На правах рукописи

Колоусов Денис Васильевич

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПОТОКОВ В СЕТЯХ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА

05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2004

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Назаров Анатолий Андреевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Воробейчиков Сергей Эрикович,

кандидат физико-математических наук, доцент
Змеева Елена Евдокимовна

Ведущая организация: Томский политехнический университет

Защита состоится:
18 ноября 2004 г. в 14.30 часов на заседании диссертационного совета Д 212.267.08 при Томском государственном университете по адресу:
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Томского государственного университета

Автореферат разослан «5_» октября 2004г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор технических наук, доцент А.В. Скворцов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. В последние полтора десятилетия идет активное развитие сетей связи случайного множественного доступа, обусловленное повышенной потребностью в высокоскоростных каналах передачи данных. Данный процесс связан с продолжающимся технологическим развитием и повышением темпов жизни. Развитие и повсеместное внедрение сети Internet также влияет на потребность в высокоскоростных каналах, обеспечивающих передачу больших объемов информации за максимально короткое время. В связи с этим становится важной задача модернизации существующих сетей связи. При модернизации и оптимизации сетей связи наиболее действенным инструментом является математическое моделирование. Конечно, для анализа существующих сетей возможно использование различных анализаторов протоколов, которые позволяют получить некоторые вероятностно–временные характеристики сети связи, однако, данные анализаторы никоим образом не смогут объяснить природу того или иного наблюдаемого явления. В данных случаях, необходимо использовать средства моделирования, с помощью которых, по результатам наблюдения за выходящими потоками, и проводится всесторонний анализ сетей связи. В настоящее время методы моделирования и анализа наиболее широко применяются к сетям с протоколами случайного множественного доступа. Вопросам анализа сетей связи и протоколов случайного множественного доступа посвящены работы Башарина Г.П., Бочарова П.П., Фалина Г.И., Степанова С.Н, Дудина А.Н., Клименок В.И., Назарова А.А., Хомичкова И.И., Одышева Ю.Д., Шохора С.Л., Кузнецова Д.Ю. и др.

Очевидно, что тема работы по исследованию математических моделей выходящих потоков сетей связи с протоколами случайного множественного доступа является актуальной на сегодняшний день.

Целью работы является исследование математических моделей потоков в сетях связи, управляемых протоколами случайного множественного доступа с оповещением о конфликте. Знание распределения вероятностей состояний системы, вида распределения и параметров распределения вероятностей выходящего потока позволяет находить, оценивать и анализировать параметры входящего потока и эффективность работы существующей сети связи.

Очевидно, что возникает вопрос, что мы понимаем под потоком? Под потоком мы понимаем случайный поток однородных событий, который может задаваться одним из трех способов:

1) $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ — последовательностью моментов наступления событий;
2) $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ — длинами интервалов между моментами наступления событий;
3) $n(t)$ — числом событий, наступивших за время t.

В данной работе используется третий способ задания потоков.

Таким образом, при проведении исследования математических моделей потоков были поставлены следующие задачи:

1) построение математических моделей потоков в сетях связи, управляемых протоколом случайного множественного доступа с оповещением о конфликте;
2) применение численных, аналитических методов и методов имитационного моделирования исследования потоков марковских сетей связи с использованием аппарата теории вероятностей и теории массового обслуживания;
3) построение оценок параметра λ входящего потока и нормированного асимптотического среднего значения b числа заявок находящихся в ИПВ по результатам наблюдений за выходящими потоками сети связи;
4) доказательство независимости распределения вероятностей состояния системы, вида распределения и параметров распределения вероятностей выходящего потока от вида распределения длительности задержки заявки в ИПВ перед повторным обращением на обслуживающий прибор;
5) исследование влияния явления бистабильности сети на структуру потока.

Методика исследований. Исследование математических моделей потоков в сетях связи случайного множественного доступа проводилось с использованием аппарата теории вероятностей, теории случайных процессов, теории массового обслуживания, теории статистического анализа, асимптотического анализа марковизируемых систем.

Научная новизна и результаты, выносимые на защиту. Определяя случайный поток однородных событий как случайный процесс изменения числа событий, наступивших за время t, получены следующие результаты:

1) показано, что выходящие потоки в марковских моделях сетей связи являются компонентами многомерных марковских процессов;
2) впервые предложен метод асимтотического анализа потоков в сетях связи случайного множественного доступа;
3) показана асимптотическая нормальность исследуемых потоков в моделях:
   (a) сети связи, управляемой динамическим протоколом случайного множественного доступа;
   (b) сети связи с конечным и бесконечным числом станций, управляемой статическим протоколом случайного множественного доступа;
4) доказана асимптотическая нормальность двумерного выходящего потока сети связи с конечным числом станций, найдена в явном виде матрица ковариаций данного потока;
5) показано существование явления бистабильности в потоках сетей связи, управляемых статическим протоколом случайного множественного доступа для конечного числа абонентских станций;

6) получены оценки параметров сети по наблюдениям за выходящими потоками, доказана их асимптотическая несмещенность и состоятельность.

Теоретическая ценность работы заключается в том, что проведено аналитическое и численное исследование математических моделей потоков сетей связи случайного множественного доступа с конечным и бесконечным числом абонентских станций, с оповещением о конфликте. На основе полученных данных построены оценки параметров сети связи по наблюдениям за выходящими потоками. Обоснована корректность математического аппарата статистического анализа оценок параметров сети связи по наблюдениям за выходящими потоками. Показана непротиворечивость полученых данных гипотезе об инвариантности распределения вероятностей состояния системы, вида распределения и параметров распределения вероятностей выходящего потока к виду распределения длительности задержки заявки в ИПВ в условиях большой задержки.

Практическая ценность работы состоит в том, что результаты, полученные в работе, могут быть применены для анализа реальных сетей связи, определения состояния и параметров данных сетей по наблюдениям за выходящими потоками, а также при проектировании новых сетей.

Апробация работы. Основные положения диссертации и отдельные ее результаты докладывались и обсуждались:

1) на Всероссийской конференции "Новые технологии и комплексные решения: наука, образование и производство", (г. Анжеро–Судженск, 2001 г.);
2) на IV Всероссийской конференции "Новые информационные технологии в исследовании сложных стуктур"(г. Томск, 2002 г.);
3) на Всероссийской научно-практической конференции "Информационные технологии и математическое моделирование"(г. Анжеро–Судженск, 2002 г.);
4) на международной научной конференции "Современные математические методы анализа и оптимизации телекоммуникационных сетей", (г. Минск, 2003 г.);
5) на научных семинарах кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета 2001–2004 гг.

Публикации. По материалам данной работы опубликовано 7 печатных работ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы из 126 наименований. Объем диссертации составляет 141 страниц, в том числе: основной текст — 129 стр.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, изложена цель исследования, научная новизна, теоретическая и практическая ценность результатов, методика исследования, сделан обзор литературы.

В первой главе исследуются потоки успешно обслуженных заявок — $n(t)$ и заявок, выходящих из ИПВ — $s(t)$, сети связи, управляемой динамическим протоколом случайного множественного доступа с оповещением о конфликте.

В разделе 1.1 доказывается асимптотическая, при $T \to \infty$ (T — длина интервала наблюдения), нормальность потока $n(t)$ успешно обслуженных заявок, находятся параметры распределения.

В качестве математической модели сети связи, управляемой динамическим протоколом случайного множественного доступа с оповещением о конфликте, предлагается однолинейная СМО, обслуживающий прибор которой может находиться в одном из трех состояний: $k = 0$, если он свободен; $k = 1$, когда он занят обслуживанием заявки; $k = 2$, когда в сети реализуется этап оповещения о конфликте. Заявка, заставшая в момент поступления прибор свободным, начинает немедленно обслуживаться. Если за время обслуживания другие требования не поступали, то исходная заявка по завершении обслуживания покидает систему, попадая в выходящий поток $n(t)$ успешно обслуженных заявок. Если во время обслуживания одной заявки поступает другая, то они вступают в конфликт. От этого момента начинается этап оповещения о конфликте. Заявки, попавшие в конфликт, а также поступившие на интервале оповещения о конфликте, переходят в источник повторных вызовов(ИПВ), из которого вновь обращаются к прибору с попыткой повторного обслуживания.

Число заявок в ИПВ обозначим i. Повторное обращение происходит после случайной задержки, продолжительность которой случайная и характеризуется тем, что вероятность окончания задержки за бесконечно малый интервал $(t, t+\triangle t)$ составляет $\frac{\sigma}{i}\triangle t + o(\triangle t)$. Будем считать, что на вход системы поступает простейший поток с параметром λ. Время обслуживания заявки, имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Длины интервалов оповещения о конфликте, также имеют экспоненциальное распределение с параметром μ_1.

Для исследования математической модели выходящего потока сети связи введем вероятности $P_k(i,n,t) = P(k(t) = k, i(t) = i, n(t) = n)$. Автором показано, что $P_k(i,n,t)$ удовлетворяют следующей системе дифференциально–разностных уравнений:

$$\frac{\partial P_0(i,n,t)}{\partial t} = \mu P_1(i,n-1,t) + \mu_1 P_2(i,n,t) - (\lambda+\sigma)P_0(i,n,t),$$
$$\frac{\partial P_1(i,n,t)}{\partial t} = \lambda P_0(i,n,t) + \sigma P_0(i+1,n,t) - (\lambda+\sigma+\mu)P_1(i,n,t),$$

$$\frac{\partial P_2(i,n,t)}{\partial t} = \sigma P_1(i-1,n,t) + \lambda P_1(i-2,n,t) + \lambda P_2(i-1,n,t) - $$
$$-(\lambda+\mu_1)P_2(i,n,t).$$

Исследование данной системы проводится методом асимптотического анализа в условиях длительного времени наблюдения за системой ($T \to \infty$), для чего выполняется замена вида:

$$\frac{1}{T} = \delta^2, t\delta^2 = \tau, n\delta^2 = x(\tau) + \delta y, \frac{1}{\delta}P_k(i,n,t) = F_k(i,y,\tau,\delta).$$

Здесь $x(\tau)$ имеет смысл асимптотического среднего значения нормированного числа успешно обслуженных заявок за время $\tau = t\delta^2$.

В диссертации доказана следующая теорема:

Теорема 1.1 *Асимптотическое среднее $x(\tau)$ числа успешно обслуженных заявок имеет вид*

$$x(\tau) = \lambda\tau.$$

Распределение $F(y,\tau)$, величины отклонения нормированного числа успешно обслуженных заявок за время τ от асимптотичекского среднего, удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка вида

$$\frac{\partial F(y,\tau)}{\partial \tau} = L\frac{\partial^2 F(y,\tau)}{\partial y^2}.$$

L — константа, вид которой приведен в тексте диссертации.

Данная теорема применяется для доказательства асимптотической нормальности выходящего потока успешно обслуженных заявок — $n(t)$. Поскольку нормированным решением уравнения Фоккера–Планка является плотность нормального распределения с нулевым средним и дисперсией равной $2L\tau$, то переходя к $n(t)$, на основе выполненой замены и вида $x(\tau)$ можно сделать вывод, что выходящий поток успешно обслуженных заявок имеет нормальное распределение с параметрами

$$n(t) \sim N(\lambda t, 2Lt).$$

Более того, можно сформулировать и доказать следующее утверждение

Следствие 1.1.1 *Процесс* $\frac{n(\tau T)}{T} = x(\tau) + \frac{1}{\sqrt{T}}y(\tau)$ *является диффузионным процессом арифметического броуновского движения.*

В разделе 1.2 доказывается асимптотическая, при $T \to \infty$, нормальность потока $s(t)$ заявок, выходящих из ИПВ. Находятся параметры этого распределения.

Аналогично результатам раздела 1.1 показано, что при $T \to \infty$ имеет место асимптотическая эквивалентность

$$s(t) \sim N\left(\sigma\left(1 - \frac{\lambda+\mu}{\mu}R_0(0)\right)t, 2Qt\right),$$

где $Q, R_0(0)$ — константы, вид которых приведен в диссертации.

Сформулировано и доказано следующее утверждение:

Следствие 1.2.1 *Процесс* $\frac{s(\tau T)}{T} = x(\tau) + \frac{1}{\sqrt{T}}y(\tau)$ *является диффузионным процессом арифметического броуновского движения.*

Во второй главе исследуются потоки успешно обслуженных заявок — $n(t)$, сигналов оповещенея о конфликте — $s(t)$, двумерного потока успешно обслуженных заявок и сигналов оповещения о конфликте — $\{n(t), s(t)\}$ сети связи с конечным числом абонентских станций, управляемой статическим протоколом. Рассматривается, возникающее в потоках, явление бистабильности, определяется время стабильного функционирования.

В разделе 2.1 доказывается асимптотическая, при $T \to \infty$, нормальность потока $n(t)$ успешно обслуженных заявок. В асимптотике, при $N \to \infty$, находятся в явном виде параметры распределения.

В качестве математической модели сети связи с конечным числом абонентских станций, управляемой статическим протоколом случайного множественного доступа, предлагается однолинейная СМО с N внешними источниками заявок(АС–абонентскими станциями) и ИПВ. Отличие рассматриваемой СМО от модели первой главы заключается в том, что повторное обращение происходит после случайной задержки, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром $\frac{\sigma}{N}$. Будем считать, что обращение каждой АС к серверу происходит через случайный интервал времени, распределенный по экспоненциальному закону с одинаковым для всех станций параметром $\frac{\lambda}{N}$.

Введя вероятности $P_k(i,n,t)$ аналогично разделу 1.1, показано, что данные вероятности удовлетворяют системе дифференциально–разностных уравнений:

$$\frac{\partial P_0(i,n,t)}{\partial t} = \mu P_1(i,n-1,t) + \mu_1 P_2(i,n,t) - (\lambda\frac{N-i}{N} + \sigma\frac{i}{N})P_0(i,n,t),$$
$$\frac{\partial P_1(i,n,t)}{\partial t} = \lambda\frac{N-i}{N}P_0(i,n,t) + \sigma\frac{i+1}{N}P_0(i+1,n,t) - $$
$$-(\lambda\frac{N-i-1}{N} + \sigma\frac{i}{N} + \mu)P_1(i,n,t),$$
$$\frac{\partial P_2(i,n,t)}{\partial t} = \sigma\frac{i-1}{N}P_1(i-1,n,t) + \lambda\frac{N-i+1}{N}P_1(i-2,n,t) + $$
$$+\lambda\frac{N-i+1}{N}P_2(i-1,n,t) - (\lambda\frac{N-i}{N} + \mu_1)P_2(i,n,t).$$

Исследование проводится методом асимптотического анализа в условиях длительного времени наблюдения за системой ($T \to \infty$), для чего выполняется замена вида:

$$\frac{1}{T} = \delta^2, t\delta^2 = \tau, n\delta^2 = x(\tau) + \delta y_1, \frac{1}{\delta}P_k(i,n,t) = F_k(i,y_1,\tau,\delta).$$

В диссертации доказана следующая теорема:

Теорема 2.1 *Асимптотическое среднее $x(\tau)$ числа успешно обслуженных заявок имеет вид*

$$x(\tau) = \mu P_1 \tau.$$

Распределение $F(y_1, \tau)$, величины отклонения нормированного числа успешно обслуженных заявок за время τ от асимптотического среднего, удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка вида

$$\frac{\partial F(y_1,\tau)}{\partial \tau} = \mu(P_1\varphi + \frac{P_1}{2} - \varphi_1)\frac{\partial^2 F(y_1,\tau)}{\partial y_1^2},$$

где $P_k = \sum_i P_k(i)$, а $P_k(i)$ определяются как решение системы

$$\begin{aligned}
&(\lambda\frac{N-i}{N} + \sigma\frac{i}{N})P_0(i) = \mu P_1(i) + \mu_1 P_2(i),\\
&(\lambda\frac{N-i-1}{N} + \sigma\frac{i}{N} + \mu)P_1(i) = \lambda\frac{N-i}{N}P_0(i) + \sigma\frac{i+1}{N}P_0(i+1),\\
&(\lambda\frac{N-i}{N} + \mu_1)P_2(i) = \sigma\frac{i-1}{N}P_1(i-1) + \lambda\frac{N-i+1}{N}P_1(i-2) +\\
&+ \lambda\frac{N-i+1}{N}P_2(i-1).
\end{aligned}$$

Данная система с учетом краевых условий при $i = 0, 1, 2, N-1, N$ и условия нормировки, решается численно для любых N.

$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 = \sum_i \varphi_0(i) + \sum_i \varphi_1(i) + \sum_i \varphi_2(i)$, а $\varphi_k(i)$ определены как решение системы

$$\begin{aligned}
&x'(\tau)P_0(i) - \mu P_1(i) = (\lambda\frac{N-i}{N} + \sigma\frac{i}{N})\varphi_0(i) - \mu\varphi_1(i) - \mu_1\varphi_2(i),\\
&x'(\tau)P_1(i) = (\lambda\frac{N-i-1}{N} + \sigma\frac{i}{N} + \mu)\varphi_1(i) - \lambda\frac{N-i}{N}\varphi_0(i) - \sigma\frac{i+1}{N}\varphi_0(i+1),\\
&x'(\tau)P_2(i) = (\lambda\frac{N-i}{N} + \mu_1)\varphi_2(i) - \sigma\frac{i-1}{N}\varphi_1(i-1) - \lambda\frac{N-i+1}{N}\varphi_1(i-2) -\\
&-\lambda\frac{N-i+1}{N}\varphi_2(i-1),
\end{aligned}$$

которая также решается численно для любых N.

Данная теорема используется для доказательства асимптотической нормальности выходящего потока $n(t)$ успешно обслуженных заявок, так как нормированным решением уравнения Фоккера–Планка является плотность нормального распределения с нулевым средним и дисперсией

$$D\{y_1\} = 2\mu\left(P_1\varphi + \frac{1}{2}P_1 - \varphi_1\right)\tau.$$

Таким образом, переходя к $n(t)$ получаем, что

$$n(t) \sim N\left(\mu P_1 t, 2\mu\left(P_1\varphi + \frac{1}{2}P_1 - \varphi_1\right)t\right).$$

Более того, на основании результатов, полученных в ходе доказательства теоремы 2.1, сформулировано утверждение:

Следствие 2.1.1 *В асимптотике, при $N \to \infty, T \to \infty$,*

$$n(t) \sim N\left(\mu R_1 t, 2L_1 t\right),$$

где

$$L_1 = \frac{\mu R_1}{2}\left(1 + 2\mu R_1\left(\frac{R_2}{\mu_1} - \frac{R_1}{G}\right)\right).$$

R_k определены следующим образом

$$R_0 = \frac{\mu_1(\mu+G)}{G^2 + 2\mu_1 G + \mu\mu_1}, R_1 = \frac{\mu_1 G}{G^2 + 2\mu_1 G + \mu\mu_1}, R_2 = \frac{G^2}{G^2 + 2\mu_1 G + \mu\mu_1},$$

где $G = \lambda(1-b) + \sigma b$, а величина b имеет смысл асимптотического среднего нормированного числа заявок, находящихся в ИПВ. Величина b определяется решением G уравнения

$$\lambda\frac{\sigma - G}{\sigma - \lambda} = \frac{\mu\mu_1 G}{G^2 + 2\mu_1 G + \mu\mu_1}.$$

В общем случае данное уравнение имеет три корня. Анализ уравнения показал, что значения G_1 и G_3 определяют стабильные состояния, а G_2 так называемое квазистабильное состояние, при условии, что все три корня вещественны и $G_1 < G_2 < G_3$. В этом случае система и выходящий поток в целом бистабильны, причем можно отметить, что состояние, определяемое значением G_3, является "плохим"состоянием, т.к. производительность сети в этом состоянии существенно меньше производительности в состоянии, определяемом величиной G_1. В случае, когда вещественный корень один - система моностабильна, однако и в этом случае стабильное состояние может оказаться "плохим"и система будет функционировать неэффективно.

Также, аналогично предыдущим разделам, показано, что

Следствие 2.1.2 *Процесс $\dfrac{n(\tau T)}{T} = x(\tau) + \dfrac{1}{\sqrt{T}}y_1(\tau)$ является диффузионным процессом арифметического броуновского движения.*

В разделе 2.2 доказывается асимптотическая, при $T \to \infty$, нормальность потока $s(t)$ сигналов оповещения о конфликте, в асимптотике, при $N \to \infty$, находятся в явном виде параметры распределения.

Сформулированы следующие результаты: в асимптотике, при $T \to \infty$, $N \to \infty$

$$s(t) \sim N\left(\mu_1 R_2 t, 2L_2 t\right),$$

где

$$L_2 = \frac{\mu_1 R_2}{2}\left(1 + 2(R_2^2 - R_2 - R_1^2)\right).$$

Также сформулировано и доказано следующее утверждение

Следствие 2.2.2 *Процесс* $\dfrac{s(\tau T)}{T} = x(\tau) + \dfrac{1}{\sqrt{T}}y_2(\tau)$ *является диффузионным процессом арифметического броуновского движения.*

В разделе 2.3 доказывается асимптотическая, при $T \to \infty$, нормальность двумерного потока $\{n(t), s(t)\}$ успешно обслуженных заявок и сигналов оповещения о конфликте, в асимптотике, при $N \to \infty$, находятся в явном виде параметры распределения.

Сформулированы следующие результаты: в асимптотике, при $T \to \infty$, $N \to \infty$ двумерный выходящий поток успешно обслуженных заявок и сигналов оповещения о конфликте имеет нормальное распределение со средними равными

$$M(n(t)) = \mu R_1 t,$$
$$M(s(t)) = \mu_1 R_2 t,$$

и матрицей ковариаций вида

$$R_{11}(t_1,t_2) = M\{n(t_1), n(t_2)\} = 2L_1 \min(t_1,t_2),$$
$$R_{12}(t_1,t_2) = M\{n(t_1), s(t_2)\} = L_3 \min(t_1,t_2),$$
$$R_{22}(t_1,t_2) = M\{s(t_1), s(t_2)\} = 2L_2 \min(t_1,t_2),$$

где $L_3 = \mu R_1(2R_2^2 - R_2 - 2R_1^2)$, а L_1, L_2 и $R_k, k = 0,1,2$ определены выше.

Однако, по прежнему неясной остается структура бистабильности сети, в частности, время пребывания в окрестности каждого из стабильных состояний, поэтому раздел 2.4 посвящен более подробному изучению эффекта бистабильности в рассматриваемой СМО.

Для исследования математической модели сети связи с конечным числом абонентских станций введем вероятности $P_k(i,t) = P(k(t) = k, i(t) = i)$. В диссертации показано, что вероятности $P_k(i,t)$ удовлетворяют следующей системе дифференциально–разностных уравнений:

$$\frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} = \mu P_1(i-1,t) + \mu_1 P_2(i,t) - (\lambda\frac{N-i}{N} + \sigma\frac{i}{N})P_0(i,t),$$
$$\frac{\partial P_1(i,t)}{\partial t} = \lambda\frac{N-i}{N}P_0(i,t) + \sigma\frac{i+1}{N}P_0(i+1,t) - (\lambda\frac{N-i-1}{N} + \sigma\frac{i}{N} + \mu)P_1(i,t),$$
$$\frac{\partial P_2(i,t)}{\partial t} = \sigma\frac{i-1}{N}P_1(i-1,t) + \lambda\frac{N-i+1}{N}P_1(i-2,t) + \lambda\frac{N-i+1}{N}P_2(i-1,t) -$$
$$-(\lambda\frac{N-i}{N} + \mu_1)P_2(i,t).$$

Исследование данной системы проводится методом асимптотического анализа в условиях большого числа абонентских станций ($N \to \infty$), для чего выполняется замена вида:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \frac{\lambda}{\mu} = \rho, \frac{\sigma}{\mu} = \gamma, \frac{\mu_1}{\mu} = \frac{1}{\alpha}, t\varepsilon^2 = \tau, i\varepsilon^2 = b(\tau) + \varepsilon y, \frac{1}{\varepsilon}P_k(i,t) = \Pi_k(y,\tau,\varepsilon).$$

Здесь $b(\tau)$ имеет смысл асимптотического среднего нормированного числа заявок, находящихся в ИПВ в момент времени $\tau = t\delta^2$. Вид $b(\tau)$ мы определим ниже.

В диссертации доказана следующая теорема:

Теорема 2.4 *Распределение вероятностей R_k состояний обслуживающего прибора имеет вид*

$$R_0 = \frac{G+1}{\alpha G^2 + 2G + 1}, R_1 = \frac{G}{\alpha G^2 + 2G + 1}, R_2 = \frac{\alpha G^2}{\alpha G^2 + 2G + 1},$$

асимптотическое среднее $b(\tau)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$b'(\tau) = \rho(1 - b(\tau)) - R_1 = \rho\frac{\gamma - G}{\gamma - \rho} - R_1(G) = f(G) = f(\rho(1 - b(\tau)) + \gamma b(\tau)),$$

а распределение $\Pi(y,\tau)$ величины отклонения нормированного числа заявок, находящихся в ИПВ в момент времени τ от асимптотического среднего, удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка вида

$$\frac{\partial \Pi(y,\tau)}{\partial \tau} = (\rho + (\gamma - \rho)R_1')\frac{\partial\{y\Pi(y,\tau)\}}{\partial y} + (\rho(1 - b(\tau))(\frac{1}{2} + \frac{R_1}{G}) +$$
$$+ R_1(\frac{1}{2} + \frac{R_2^2 - R_1^2}{G}))\frac{\partial^2 \Pi(y,\tau)}{\partial y^2},$$

где $G = \rho(1 - b(\tau)) + \gamma b(\tau)$, а $R_1' = dR_1(G)/dG$.

Здесь $\Pi(y,\tau)$ является плотностью распределения вероятностей значений диффузионного процесса $y(\tau)$, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению:

$$d\{y(\tau)\} = a(y,\tau)d\tau + \beta(y,\tau)d\omega(\tau),$$

где

$$a(y,\tau) = -((\gamma - \rho)R_1' + \rho)y$$

коэффициент переноса процесса $y(\tau)$,

$$\beta^2(y,\tau) = \rho(1 - b(\tau))(1 + \frac{2R_1}{G}) + \frac{R_1}{G}(1 + 2\frac{R_2^2 - R_1^2}{G}) = \beta^2(\tau)$$

коэффициент диффузии этого процесса.

Определяя диффузионный случайный процесс $z(\tau)$ следующим образом:

$$z(\tau) = \rho(1 - b(\tau) - \varepsilon y(\tau)) + \gamma(b(\tau) + \varepsilon y(\tau)) = \rho + (\gamma - \rho)b(\tau) + (\gamma - \rho)\varepsilon y(\tau),$$

получим, что процесс $z(\tau)$ однозначно определяет нормированное число $\varepsilon^2 i(\tau)$ заявок в ИПВ, так как $\varepsilon^2 i(\tau) = \dfrac{z(\tau) - \rho}{\gamma - \rho}$.

Далее, для процесса $z(\tau)$ записывается стохастическое дифференциальное уравнение

$$dz(\tau) = A(z)d\tau + \varepsilon B(z)d\omega(\tau),$$

где

$A(z) = (\gamma - \rho) f(z)$,

$B(z) = (\gamma - \rho)\sqrt{\frac{\gamma - z}{\gamma - \rho}(1 + \frac{2}{\alpha z^2 + 2z + 1}) + \frac{1}{\alpha z^2 + 2z + 1}(1 + 2\frac{\alpha^2 z^3 - z}{(\alpha z^2 + 2z + 1)^2})}$

Используя полученное стохастическое дифференциальное уравнение для процесса $z(\tau)$, найдена статическая плотность распределения вероятностей $H(z)$ значений этого процесса

$$H(z) = \frac{C}{B^2(z)} e^{\frac{2}{\varepsilon^2}\int_\rho^z \frac{A(x)}{B^2(x)}dx},$$

где C константа, приведенная в диссертации.

Отметим, что функция $A(z)$ на интервале $[\rho, \gamma]$ является знакопеременной: $A(z) > 0$ при $z \in [\rho, G_1)$, $A(z) < 0$ при $z \in (G_1, G_2)$, $A(z) > 0$ при $z \in (G_2, G_3)$, $A(z) < 0$ при $z \in (G_3, \gamma]$.

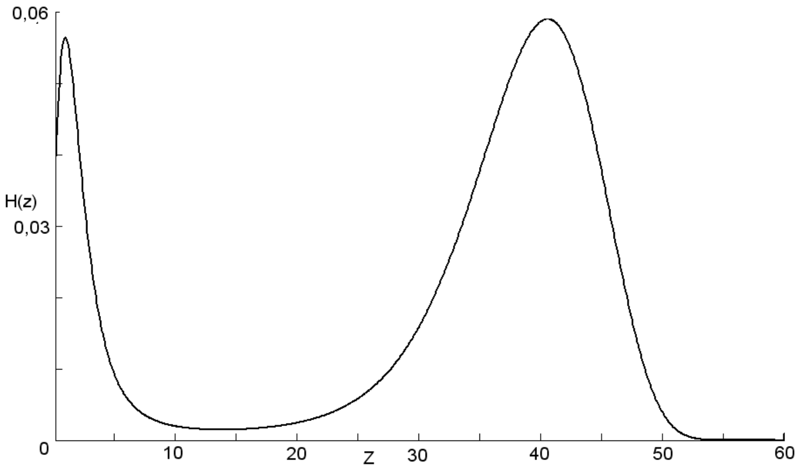

Рис. 1. Плотность распределения вероятностей $H(z)$ значений процесса $z(\tau)$.

Таким образом, определена основная вероятностная характеристика рассматриваемой бистабильной сети связи. Отметим, что плотность $H(z)$ является двумодальной, где моды определяют точки стабилизации сети. Двумодальность объясняется знакопеременностью функции $A(z)$ на интервале $[\rho, \gamma]$. Используя распределение $H(z)$ нетрудно найти и другие вероятностные характеристики бистабильной сети случайного доступа, такие как: вероятности пребывания в окрестности первой и второй точки стабилизации; условные средние значения процесса $\varepsilon^2 i(\tau)$, при условии пребывания в окрестности одной из точек стабилизации, и другие характеристики.

Будем говорить, что сеть функционирует устойчиво, если процесс изменения состояний ее математической модели остается в некоторой

окрестности постоянного асимптотического среднего, являющегося устойчивой точкой покоя дифференциального уравнения. Проведем исследование времени устойчивого функционирования рассматриваемой сети связи. Обозначим $T(\tau)$ -длину интервала от момента τ до момента достижения процессом $z(\tau)$ значения G_2. Данная величина необходима для определения времени пребывания в окрестности каждого из двух стабильных состояний процесса $z(\tau)$. Как было сказано выше, состояния, определяемые величинами G_1 и G_3, являются стабильными состояниями процесса $z(\tau)$, состояние, определяемое величиной G_2, является квазистабильным состоянием. Момент перехода из окрестности одного стабильного состояния в окрестность другого определяется достижением процессом $z(\tau)$ значения G_2.

Введя обозначение $M\{T(\tau)/z(\tau) = z\} = T(z)$, можно сформулировать и доказать следующую теорему.

Теорема 2.5 *Время устойчивого функционирования бистабильной сети случайного доступа определяется равенствами*

$$T(G_1) = \frac{\pi B(G_2)}{B(G_1)\sqrt{-A'(G_1)A'(G_2)}} exp\{-2N\int_{G_1}^{G_2} \frac{A(x)}{B^2(x)}dx\},$$
$$T(G_3) = \frac{\pi B(G_2)}{B(G_3)\sqrt{-A'(G_3)A'(G_2)}} exp\{2N\int_{G_2}^{G_3} \frac{A(x)}{B^2(x)}dx\},$$

где G_1, G_2, G_3 являются корнями уравнения $f(G) = 0$, причем $G_1 < G_2 < G_3$.

Как видно из данных формул, время пребывания в окрестности стабильного состояния стремится к ∞, при $N \to \infty$. Данный результат позволяет нам строить оценки парметров сети связи по наблюдениям за выходящими потоками не опасаясь того, что момент перехода сети связи из одного стабильного состояния в другое придется на интервал наблюдения.

В третьей главе рассмотрены оценки интенсивности входящего потока λ по наблюдениям за выходящим потоком успешно обслуженных заявок в сетях связи, управляемых динамическим протоколом случайного множественного доступа, параметра b - асимптотического среднего нормированного числа заявок, находящихся в ИПВ и интенсивности $\frac{\lambda}{N}$ обращения каждой из N абонентских станций к обслуживающему прибору по наблюдениям за двумерным выходящим потоком успешно обслуженных заявок и сигналов оповещения о конфликте в бистабильных сетях связи случайного множественного доступа с конечным числом абонентских станций.

В разделе 3.1 рассмотрены оценка интенсивности входящего потока λ вида

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{T} n(T).$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 3.1 *Оценка является несмещенной и состоятельной для параметра λ.*

В разделе 3.2 рассмотрены оценки параметра b и интенсивности $\dfrac{\lambda}{N}$ вида

$$\widehat{\lambda} = \frac{\sigma\dfrac{n^2(T)}{T^2}}{\sigma\dfrac{n(T)}{T} - \mu\dfrac{s(T)}{T} + \dfrac{n^2(T)}{T^2}}, \widehat{b} = \frac{\mu\dfrac{s(T)}{T} - \dfrac{n^2(T)}{T^2}}{\sigma\dfrac{n(T)}{T}}.$$

Сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема 3.2 *Оценки являются несмещенными и состоятельными для параметров λ и b соответственно.*

В четвертой главе исследована математическая модель выходящего потока заявок из ИПВ, сети связи с протоколом случайного множественного доступа с оповещением о конфликте. Кроме того, реализована программа имитационного моделирования рассматриваемой сети связи, с помощью которой удалось показать непротиворечивость полученых данных гипотезе об инвариантности распределения вероятностей состояний канала и величины интенсивности выходящего потока заявок из ИПВ к виду распределения длительности задержки заявки перед повторным обращением из ИПВ на обслуживающий прибор для математической модели рассматриваемой сети случайного доступа.

В разделе 4.1 доказывается, что число заявок, вышедших из ИПВ за время $t = T\tau$, в асимптотике, при $T \to \infty$, подчиняется нормальному закону. Найдены в явном виде параметры распределения в асимптотике, при $\sigma \to 0$.

Сформулированы следующие результаты: в асимптотике, при $T \to \infty$, $\sigma \to 0$ поток заявок, выходящих из ИПВ имеет нормальное распределение со следующими параметрами

$$n(t) \sim N\left(bt, bt\right),$$

где b найдено в явном виде

$$b = \frac{-2\lambda\mu_1 + \mu\mu_1 - \sqrt{(2\lambda\mu_1 - \mu\mu_1)^2 - 4\lambda^2\mu\mu_1}}{2\lambda} - \lambda.$$

В разделе 4.2 приводится описание программы, с помощью которой проводится имитационное моделирование. Программа позволяет получить численные характеристики для рассматриваемой модели сети связи, такие как распределение вероятностей состояний канала и интенсивность потока заявок, выходящих из ИПВ. Результаты работы программы приведены в виде таблиц и графиков. Полученные результаты позволяют говорить о непротиворечивости полученых данных гипотезе об инвариантности распределения вероятностей состояний канала и интенсивности выходящего потока заявок из ИПВ к виду распределения длительности задержки заявки перед повторным обращением из ИПВ на обслуживающий прибор для математической модели рассматриваемой сети случайного доступа.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Колоусов Д.В., Назаров А.А.* Дважды стохастический поток, управляемый марковским процессом с дискретным множеством состояний// Материалы Всероссийской конференции "Новые технологии и комплексные решения: наука, образование и производство", г. Анжеро–Судженск 2001 г. Часть II (математика). — КемГУ, 2001. — С. 33–37.

2. *Колоусов Д.В., Назаров А.А.* Исследование выходящего потока локальной вычислительной сети с протоколом случайного доступа // Вестник ТГУ, 2002. — №275. — С. 193–194.

3. *Колоусов Д.В., Назаров А.А.* Исследование выходящего потока локальной вычислительной сети с протоколом случайного доступа // Вестник ТГУ, 2002. Приложение 1. Материалы IV Всероссийской конференции "Новые информационные технологии в исследовании сложных стуктур— С. 68–72.

4. *Колоусов Д.В., Назаров А.А.* Исследование выходящего потока сети случайного доступа с конечным числом станций // Материалы Всероссийской научно-практической конференции "Информационные технологии и математическое моделирование", 15 ноября 2002 г., г. Анжеро-Судженск. — Томск: "Твердыня"2002. — С. 173–174.

5. *Колоусов Д.В.* Исследование потока заявок, отправленных в источник повторных вызовов сети связи случайного доступа с конечным числом станций // Обработка данных и управление в сложных системах. — Вып.5. — Томск: Изд–во Том. ун–та, 2003. — С. 57–66.

6. *Колоусов Д.В., Назаров А.А.* Исследование двумерного выходящего потока сети связи случайного доступа с конечным числом станций // Вестник ТГУ, 2003. — №280. — С. 217–221.

7. *Колоусов Д.В., Назаров А.А.* Оценки параметров сети случайного доступа с конечным числом станций по наблюдениям за двумерным выходящим потоком // Материалы международной научной конференции "Современные математические методы анализа и оптимизации телекоммуникационных сетей". — Минск: БГУ, 2003. — С. 139–143.