. Разработка метода виртуальных фаз и модификация метода асимптотического анализа для исследования автономной немарковской системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов и произвольным временем обслуживания.

5. Применение разработанных математических моделей к исследованию процесса изменения демографической ситуации.

Научная новизна состоит в следующем:

1. Сформирован новый класс систем обслуживания в виде автономной немарковской системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов и ее упрощенные варианты, позволяющий применять их к исследованию широкого класса автономных стохастических систем.

2. Разработан метод виртуальных фаз для исследования автономной немарковской системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов, позволяющий находить многомерное распределение вероятностей численностей обслуживаемых заявок различных возрастов и основные характеристики, определяющие эти распределения.

3. Для исследования упрощенных моделей (трехфазной и пятифазной автономных систем, автономной системы с двумя типами заявок, автономной системы с PH-распределением времени обслуживания) предложены модификации метода моментов и метода асимптотического анализа. Найдены распределения вероятностей числа обслуживаемых заявок в таких системах и их основные характеристики.

4. На основе метода прямой передвижки возрастных групп предложен метод обратной передвижки, позволяющий выполнять интерполяцию демографических данных между датами переписей населения, а также восстанавливать функцию интенсивности процесса рождаемости. Метод прямой и обратной передвижки возрастных групп применены для оценки величины людских потерь РФ в годы ВОВ. Значение оценки составляет 17 млн. человек.

Методы исследования. В ходе исследования автономных систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов разных типов применялся аппарат теории вероятностей, случайных процессов, теории массового обслуживания, теории возмущений, математической демографии. В работе использовались методы моментов и асимптотического анализа.

Теоретическая ценность для теории массового обслуживания заключается в существенном совершенствовании и расширении классов систем массового обслуживания, а именно в создании автономной немарковской системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов, функционирующей в непрерывном времени, а также в разработке метода виртуальных фаз и в модификации метода асимптотического анализа для ее исследования. Кроме того, теоретическая ценность работы отражается в дальнейшем развитии математической демографии, а именно в разработке новой математической модели процесса изменения демографической ситуации и методов ее исследования.

Практическая ценность предложенной автономной немарковской системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов, функционирующей в непрерывном времени, и методов ее исследования заключается в возможности их применения для моделирования широкого класса технических систем и социально-экономических явлений и нахождения их основных вероятностных характеристик. В частности в диссертации рассмотрено применение для демографического прогнозирования на среднесрочную и долгосрочную перспективу.

Достоверность и обоснованность всех полученных в диссертации результатов подтверждается строгим математическим исследованием с использованием методов теории вероятностей, случайных процессов, теории массового обслуживания, теории возмущений, дифференциального и интегрального исчислений.

Апробация работы. Основные положения работы и отдельные ее результаты докладывались и обсуждались:

1. III Всероссийская научно-практическая конференция «Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2004)», г.Анжеро-Судженск, 2004 г.
2. Международная научная конференция «Математические методы повышения эффективности функционирования телекоммуникационных сетей», г.Минск, 2005 г.
3. IX Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи», г.Анжеро-Судженск, 2005 г.
4. V Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии и математическое моделирование», г.Анжеро-Судженск, 2006 г.
5. XI Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи», г.Анжеро-Судженск, 2007 г.
6. Международная научная конференция «Математические методы повышения эффективности функционирования телекоммуникационных сетей», г.Минск, 2007 г.
7. VII Российская конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», г.Томск, 2008 г.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)» Федерального агентства по образованию РФ по проекту «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применения к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи».

Публикации. По результатам выполненных исследований автором опубликованы 13 печатных работ, в том числе 6 статей, из них 3 в изданиях, рекомендованных списком ВАК.

Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации.

Постановка изложенных в диссертации задач была сделана научным руководителем аспиранта, доктором технических наук, профессором, Назаровым А.А., который указал основные направления исследования и принимал участие в обсуждении результатов. Доказательство и обоснование полученных в диссертации результатов, математические выкладки и численные расчеты выполнены лично автором работы. В совместных публикациях научному руководителю Назарову А.А. принадлежат постановки задач и указания основных направлений исследований, а основные результаты, выкладки и численные расчеты выполнены диссертантом.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 158 наименований и приложений. Общий объем составляет 204 страницы, в том числе основной текст 160 страница.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована важность и актуальность работы, сформулирована цель и задачи диссертационного исследования, показана его научная новизна, выявлена теоретическая и практическая ценность полученных результатов, кратко излагается содержание диссертационной работы.

В главе 1 предлагаются решения некоторых задач математической демографии с помощью метода математического моделирования. В разделе 1.1 дано математическое обоснование метода прямой передвижки возрастных групп. Метод прямой передвижки применяется для определения оценок значений численности $\overline{N}(x+\tau,t+\tau)$ группы лиц возраста $x+\tau$ в году $t+\tau$ при условии, что известна численность $N(x,t)$, τ – шаг прогнозирования.

На основе метода прямой передвижки возрастных групп предложен метод обратной передвижки, который позволяет находить оценку $\overline{N}(x-\tau,t-\tau)$ значения численности демографической группы лиц возраста $x-\tau$ в году $t-\tau$.

В разделе 1.2 найдены условные математическое ожидание и дисперсия величины $\overline{N}(x-\tau,t-\tau)$ при условии, что выполняется равенство $N(x,t)=n$.

В разделе 1.3 на основе полученных формул применены методы прямой и обратной передвижки возрастов к решению задачи оценки величины людских потерь РФ в годы ВОВ. Показано, что суммарные значения оценки людских потерь при методах прямой и обратной передвижки возрастных групп совпадают и составляют $S=17$ млн. чел.

В разделе 1.4 представлено математическое обоснование нецелесообразности аппроксимации в математической демографии процесса рождаемости потоком Пуассона при долгосрочном прогнозировании. Для этого на первом этапе рассматривается наиболее простая для исследования математическая модель случайного потока, управляемого цепью Маркова. Такая модель определяется как поток заявок в автономной системе массового обслуживания с неограниченным числом приборов и средним значением $m(t)$ числа занятых приборов. Для системы определено распределение вероятностей $P(i,t)$ и составлена система дифференциальных уравнений Колмогорова, найден аналитический вид характеристической функции $H(u,t)$

$$H(u,t)=\left\{\frac{e^{ju}-\frac{\mu}{b}-\frac{\mu}{b}(e^{ju}-1)\exp\{(b-\mu)t\}}{e^{ju}-\frac{\mu}{b}-(e^{ju}-1)\exp\{(b-\mu)t\}}\right\}^{N}.$$

Далее исследуется открытая система массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает нестационарный пуассоновский поток с интенсивностью $\lambda(t)$, выбираемой из условия совпадения средних значений числа приборов, занятых в автономной системе и в открытой системе с пуассоновским входящим потоком. Для системы записано и решено дифференциальное уравнение для характеристический функции числа занятых приборов $G(u,t)$. Характеристичная функция $G(u,t)$ имеет вид

$$G(u,t)=\left\{1-e^{-\mu t}+e^{ju}e^{-\mu t}\right\}^{N}\exp\left\{\left(e^{ju}-1\right)Ne^{-\mu t}\left(e^{bt}-1\right)\right\}$$

Через обратное преобразование Фурье найдены распределения вероятностей $P(i,t)$ и $PA(i,t)$, определяемые характеристическими функциями $G(u,t)$ и $H(u,t)$.

Получены значения расстояния $\rho(b,t)$ между распределениями вероятностей $P(i,t)$ и $PA(i,t)$ для различных значений параметров b и

t, показано, что расстояние $\rho(b,t)$ возрастает с ростом значений параметров b и t. Поскольку, характеристики таких систем массового обслуживания существенно различаются, следовательно, делается вывод о нецелесообразности аппроксимации процесса рождаемости потоком Пуассона при долгосрочном прогнозировании.

В главе 2 предлагается математическая модель женского населения в виде автономной системы массового обслуживания с PH-распределением времени обслуживания и неограниченным числом приборов. Особенностью такой системы является отсутствие внешнего источника заявок.

Продолжительность обслуживания τ каждой заявки в такой системе складывается из продолжительностей случайного числа фаз τ_i. Величины τ_i являются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами с параметрами μ_i, $i=\overline{1,\nu}$.

В терминах демографии обслуживаемая заявка интерпретируется как женщина, время обслуживания заявки – продолжительность жизни этой женщины, величина $b_i(t)$ – интенсивность рождения девочек у женщины i-й возрастной группы в году t. Входящим потоком заявок является процесс рождения девочек.

В этой главе рассматриваются некоторые упрощенные варианты автономной системы с PH-распределением времени обслуживания и методы их исследования, а именно, трехфазная система (раздел 2.2), пятифазная система (раздел 2.3) и система с двумя типами заявок (раздел 2.4).

Состояние упрощенной автономной системы в момент времени t определяется многомерным вектором $n(t)$. Для указанных моделей определены многомерные распределения вероятностей $P(n,t)$, где $n=\{n_1,n_2,n_3,...\}$, для которых составлены системы дифференциальных уравнений Колмогорова и записаны дифференциальные уравнения для многомерных характеристических функций $H(u,t)$ числа заявок, обслуживаемых в системах, здесь $u=\{u_1,u_2,u_3,...\}$.

Для нахождения распределения вероятностей, а также основных его характеристик применены методы моментов и асимптотического анализа, модифицированные к рассматриваемой задаче.

В данном случаем при методе асимптотического анализа уравнение для характеристической функции $H(u,t)$ рассматривалось в асимптотическом условии большой численности групп, пропорциональных некоторой бесконечно большой величине N, что вполне

обосновано в демографических исследованиях, где численности стандартных возрастных групп измеряются миллионами.

В первой асимптотике были предложены замены

$$u = \varepsilon w, \; H(u,t) = F_1(w,t,\varepsilon),$$

где $\varepsilon = 1/N$, ε – малый положительный параметр.

Показано, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_1(w,t,\varepsilon) = F_1(w,t) = \exp\{jm(t)w\},$$

где аналитическое среднее $Nm(t)$ является решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Для нахождения асимптотики второго порядка в задаче для $F_1(w,t,\varepsilon)$ выполнены замены

$$H(u,t) = \exp\{jNm(t)u\}H_2(u,t),$$

тогда для функций $H_2(u,t)$ получены задачи, в которых, обозначая $\varepsilon^2 = 1/N$, заменяем

$$u = \varepsilon w, \qquad H_2(u,t) = F_2(w,t,\varepsilon).$$

Показано, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_2(w,t,\varepsilon) = F_2(w,t) = \exp\left\{-\frac{1}{2} wRw^T\right\},$$

где элементы матрицы ковариаций $NR = [NR_{ij}]$ являются решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Определено, что многомерная величина $n(t)$ имеет асимптотически нормальное распределение с вектором математических ожиданий $Nm(t)$ и матрицей ковариаций $NR = [NR_{ij}]$. Величины i и j определяются типом системы массового обслуживания.

Отметим, что асимптотические средние значения $Nm_i(t)$ числа обслуживаемых заявок в рассматриваемых системах в момент времени t, найденные в предельном асимптотическом условии $N \to \infty$, совпадают с допредельными, полученными методом моментов. Заметим, что такое совпадение справедливо и для вторых моментов в предельной и допредельной моделях.

Предложенная упрощенная стохастическая модель в виде автономной системы массового обслуживания с PH-распределением времени обслуживания и частные ее виды могут применяться для моделирования широкого класса технических систем и социально-экономических явлений. В частности в диссертации предложено применение для прогнозирования процесса изменения демографической ситуации, как это продемонстрировано в разделах 2.2.3, 2.3.3, 2.4.3.

В главе 3 предложена стохастическая модель в виде автономной немарковской системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов и произвольным временем обслуживания.

Определим процесс функционирования данной системы массового обслуживания в терминах теории массового обслуживания.

Каждая заявка входящего потока в момент своего поступления занимает свободный прибор и находится на нем в течение всего времени обслуживания, продолжительность которого случайна. Продолжительности обслуживания различных требований стохастически независимы, имеют одинаковое распределение, определяемое функцией $S(x)=1-B(x)$, где $B(x)$ – функция распределения времени обслуживания заявки. Завершив обслуживание, заявка покидает систему.

Каждая заявка возраста x в момент времени t с интенсивностью $b(x,t)$ генерирует новое требование. Новая заявка в момент своего появления занимает свободный прибор и начинает процесс своего обслуживания, генерируя требования нового поколения.

В терминах демографии обслуживаемая заявка интерпретируется как женщина, время обслуживания заявки – продолжительность жизни этой женщины, $S(x)$ – функция дожития для женщин, возраст x заявки – возраст женщины в рассматриваемый момент времени, функция $b(x,t)$ – интенсивность рождения девочек у женщины возраста x в году t (функция фертильности).

Принципиальное отличие от модели главы 2 заключается в том, что здесь исследуется стохастическая плотность численности заявок. Предложен метод ее исследования, названный *методом виртуальных фаз*, заключающийся в аппроксимации времени обслуживания суммой случайного числа независимых одинаково экспоненциально распределенных случайных величин и предельным переходом при неограниченном возрастании числа фаз, а также пропорциональном уменьшении длительности каждой фазы.

В разделе 3.2 исследована общая система массового обслуживания с PH-распределением времени обслуживания. В этой модели время обслуживания аппроксимировано суммой случайного числа независимых одинаково экспоненциально распределенных случайных величин. Для распределения вероятностей $P(n_1,n_2,...,t)$ числа обслуживаемых заявок записано дифференциальное уравнение Колмогорова.

Наряду с исследованием допредельной модели методом моментов, проведено ее асимптотическое исследование. Асимптотическое условие, а также замены асимптотик первого и второго порядков аналогичны заменам главы 2.

Показано, что в условии предельного уменьшения длительностей фаз, то есть при $\mu \to \infty$, рассматриваемое РН-распределение сходится к распределению, определяемому функцией $S(x)$. Поэтому, сделав замены

$$u_i = u(i/\mu),\ n_i(t) = n(i/\mu, t),$$

$$H(u,t) = H(u,t,\mu) = M\left\{\exp\left[j\sum_{i=1}^{\infty} u\left(\frac{i}{\mu}\right)\mu n\left(\frac{i}{\mu},t\right)\frac{1}{\mu}\right]\right\},$$

и полагая, что при $\mu \to \infty$, $i \to \infty$ отношение $i/\mu \to x$ и существуют следующие пределы

$$\lim_{i/\mu \to x} u(i/\mu) = u(x),$$

$$\lim_{\substack{\mu \to \infty \\ i/\mu \to x}} H(u,t,\mu) = M\left\{\exp\left(j\int_0^{\infty} u(x)\xi(x,t)dx\right)\right\} = F(u,t),$$

а также существует предел по распределению

$$\lim_{\substack{i/\mu \to x, \\ i \to \infty, \mu \to \infty}} \mu n(i/\mu, t) = \xi(x,t),$$

в разделе 3.4 перешли к рассмотрению автономной немарковской системы массового обслуживания с произвольным временем обслуживания. Случайная функция $\xi(x,t)$ назовем стохастической плотностью численности заявок возраста x в момент времени t.

Для характеристического функционала

$$F(u,t) = M\left\{\exp\left(j\int_0^{\infty} u(x)\xi(x,t)dx\right)\right\}$$

записано основное уравнение

$$\frac{\partial F(u,t)}{\partial t} = j\int_0^{\infty}\frac{\partial F(u,t)}{\partial u(x)}\left\{(1-e^{ju(0)})b(x,t) + (e^{-ju(x)}-1)\frac{S'(x)}{S(x)} - ju'(x)\right\}dx. \quad (1)$$

Уравнение (1) будет решено методом асимптотического анализа в предположении, что случайная функция $\xi(x,t)$ принимает достаточно большие значения, пропорциональные некоторой бесконечно большой величине N, то есть $N \to \infty$. Для уравнения найдены асимптотики первого и второго порядков его решения.

Для нахождения асимптотики первого порядка в уравнении (1) выполняются замены

$$u = \varepsilon w,\ F(u,t) = F_1(w,t,\varepsilon).$$

где $\varepsilon = 1/N$, а ε – малый положительный параметр.

Из (1) получим равенство

$$\varepsilon\frac{\partial F_1(w,t,\varepsilon)}{\partial t}=j\int_0^\infty\frac{\partial F_1(w,t,\varepsilon)}{\partial w}\{(1-e^{j\varepsilon w(0)})b(x,t)+(e^{-j\varepsilon w(x)}-1)\frac{S'(x)}{S(x)}-j\varepsilon w'(x)\}dx \quad (2)$$

Теорема 3.3. При $\varepsilon\to 0$ решение задачи (2) имеет вид

$$F_1(w,t)=\exp\left\{j\int_0^\infty w(x)m(x,t)dx\right\}, \quad (3)$$

где $m(x,t)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial m(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial m(x,t)}{\partial x}=m(x,t)\frac{S'(x)}{S(x)} \quad (4)$$

с краевым условием

$$m(0,t)=\int_0^\infty m(x,t)b(x,t)dx.$$

Для того чтобы найти асимптотику второго порядка в уравнении (1) выполним замену

$$F(u,t)=H_2(u,t)\exp\left\{jN\int_0^\infty u(x)m(x,t)dx\right\},$$

а затем в полученном равенстве, обозначив $\varepsilon^2=1/N$ и введя замены

$$u=\varepsilon w, \qquad H_2(u,t)=F_2(w,t,\varepsilon),$$

получим уравнение

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_2(w,t,\varepsilon)}{\partial t}=j\varepsilon\int_0^\infty\frac{\partial F_2(w,t,\varepsilon)}{\partial w(x)}\left\{(1-e^{j\varepsilon w(0)})b(x,t)+(e^{-j\varepsilon w(x)}-1)\frac{S'(x)}{S(x)}-\right.$$

$$-j\varepsilon w'(x)\}dx-F_2(w,t,\varepsilon)\left\{j\varepsilon\int_0^\infty w(x)\frac{\partial m(x,t)}{\partial t}dx+\right. \quad (5)$$

$$\left.+\int_0^\infty m(x,t)\{(1-e^{j\varepsilon w(0)})b(x,t)+(e^{-j\varepsilon w(x)}-1)\frac{S'(x)}{S(x)}-j\varepsilon w'(x)\}dx\right\}.$$

Теорема 3.4. Решение задачи (5) при $\varepsilon\to 0$ имеет вид

$$F_2(w,t)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty w(y)w(z)R(y,z,t)dydz\right\}, \quad (6)$$

где слагаемые кросскорреляционной функции вида

$$R(y,z,t)=\sigma^2(t)\delta(y)\delta(z)+r(y,t)\delta(z)+r(z,t)\delta(y)+\sigma(y,t)\sigma(z,t)\delta(y-z)$$

определяются начальными и краевыми условиями

$$\sigma^2(x,0)=0,\ r(x,0)=0,\ \sigma^2(0)=0,\ \sigma^2(0,t)=0,\ r(0,t)=0$$

и являются решением системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma^2(x,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial\sigma^2(x,t)}{\partial x} = \left\{2\sigma^2(x,t) - m(x,t)\right\}\dfrac{S'(x)}{S(x)}, \\ \dfrac{\partial r(x,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial r(x,t)}{\partial x} = r(x,t)\left\{S'(0) + \dfrac{S'(x)}{S(x)}\right\} + \sigma^2(x,t)b(x,t), \\ \dfrac{\partial\sigma^2(t)}{\partial t} = 2S'(0)\sigma^2(t) + 2\int\limits_0^\infty r(x,t)b(x,t)dx + m(0,t). \end{cases} \qquad (7)$$

Полученные аналитические решения полностью определяют параметры гауссовского распределения, которому удовлетворяет распределение вероятностей стохастической плотности численности заявок $\xi(x,t)$ возраста x в году t.

В главе 4 предложено применение исследованной в главе 3 автономной немарковской системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов и произвольным временем обслуживания к изучению процесса изменения демографической ситуации.

Функция дожития $S(x)$ выбрана в виде модели Гомперца-Мейкема

$$S(x) = \exp\left\{-\int\limits_0^x (A + Be^{Cu})du\right\} = \exp\left\{-Ax - B(e^{Cx} - 1)/C\right\}$$

где параметр A учитывает риски, связанные с несчастными случаями, а слагаемое Be^{Cx} учитывает влияние возраста на смертность.

Интенсивность процесса рождаемости $b(x,t)$ определим в виде

$$b(x,t) = 0{,}488\eta(t)\psi(x,t),$$

где $\eta(t)$ – суммарный коэффициент рождаемости в момент времени t, а функция $\psi(x,t)$ имеет смысл плотности распределения вероятностей значений репродуктивного возраста женщины и задана как плотность смещенного двупарамерического γ-распределения.

На основе сделанных предположений относительно динамики суммарного коэффициента рождаемости $\eta(t)$ в разделе 4.3 построены пессимистический и оптимистический сценарии развития демографической ситуации в РФ на долгосрочную перспективу. Найдены дисперсия численности возрастных групп, а также ковариация между численностью возрастной группы нулевого возраста и численностью возрастной группы возраста x.

Заметим, что автономная немарковская система массового обслуживания с неограниченным числом приборов и ее упрощенные варианты, а также методы их исследования, предложенные в диссерта-

ции, являются инструментами анализа сложившийся демографической ситуации, наблюдения за результативностью политических решений и прогнозирования будущих динамик демографических процессов.

В Заключении диссертации приведены основные результаты.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах перечня ВАК (редакция от апреля 2008 года):

1. Назаров А.А. Многофазная автономная система массового обслуживания и ее применение к задачам демографии / А.А. Назаров, М.Г. Носова // Известия Томского политехнического университета. Серия Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – Том 315, №5. – С. 183–186.

2. Назаров А.А. Исследование математической модели демографических процессов в виде пятифазной системы массового обслуживания / А.А. Назаров, М.Г. Носова // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика Решетнева. – 2010. – Том 1. – С. 53–58.

3. Назаров А.А. Математическая модель процесса изменения демографической ситуации и ее исследование / А.А. Назаров, М.Г. Носова // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. – 2009. – Т. 2 (20). – С. 100–105.

В других изданиях:

4. Назаров А.А. Стохастическая модель демографических процессов как автономная система массового обслуживания / А.А. Назаров, М.Г. Носова // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2009. – Т. 16, Вып. 6. – С. 1098–1099.

5. Назаров А.А. О нецелесообразности аппроксимации процесса рождаемости потоками Пуассона при долгосрочном прогнозировании / А.А. Назаров, М.Г. Носова // Вестник Томского государственного университета. Серия Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – №3(8). – С. 75–80.

6. Назаров А.А. Метод передвижки возрастных групп в демографии и его приложения / А.А. Назаров, М.Г. Носова // Вестник Томского государственного университета. Серия Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – №3(8). – С. 67–75.

7. Носова М.Г. Статистическая инвариантность во времени распределения вероятностей значений репродуктивного возраста // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2004): Материалы III Всероссийской научно-практической конференции. – Томск: ТГУ, 2004. – Ч. 2. – С. 32–33.

8. Назаров А.А. Исследование демографических процессов методами теории массового обслуживания / А.А. Назаров, М.Г. Носова // ММПЭИТС: Материалы международной научной конференции. – Минск: БГУ, 2005. – С. 156–161.

9. Морозова А.С. Исследование основных характеристик математической модели сценария развития демографической ситуации / А.С. Морозова, М.Г. Носова // Научное творчество молодежи: Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции. – Томск: ТГУ, 2005. – Ч. 1. – С. 42–45.

10. Назаров А.А. Долгосрочный прогноз значений процесса изменения демографической ситуации / А.А. Назаров, М.Г. Носова // Научное творчество молодежи: Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции. – Томск: ТГУ, 2005. – Ч. 1. – С. 37–40.

11. Назаров А.А. Упрощенная стохастическая модель демографии в виде автономной системы обслуживания с неограниченным числом приборов / А.А. Назаров, М.Г. Носова // Информационные технологии и математическое моделирование: Материалы V Международной научно-практической конференции. – Томск: ТГУ, 2006. – С. 134–137.

12. Назаров А.А. Исследование системы с PH-распределением времени обслуживания / А.А. Назаров, М.Г. Носова // Научное творчество молодежи: Материалы XI Всероссийской научно-практической конференции. – Томск: ТГУ, 2007. – Ч. 1. – С. 41–44.

13. Назаров А.А. Автономная немарковская система обслуживания с неограниченным числом приборов / А.А. Назаров, М.Г. Носова // ММПЭИТС: Материалы международной научной конференции. – Минск: РИВШ, 2007. – С. 175–180.