

На правах рукописи

Китаева Людмила Владимировна

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ГИДРОДИНАМИКИ В ПРОНИЦАЕМЫХ КАНАЛАХ**

Специальность 01.02.05 - механика жидкости, газа и плазмы

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Бийск – 2003

Диссертация выполнена в Биологическом институте (филиале Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования) Алтайского государственного технического университета

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор Спиридонов Ф.Ф.
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук, профессор Якутенок В.А.  доктор физико-математических наук, профессор Матвиенко О.В.
Ведущая организация	Федеральный научно-производственный центр «Алтай»

Защита состоится «\_\_» \_\_\_\_\_ 2003 года в \_\_ч\_\_ мин на заседании диссертационного совета Д 212.267.13 при Томском государственном университете (634050, г. Томск, пр. Ленина, 36).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2003 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета

Христенко Ю.Ф.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Процессы разделения жидких систем играют важную роль во многих отраслях народного хозяйства. Для осуществления этих процессов применяют такие методы как перегонку и ректификацию, экстракцию и адсорбцию. Однако наиболее универсальным методом разделения является разделение с использованием полупроницаемых мембран (мембранные методы).

Расчет параметров процессов разделения и накопленный большой экспериментальный материал показывают, что применение полупроницаемых мембран дает значительный экономический эффект в традиционных производствах, открывает широкие возможности для создания принципиально новых ресурсосберегающих технологий.

Таким образом, мембранные методы являются перспективными практически для всех отраслей народного хозяйства, в которых возникает необходимость разделения, очистки и концентрирования растворов органических или минеральных веществ.

**Актуальность темы.** Разнообразие технологических задач, которые можно решить с использованием полупроницаемых мембран, требует создания широкого спектра аппаратов мембранного разделения оптимальной конструкции. Физически обоснованные методы расчета процессов разделения в таких аппаратах должны опираться на результаты исследования закономерностей движения жидкой среды и частиц примеси. В ряде случаев надежные сведения о протекании процесса разделения можно получить путем непосредственного измерения. В общем же, в силу достаточно малых поперечных размеров модулей мембранных аппаратов такой метод определения скорости жидкой среды внутри канала трудоемок и не всегда обеспечивает необходимую точность. Поэтому более целесообразно и экономически оправдано математическое моделирование полей гидродинамических переменных в проницаемых каналах мембранной установки.

Об актуальности исследуемой проблематики свидетельствует тот факт, что вопросы, затрагиваемые в диссертационной работе, входят в "Перечень приоритетных направлений фундаментальных исследований в России", по разделам: информатика и математическое моделирование, методы вычислительной и прикладной математики и их применение в фундаментальных исследованиях в различных областях знаний.

**Целью работы** является математическое описание пространственных течений жидкости в мембранных каналах прямоугольного поперечного сечения. Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

- Разработать модели и алгоритмы для описания гидродинамических процессов в мембранных каналах.
- Аналитически и численно исследовать гидродинамические характеристик течений в модулях мембранных аппаратов.
- Разработать методику расчета скорости жидкости в каналах мембранных элементов, а также массового расхода и перепада давления потока по каналу.

**Методы исследования.** Моделирование пространственной гидродинамики в проницаемых каналах мембранных установок основано на представлении задачи уравнениями в частных производных и последующей дискретизацией с использованием численных методов.

### **Достоверность результатов исследования.**

С целью подтверждения достоверности полученных результатов проводилась проверка выполнения закона сохранения массы. Ошибка составляла не более 1%.

Были проведены расчеты на последовательности сеток, которые показали хорошую аппроксимационную и итерационную сходимость.

Сравнение с результатами классических работ (Берман, Юань) для случая плоского приближения выявило отличие не более 0,1%.

Трудность проведения точных экспериментальных измерений кинематических и динамических характеристик позволяет сделать вывод только о качественном согласовании полученных в работе результатов протеканию реальных процессов в мембранных каналах.

### **Научная новизна:**

- Получены математические модели течения в проницаемых каналах мембранных элементов при равномерной подаче жидкости.
- Найдено аналитическое решение уравнений гидродинамики в случаях предельно высоких и предельно низких значений числа Рейнольдса для мембранных каналов прямоугольного и квадратного поперечного сечения.
- Реализован комплекс программ для ПЭВМ, позволяющий рассчитать кинематику течений в проницаемых каналах прямоугольного поперечного сечения.
- Разработана методика расчета средней скорости, массового расхода и перепада давления потока в мембранном канале.

**Практическая ценность** исследований состоит в том, что результаты работы могут быть использованы для моделирования гидродинамических процессов в проницаемых каналах мембранных элементов, при проектировании мембранной аппаратуры с целью оптимизации технологических процессов. Разработана методика, позволяющая рассчитать среднюю скорость, массовый расход и перепад давления потока по мембранному каналу. Результаты диссертационной работы внедрены на предприятиях ФГУП «Бийский олеумный завод» и ОАО «Полиэкс».

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Математические модели, предназначенные для описания трехмерных течений в мембранных каналах при равномерном распределении скорости проникания.
2. Результаты аналитического исследования гидродинамических характеристик потока в модулях мембранных аппаратов прямоугольного поперечного сечения.
3. Результаты численного моделирования течений в мембранных каналах прямоугольного и квадратного поперечного сечений.
4. Методика расчета средней скорости, массового расхода и перепада давления потока в мембранном канале.

**Апробация работы.** Основные положения диссертации докладывались на региональных научно-практических конференциях (Бийск, 1999, 2001); Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых «Материалы и технологии 21 века» (ФНППЦ «Алтай», Бийск, 2000); второй Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии в науке, проектировании и производстве» (НГТУ, Н. Новгород, 2000); второй Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии в экономике, науке и образовании» (Бийск, 2001); краевых конференциях по математике МАК 2000, 2001, 2002, 2003 (АГУ, Барнаул, 2000, 2001, 2002, 2003 гг.).

Данная работа выполнялась в рамках темы госбюджетного финансирования "Математическое моделирование сложных систем в наукоёмких технологиях" (№ Государственной регистрации 01970002259).

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 15 печатных работ.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы. Работа изложена на 118 страницах, содержит 34 рисунка, 3 таблицы, список литературы из 100 наименований.

**СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации и излагается краткое содержание работы.

**В первой главе** рассматриваются различные математические модели, описывающие течения жидкости в каналах мембранных установок, которые представляют собой каналы, разделенные проницаемой перегородкой, а также способы получения дискретного аналога исходного дифференциального уравнения и методы его решения. Данная глава содержит обзор работ, посвященных исследуемой проблеме.

Математическое моделирование мембранных процессов включает несколько этапов:

- разработку математической модели, которая представляет собой запись физического явления набором математических средств;
- разработку метода решения полученных уравнений.

Принципиальное сходство баромембранных процессов позволяет использовать для их описания одни и те же уравнения.

Основным подходом для описания течения жидкости является использование обобщенного дифференциального уравнения, имеющего следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\Phi) = \operatorname{div}(\Gamma_{\Phi} \cdot \operatorname{grad}(\Phi)) + S_{\Phi}, \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность,  $\Gamma_{\Phi}$  – коэффициент диффузии,  $\mathbf{u}$  – вектор скорости,  $\Phi$  – искомая переменная. Поле скорости должно удовлетворять уравнению неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0. \quad (2)$$

Определение полей скоростей и давления сводится к решению полной системы гидродинамических уравнений Навье-Стокса, которая получается из системы (1), если под функцией  $\Phi$  понимать составляющие вектора скорости, а под источником  $S_{\Phi}$  – градиент давления, взятый с противоположным знаком.

По используемому математическому аппарату методы ее решения делят на две группы: аналитические и численные. Однако в большинстве случаев рассмотренные методы применимы к решению одно- и двухмерных задач. Самыми универсальными, дающими наиболее полную информацию о параметрах течения являются трехмерные модели, однако, ввиду высокой сложности их практической реализации, а также больших временных затрат и вычислительных ресурсов, необходимых для проведения расчетов, их применение до настоящего времени является ограниченным. Число публикаций, посвященных применению аналитических методов расчета трехмерных течений в мембранных каналах также невелико, по сравнению с работами, описывающими те или иные упрощенные двухмерные модели. Таким образом, представляется важным создание трехмерных моделей течений, которые были бы эффективны для исследования гидродинамики в каналах мембранных установок.

**Во второй главе** для течения жидкости в мембранном канале с произвольной формой проходного сечения (рис. 1) построена математическая модель, основанная на использовании ряда упрощающих положений:

- движение жидкости является стационарным;
- плотность и вязкость жидкости являются величинами постоянными;

— движение жидкости имеет место в призматическом канале произвольного поперечного сечения, ось  $oz$  выбранной системы совпадает с осью канала.

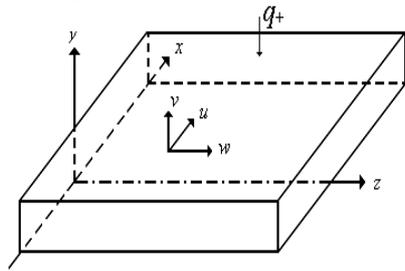


Рисунок 1 – Область течения

Для моделирования поля скорости используется система уравнений, содержащая уравнения неразрывности и гидродинамические уравнения вязкой несжимаемой жидкости, имеющая в безразмерных переменных вид:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{v} = 0, \\ (\bar{v} \nabla) \bar{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \bar{v}. \end{cases} \quad (3)$$

Граничные условия следующие:

на переднем конце канала  $\bar{v} = 0$ ,

на стенках канала  $\bar{v} = -\bar{n}$ .

(4)

Систему уравнений (3) и граничные условия приведены к безразмерному виду, нормируя координаты на некоторый характерный для задачи размер  $\tilde{L}$ , а скорость и давление по соотношениям:  $\bar{v} = \tilde{V} / q_+$ ,  $p = P / \rho q_+^2$ , где  $\tilde{V}(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$  – вектор скорости жидкости,  $\operatorname{div}$ ,  $\nabla$  – дифференциальные операторы дивергенции и Гамильтона,  $\rho$ ,  $P$ ,  $\mu$  – плотность, давление и эффективный коэффициент динамической вязкости жидкости соответственно,  $q_+$  – величина скорости протекания жидкости через стенки канала,  $\bar{n}$  – единичный вектор внешней нормали к стенкам канала,  $Re = \rho q_+ \tilde{L} / \mu$  – число Рейнольдса.

На основе опытных данных для достаточно длинных каналов со слабо меняющейся в продольном направлении геометрией поперечного сечения предполагается, что продольная компонента вектора скорости изменится по линейному закону вдоль оси канала

$$w = zW(x, y), \quad (5)$$

а распределение двух других компонент не зависит от координаты  $z$ , т.е.

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \quad (6)$$

Для распределения давления с учетом выражений (5) и (6) из системы (3) вытекает соотношение

$$p = p_0 - \frac{1}{2} c^2 z^2 - p_1(x, y). \quad (7)$$

Решение системы (3) зависит от величины числа Рейнольдса  $Re$ .

В случае предельно больших значений числа Рейнольдса ( $Re \rightarrow \infty$ ) вязкими членами системы (3) можно пренебречь и с учетом выражений (5), (6) и (7) моделирующая система принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + W = 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial p_1}{\partial x}, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial p_1}{\partial y}, \\ u \frac{\partial W}{\partial x} + v \frac{\partial W}{\partial y} + W^2 = c^2, \end{cases} \quad (8)$$

где  $p_0$  – значение давления в начале координат,  $c$ ,  $p_1(x, y)$  – некоторые неизвестные константа и функция, подлежащие определению.

Для целей численного решения сформулированной задачи получена дивергентная форма уравнений системы (8):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial u W}{\partial x} + \frac{\partial v W}{\partial y} + 2W^2 - c^2 = 0, \\ \frac{\partial u \omega}{\partial x} + \frac{\partial v \omega}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\omega \equiv -\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$  - компонента вектора завихренности по оси  $oz$ .

Граничными условиями для системы уравнений (9) являются следующие:  $q_n = -1$ ,  $W = 0$  (на контуре), граничные условия для  $\omega$  могут быть определены в процессе расчета.

На оси канала в любом его поперечном сечении  $W^2(0,0) = c^2$ , поэтому

$$W(x, y) = ch(x, y). \quad (9)$$

Для отыскания неизвестной функции  $h$  получено нелинейное дифференциальное уравнение

$$h \cdot h'^2 + h''(1 - h^2) = 0, \quad (10)$$

граничными условиями для которого являются следующие:

$$h(0) = 1, \quad h(F_0) = 0. \quad (11)$$

Уравнению (10) и граничным условиям (11) удовлетворяет решение вида

$$h = \cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{F}{F_0}. \quad (12)$$

Для параметра  $c$  найдено выражение через геометрические параметры задачи:

$$c = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Pi_0}{F_0}. \quad (13)$$

Таким образом показано, что при  $Re \rightarrow \infty$  величина неизвестного параметра  $c$  полностью и однозначно определяется через величину периметра  $\Pi_0$  и величину площади  $F_0$  поперечного сечения канала формулой (13). Полученный параметр позволяет установить взаимосвязь между потоками в проницаемых и непроницаемых каналах:

$$c = \frac{2\pi}{d_s},$$

где  $d_s$  – эквивалентный диаметр непроницаемых каналов.

Полученные результаты (12), (13) хорошо согласуются с известными для плоского и осесимметричного каналов.

Для плоских и осесимметричных течений в каналах с проницаемыми стенками характерно то, что профили компонент вектора скорости неизменны в широком диапазоне изменения значений числа Рейнольдса  $Re$  и выражаются соотношениями

$$v = -\frac{\Pi_0}{\Pi} \sin \frac{\pi}{2} \frac{F}{F_0}, \quad w = \frac{\pi \Pi_0}{2 F_0} \cos \frac{\pi}{2} \frac{F}{F_0}, \quad (14)$$

где  $\Pi_0$ ,  $F_0$  – периметр и площадь поперечного сечения канала. Это сделало возможным введение обобщенных координат  $(\sigma, \xi)$ , где  $\sigma = F / F_0$  – аналог площади, а  $\xi = \Pi / \Pi_0$  – безразмерный периметр для плоского или осесимметричного. С помощью обобщенных криволинейных координат в случае предельно высоких значений числа Рейнольдса получено автомодельное решение пространственной гидродинамической задачи. Показано, что известные решения для плоского и осесимметричного каналов являются частными случаями этого решения.

**Глава 3** посвящена исследованию гидродинамики в проницаемых каналах мембранных элементов прямоугольного поперечного сечения (рис.2).

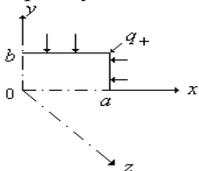


Рис. 2. Схема мембранного канала прямоугольного поперечного сечения

Исследуемое движение описывается системой уравнений (3), решением которой являются соотношения (4), (5). Для распределения давления получено выражение

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho w_{\max}^2 - p_1(x, y).$$

В безразмерных переменных система (3) имеет вид:

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} + W = 0, \\ \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta v \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha \frac{\partial p_1}{\partial x} + \text{Re}^{-1} \Delta u, \\ \alpha u \frac{\partial v}{\partial x} + \beta v \frac{\partial v}{\partial y} = \beta \frac{\partial p_1}{\partial y} + \text{Re}^{-1} \Delta v, \\ \alpha u \frac{\partial W}{\partial x} + \beta v \frac{\partial W}{\partial y} + W^2 = W_{\max}^2 + \text{Re}^{-1} \Delta W, \end{cases} \quad (15)$$

где  $\alpha = \frac{\tilde{L}}{a}$ ,  $\beta = \frac{\tilde{L}}{b}$ . Безразмерные переменные введены по соотношениям

$$\begin{aligned} \bar{V} &= (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}), \quad u = \tilde{u} / \tilde{q}_+, \quad v = \tilde{v} / \tilde{q}_+, \quad w = \tilde{w} / \tilde{q}_+, \\ x &= \tilde{x} / \tilde{L}, \quad y = \tilde{y} / \tilde{L}, \quad z = \tilde{z} / \tilde{L}, \quad p = \tilde{p} / (\tilde{\rho} \tilde{q}_+^2), \end{aligned}$$

где знаком "~" помечены размерные переменные,  $\tilde{L}$  – характерный линейный размер канала. В качестве  $\tilde{L}$  выбрано отношение площади канала к его периметру. Но  $\tilde{L}$  – масштаб лишь для координаты  $z$ . В качестве масштабов для координат  $x$  и  $y$  выбрана длина  $a$  и ширина  $b$  канала соответственно.

В случае, когда число Рейнольдса  $\text{Re} \rightarrow \infty$ , вязкими членами системы (17) можно пренебречь. Тогда, умножив ее второе уравнение на  $u$ , а третье на  $v$ , а затем их сложив, будем иметь:

$$\alpha u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \beta v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right) = \alpha u \frac{\partial p_1}{\partial x} + \beta v \frac{\partial p_1}{\partial y},$$

откуда

$$p_1 = \frac{1}{2} (u^2 + v^2).$$

Заметим, что эта формула справедлива для любых  $\alpha$  и  $\beta$ , в том числе для  $\alpha = \beta$ , то есть для канала с квадратным поперечным сечением.

При малых значениях числа Рейнольдса ( $\text{Re} \rightarrow 0$ ) для проницаемого канала квадратного поперечного сечения  $\alpha = \beta = 1/2$  и моделирующая система (15) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} + W = 0, \\ -\text{Re} \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ -\text{Re} \frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \text{Re} \left( \frac{1}{2} u \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{2} v \frac{\partial W}{\partial y} + W^2 - W_{\max}^2 \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right). \end{cases} \quad (16)$$

Граничные условия следующие:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, \quad u(1, y) = -1, \\ v(x, 0) &= 0, \quad v(x, 1) = -1. \end{aligned}$$

Пусть  $W_{\max} = C$ . Так как число Рейнольдса  $\text{Re} \rightarrow 0$ , то последнее уравнение системы (16) равносильно системе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \\ C^2 = \frac{1}{2} \left( u \frac{\partial W}{\partial x} + v \frac{\partial W}{\partial y} \right) + W^2. \end{cases} \quad (17)$$

Используя метод разделения переменных в силу симметрии течения, найдено автомодельное решение поставленной задачи в виде

$$\begin{aligned}
 u &= -4x(1-x/2)(1-y), \\
 v &= -4y(1-x)(1-y/2), \\
 w &= 4z(1-x)(1-y), \\
 C^2(x, y) &= 4\left(2(1-x)^2(1-y)^2 + (1-x)^2 + (1-y)^2\right).
 \end{aligned}$$

Далее, зная функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , из второго и третьего уравнения системы (16) получена зависимость для распределения давления внутри канала.

$$p = p_0 - \frac{1}{2} z^2 C^2 - \frac{1}{\text{Re}} 2(1-x)(1-y).$$

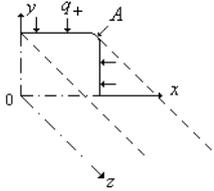


Рис. 3. Схема пронцаемого канала квадратного поперечного сечения

С целью анализа кинематической структуры течения рассмотрим его часть в окрестности угла А для канала квадратного поперечного сечения (рис. 3). Для этого введем новую система координат, расположив угол в ее начале. Предполагается, что в окрестности угла есть бесконечно малое скругление.

В случае больших чисел Рейнольдса ( $\text{Re} \rightarrow \infty$ ) в окрестности угла компоненты вектора скорости  $u \sim v \sim 1$ ,  $w \sim 0$ . Тогда последнее уравнение системы (17) для мембранного канала квадратного поперечного сечения, примет вид:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \approx C^2. \quad (18)$$

Продифференцируем (18) по  $x$  и  $y$  и найдем разность полученных выражений:

$$W''_{xx} - W''_{yy} = 0. \quad (19)$$

В силу симметрии течения относительно диагонали АО, используя метод разделения переменных, решение уравнения (21) искалось в виде

$$W = X(x) \cdot Y(y). \quad (20)$$

Показано, что

$$W = \pi \cos \left( \frac{\pi}{2} x \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} y \right) \quad (21)$$

Зависимость (21) является приближенным решением уравнения (18) и точным решением уравнения (20). Но эта зависимость позволяет судить о трансформации линий тока в окрестности угла.

Пусть  $W \in [0, c)$  - где  $c$  - параметр, тогда из (21)

$$y = (2/\pi) \arccos \left( W / (\pi \cdot \cos(\pi x / 2)) \right).$$

Рассмотрев уравнения изолиний  $W = const$  из указанной области определения, получим следы линий тока в окрестности угла на поверхности  $z = const$ , показанные на рисунке 4.

При малых значениях числа Рейнольдса ( $\text{Re} \rightarrow 0$ ) четвертое уравнение системы (15) примет вид:

$$W''_{xx} + W''_{yy} = 0. \quad (22)$$

Его решением является функция

$$W = X \cdot Y = \alpha_0^2 xy.$$

Тогда уравнения изолиний  $W = const$  имеют вид:

$$y = \frac{W}{\alpha_0^2 x}.$$

Картина изолиний изображена на рисунке 4 б.

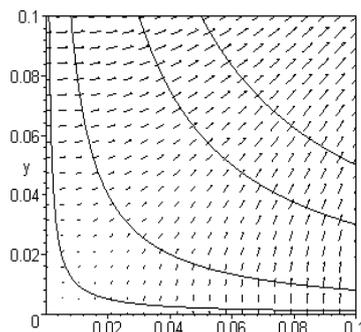
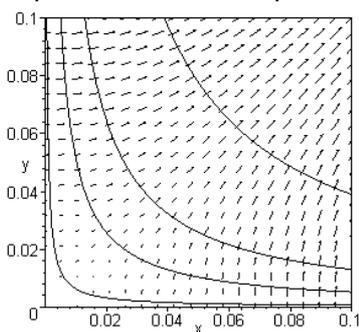


Рис. 4. Картина изолиний  $W=const$  при  $Re \rightarrow \infty$

Рис. 5. Картина изолиний  $W=const$  при  $Re \rightarrow 0$

Как следует из рисунков 3,а и 3,б, картина изолиний  $W=const$  двух рассмотренных режимов течения качественно похожи. Кроме того, если вблизи начала координат форма изолиний близка к очертаниям угла, то по мере удаления контуры  $W=const$  более напоминают дуги окружностей. Поэтому можно предполагать, что вблизи центра канала течение стремится к осесимметричному. Тогда для решения поставленной задачи можно применить уточняющий алгоритм Регирера, работоспособность которого при получении осесимметричного решения показывает, что с его помощью могут быть получены и соответствующие решения пространственной задачи для случая, когда число Рейнольдса  $Re \ll 1$ , например, для каналов, образующая которых является прямой линией, а поперечное сечение представляет собой прямоугольник.

Далее рассматриваются течения в напорном канале мембранной установки, образующая которой является прямой линией, а поперечное сечение представляет собой прямоугольник. Течения образованы подачей жидкости со скоростью  $q_+ = const$ .

Для описания данного течения рассматривается слой толщиной  $\Delta z \ll 1$  (рис. 6).

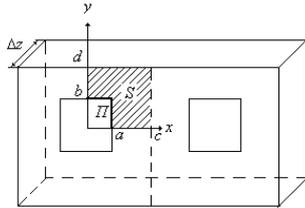


Рис. 6. Схема поперечного сечения канала толщиной  $\Delta z$

Так как  $\Delta z \ll 1$ , то вращение частиц жидкости вокруг оси  $oz$  отсутствует, течение можно считать потенциальным. Для описания потенциального течения достаточно рассмотреть уравнение неразрывности. Проведя осреднение по ширине канала  $\Delta z$  компонентов вектора скорости, а затем, проинтегрировав уравнение неразрывности по длине канала, получим

$$\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{b} \frac{\partial v}{\partial y} = - \left( \frac{\Pi}{S} \right). \quad (23)$$

В силу потенциальности поля скорости можно ввести скалярную функцию  $\varphi$  - потенциал скорости, такую, что

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Тогда вместо выражения (23) получим уравнение

$$\frac{1}{a} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{b} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = - \left( \frac{a+b}{ab} \right). \quad (24)$$

Граничные условия для поставленной задачи следующие: на внешних стенках канала:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{для } x \in (0, c), \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{для } y \in (0, d);$$

на внутренних стенках канала:

$$u = -1 \quad \text{для } y \in (0, b), \quad v = -1 \quad \text{для } x \in (0, a);$$

на оси симметрии  $ox$ :  $u = 0$  для  $x \in (a, c)$ ;

на оси симметрии  $oy$ :  $v = 0$  для  $y \in (b, d)$ .

Решение задачи (24) проводилось конечно - разностным методом Гаусса-Зейделя. Расчетный алгоритм реализован в виде программы на алгоритмическом языке MAPLE 6, который позволяет достаточно просто визуализировать полученные решения.

На рисунке 7 показана типичная картина течения в рассматриваемом канале.

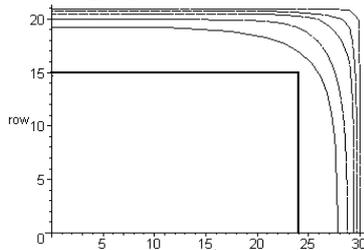


Рис. 7. Картина изолиний в напорном канале мембранной установки

В ходе численного эксперимента были проведены расчеты на последовательности сеток, которые показали хорошую аппроксимационную и итерационную сходимость. Показано, что линейные размеры напорного канала мембранной установки прямоугольного поперечного сечения не оказывают влияния на распределение скорости в напорном канале и структура:

течения качественно одинакова форма линий тока вблизи внешней границы близка к ее очертаниям, по мере удаления к центру принимают более сглаженный вид.

Далее рассмотрена задача о течении жидкости в дренажном канале квадратного поперечного сечения. Такое течение описывается системой уравнений (15). В размерных переменных ее решение имеет вид (5), (6). Тогда, если число Рейнольдса  $Re \rightarrow 0$ , то получим следующую модель:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \\ W = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Первое и второе уравнение полученной модели представляют собой уравнения Лапласа для  $u$  и  $v$  компонент вектора скорости, каждое из которых решено методом Гаусса-Зейделя. По найденным значениям  $u$  и  $v$  из третьего уравнения системы найдена  $W$  – составляющая вектора скорости. Результаты решения приведены на рисунках 8–10.

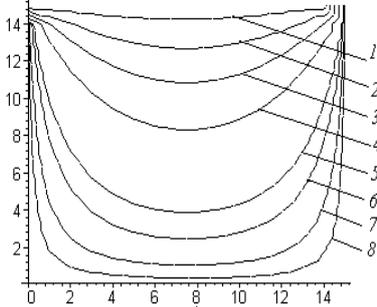


Рис. 8. Картина изолиний для  $v$ -составляющей вектора скорости дренажного канала: 1 -  $v=-1$ , 2 -  $v=-0,7$ , 3 -  $v=-0,5$ , 4 -  $v=-0,3$ , 5 -  $v=-0,1$ , 6 -  $v=-0,06$ , 7 -  $v=-0,02$ , 8 -  $v=-0,009$

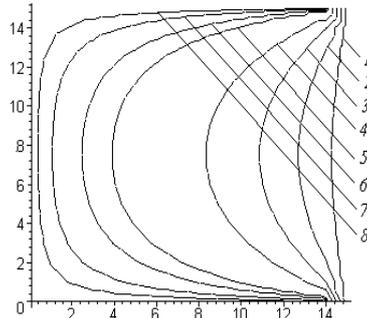


Рис. 9. Картина изолиний для  $u$ -составляющей вектора скорости дренажного канала: 1 -  $u=-1$ , 2 -  $u=-0,7$ , 3 -  $u=-0,5$ , 4 -  $u=-0,3$ , 5 -  $u=-0,1$ , 6 -  $u=-0,06$ , 7 -  $u=-0,02$ , 8 -  $u=-0,009$

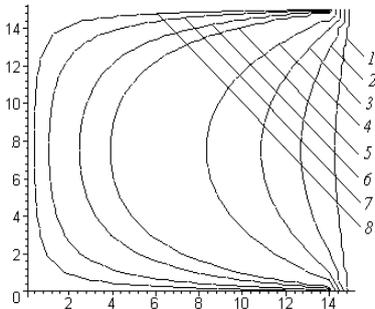


Рис. 10. Картина изолиний для  $W$ -составляющей вектора скорости дренажного канала: 1 -  $W=1$ , 2 -  $W=0,7$ , 3 -  $W=0,5$ , 4 -  $W=0,3$ , 5 -  $W=0,1$ , 6 -  $W=0,06$ , 7 -  $W=0,02$ , 8 -  $W=0,009$

В качестве примера приведены результаты расчета в виде профилей компонент вектора скорости для канала с квадратным поперечным сечением (рис. 11–13) и канала с прямоугольным сечением при отношении ширины к длине 1:10 (рис. 14–16).

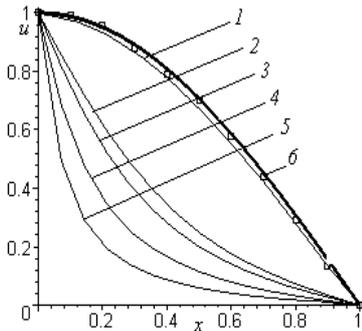


Рис. 11. Профили  $u$ -компоненты вектора скорости в сечениях: 1 -  $y=0$ ; 2 -  $y=0,2$ ; 3 -  $y=0,4$ ; 4 -  $y=0,6$ ; 5 -  $y=0,8$  в квадратном дренажном канале

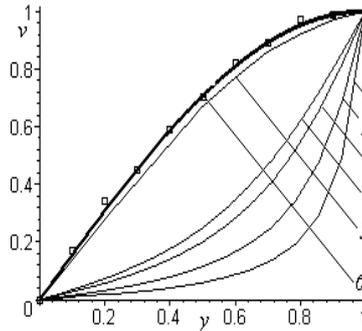


Рис. 12. Профили  $v$ -компоненты вектора скорости в сечениях: 1- $x=0$ ; 2 -  $x=0,2$ ; 3- $x=0,4$ ; 4 -  $x=0,6$ ; 5 -  $x=0,8$  в квадратном дренажном канале

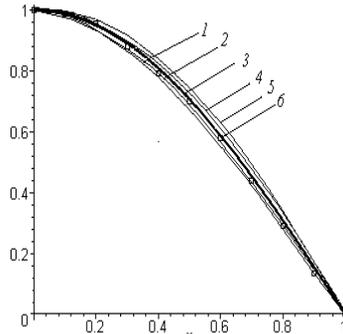


Рис. 13. Профили  $w$ -компоненты вектора скорости в сечениях: 1 -  $z=0$ ; 2 -  $z=0,2$ ; 3 -  $z=0,4$ ; 4 -  $z=0,6$ ; 5 -  $z=0,8$  в квадратном дренажном канале

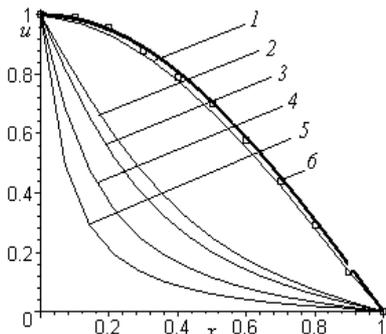


Рис. 14. Профили  $u$ -компоненты вектора скорости в сечениях: 1- $y=0$ ; 2 -  $y=0,2H$ ; 3- $y=0,4H$ ; 4 -  $y=0,6H$ ; 5 -  $y=0,8H$  в прямоугольном дренажном канале.

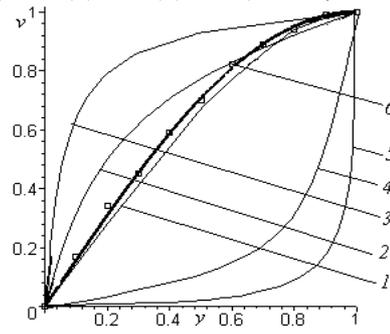


Рис. 15. Профили  $v$ -компоненты вектора скорости в сечениях: 1- $x=0$ ; 2 -  $x=2H$ ; 3- $x=4H$ ; 4 -  $x=6H$ ; 5 -  $x=8H$  в прямоугольном дренажном канале

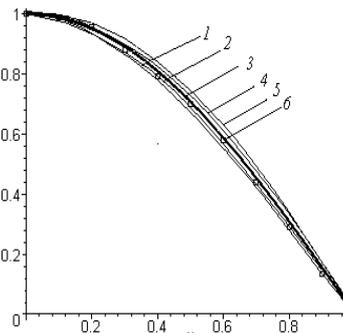


Рис. 16. Профили  $w$ -компоненты вектора скорости в сечениях: 1 -  $z=0$ ; 2 -  $z=0,2$ ; 3 -  $z=0,4$ ; 4 -  $z=0,6$ ; 5 -  $z=0,8$  в квадратном дренажном канале

По результатам исследований разработана методика расчета средней скорости, массового расхода и перепада давления по мембранному каналу, которая применена для расчета реальной установки.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ПО РАБОТЕ

1. Рассмотрены особенности решения пространственных задач гидродинамики каналов мембранных установок. Исследована трехмерная структура потоков рабочей среды в каналах мембранных установок, позволяющая оптимизировать геометрические и расходные характеристики мембранных каналов.

2. Разработана конструкция мембранного элемента, обеспечивающего увеличение производительности мембранной установки на 15–20%.
3. Для случая предельно высоких значений числа Рейнольдса ( $Re \rightarrow \infty$ ) сформулирована автомодельная пространственная задача гидродинамики для мембранного канала и найдено ее решение в аналитическом виде. В процессе решения определен характерный для мембранных каналов параметр, позволяющий установить взаимосвязь между потоками в проницаемых и непроницаемых каналах. Найденное аналитическое решение хорошо согласуется с известными зависимостями для плоского и осесимметричного каналов.
4. В случае предельно низких значений числа Рейнольдса ( $Re \rightarrow 0$ ) проведен анализ зависимости кинематики и динамики движения жидкости в мембранном канале от вязкости. Показано, что кинематика течения не зависит от вязкости, а динамика – зависит.
5. С помощью обобщенных координат в случае предельно высоких значений числа Рейнольдса ( $Re \rightarrow \infty$ ) получено автомодельное решение. Показано, что известные решения для плоского и осесимметричного каналов являются частными случаями этого решения.
6. Исследованы трехмерные течения жидкости в каналах мембранных установок прямоугольного и квадратного поперечного сечений на основе уравнений гидродинамики. В случае предельно низких значений числа Рейнольдса ( $Re \rightarrow 0$ ) найдены решения задачи, используя метод разделения переменных.
7. Проведен анализ кинематической структуры течения для канала квадратного поперечного сечения. Показано, что вязкие силы действуют вблизи угла канала. Ядро течения является практически осесимметричным.
8. Для случая предельно низких значений числа Рейнольдса численными методами решена задача движения жидкости в дренажном канале мембранной установки. Изучена структура течения - построены картины изолиний для составляющих вектора скорости.
9. Исследовано течение жидкости в напорном канале мембранной установки, образующая которой является прямой линией, а поперечное сечение представляет собой прямоугольник. Показано, что геометрические размеры канала не влияют на структуру течения.
10. Получена зависимость для распределения давления в мембранных каналах.
11. На основе исследований гидродинамики потоков разработана методика, позволяющая рассчитать среднюю скорость, массовый расход и перепад давления среды в мембранном канале.  
Полученные данные могут быть использованы при проектировании мембранной аппаратуры с целью оптимизации технологических процессов.

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Спиридонов Ф.Ф., Китаева Л.В. Пространственная гидродинамика мембранных установок // Наука и технологии: реконструкция и конверсия предприятий: Материалы региональной научно-практической конференции. - Бийск: АлтГТУ, 1999.- С. 261-266.
2. Китаева Л.В., Спиридонов Ф.Ф. Анализ обобщенных решений для каналов со вдувом // Материалы и технологии XXI века: Материалы докладов I Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых. - Бийск: Москва, ЦЭИ "Химмаш", 2000 г. - С. 32-33.
3. Китаева Л.В., Спиридонов Ф.Ф. О трехмерных течениях в каналах мембранных установок // Третья краевая конференция по математике: Материалы конференции. - Барнаул: АГУ, 2000. – С.21-22.
4. Спиридонов Ф.Ф., Китаева Л.В. Анализ трехмерных течений в каналах мембранных установок сечения в форме квадрата // Информационные технологии в науке, проектировании и производстве: Тезисы докладов второй Всероссийской научно-технической конференции (Computer-Based Conference). Часть IV. – Н. Новгород: НГТУ, 2000. – С. 17-18.
5. Спиридонов Ф.Ф., Китаева Л.В. О вязких трехмерных течениях в каналах мембранных установок // Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях: Межвузовский сборник. - Бийск: АлтГТУ, 2000.- С. 60-64.
6. Спиридонов Ф.Ф., Китаева Л.В. Пространственная гидромеханика мембранных установок // Горизонты образования. – 2000. - №4 - <http://edu.secna.ru>. – 6 с.
7. Спиридонов Ф.Ф., Китаева Л.В. Анализ кинематической структуры течения в окрестности пронизаемого угла для каналов квадратного поперечного сечения // Горизонты образования. – 2001, - №1 - <http://edu.secna.ru>. – 6 с.
8. Китаева Л.В., Спиридонов Ф.Ф. Исследование трехмерных течений в каналах мембранных установок квадратного и прямоугольного поперечного сечения // Четвертая краевая конференция по математике: Материалы конференции. - Барнаул: АГУ, 2001. – С.20-21.
9. Китаева Л.В., Спиридонов Ф.Ф. О гидродинамике пространственных вязких течений в мембранных каналах // Ресурсосберегающие технологии в машиностроении: Материалы межрегиональной научно-практической конференции. - Бийск: АлтГТУ, 2001.- С. 116-118.
10. Китаева Л.В., Спиридонов Ф.Ф. Анализ зависимости давления от координат в каналах мембранных установок // Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях: Межвузовский сборник. - Бийск: АлтГТУ, 2001.- С. 158-164.
11. Китаева Л.В., Спиридонов Ф.Ф. Анализ структуры течений в каналах мембранных установок квадратного поперечного сечения // Информационные технологии в экономике, науке и образовании: Материалы 2-ой всероссийской научно-практической конференции. - Бийск: АлтГТУ, 2001.- С. 63-68.
12. Китаева Л.В., Спиридонов Ф.Ф. О гидродинамике трехмерных вязких течений в каналах мембранных установок квадратного поперечного сечения // Пятая краевая конференция по математике: Материалы конференции. - Барнаул: АГУ, 2002. – С. 20-21.
13. Китаева Л.В., Спиридонов Ф.Ф. Моделирование течений в мембранных каналах прямоугольного поперечного сечения // Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях: Межвузовский сборник. - Бийск: АлтГТУ, 2002.- С. 158-164.
14. Китаева Л.В., Спиридонов Ф.Ф. О трехмерных течениях жидких сред в мембранных каналах // Шестая краевая конференция по математике: Материалы конференции. - Барнаул: АГУ, 2002. – С.20-21.
15. Светлов С.А., Спиридонов Ф.Ф. Китаева Л.В. Закономерности течения жидких сред в пронизаемых каналах // Ползуновский вестник. - 2003. – №1-2. – С.53-60.
16. Китаева Л.В., Светлов С.А., Спиридонов Ф.Ф. Моделирование трехмерных течений жидких сред в пронизаемых каналах мембранных установок // Ползуновский вестник (в печати).
17. Светлов С.А., Спиридонов Ф.Ф. Китаева Л.В. Моделирование течения жидкости в мембранных каналах. М.: ТОХТ (в печати).