На правах рукописи

Бушланов Владимир Петрович

ТЕОРИЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОСРЕДНЕННЫХ ПО МЕЖФАЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПАРАМЕТРОВ В УРАВНЕНИЯХ МЕХАНИКИ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД

01.02.05 – механика жидкостей газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Томск - 2004

Работа выполнена в очной докторантуре Томского государственного университета на кафедре математической физики и в Отделе структурной макрокинетики Томского научного центра СО РАН

Научный консультант:

д. ф.-м. н., профессор Шрагер Эрнест Рафаилович (Томский государственный университет, г. Томск)

Официальные оппоненты:

академик. РАН Липанов Алексей Матвеевич (Институт прикладной механики УРО РАН, Удмуртский научный центр,

г. Ижевск)

д. ф.- м. н., профессор Воеводин Анатолий Федорович (Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН,

г. Новосибирск)

д. ф.-м. н., профессор Бубенчиков Алексей Михайлович (Томский государственный университет, г. Томск)

Ведущая организация:

Институт механики РАН, Уфимский научный центр, г. Уфа.

Защита состоится «___» декабря 2004 года в «_____» часов на заседании диссертационного совета Д 212.267.13 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Томском государственном университете по адресу: 634050, Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан «_____» сентября 2004 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор технических наук Ю.Ф. Христенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Уравнения механики гетерогенных сред, записанные методом пространственного осреднения, применяются при моделировании физических явлений в гетерогенных средах [1,2,3]. Область применения указанных уравнений очень широка. Это описание явлений в стесненных условиях: среды плотно упакованных порошков, капель, пузырей, капель органических жидкостей (нефти, масел) в воде и капель воды в указанных жидкостях, пузырей в жидкостях, твердых частиц в жидкостях и жидкостей в твердых пористых средах и т.д.. В отличие от уравнений механики гетерогенных сред записанных феноменологически [1], уравнения, полученные пространственным осреднением, имеют то преимущество, что содержат в явном виде выражения для осредненных параметров фаз (в том числе таких величин как тензоры напряжений в фазах, интенсивности межфазного обмена массой, импульсом, моментом импульса, энергией), от функции локальных параметров фаз. Получение указанных выражений в виде зависимостей от средних макроскопических параметров, является **актуальной** задачей при моделировании гетерогенных сред на основе уравнений, полученных методом пространственного осредненния. Более того[2], “Реализация этих выражений, приводящая к реологическим соотношениям теперь уже только между макропараметрами (которые можно называть явными реологическими соотношениями) и, как результат, к замыканию системы уравнений, должна производиться с учетом структуры и физических свойств фаз в смеси. И это есть **основная проблема при моделировании гетерогенных сред”.**

Цель работы. Создать теорию вычисления осредненных по межфазной поверхности параметров фаз, использующихся в уравнениях механики гетерогенных сред, на основе нового уравнения для функции распределения удельной межфазной поверхности от углов наклона ее нормалей.

Научная новизна.

1. Записано уравнение для функции распределения удельной межфазной поверхности в гетерогенной смеси от углов наклона ее нормалей. Из уравнения для функции распределения получено уравнение для функции признака, являющейся осреднением заданной на межфазной поверхности функции от локальных координат поверхности и ее нормалей. Получены уравнения для коэффициентов ряда в разложении функции распределения и логарифма функции распределения по сферическим функциям в случае, когда межфазной поверхностью является свободная поверхность ньютоновской жидкости. В указанном случае показана независимость системы уравнений для коэффициентов ряда до вторых гармоник включительно от системы уравнений для коэффициентов ряда гармоник выше второй. Записана точная формула вычисления удельной длины линий образованных пересечением межфазной поверхности с плоскостью заданной вектором нормали.

2. Разработан метод дополнительного пространственного осреднения (ДПО). Этим методом получен аналог формулы Стокса для гетерогенной среды. Формула выражает среднее по межфазной поверхности скалярное произведение локальной единичной нормали и локального вихря вектор функции, определенной на межфазной поверхности, через дивергенцию среднего по межфазной поверхности векторного произведения указанных локальных векторов. Как следствие формулы, получены точные выражения средних по межфазной поверхности объемных плотностей поверхностных сил Лапласа, объемных плотностей момента импульса и мощности сил Лапласа в виде зависимостей от тензора удельной межфазной поверхности и средней скорости фазы на межфазной поверхности.

3. Из уравнения для признака и сформулированной топологической гипотезы, записана система уравнений для осредненных по межфазной поверхности локальных параметров фаз и их функций, входящих в осредненные уравнения механики гетерогенных сред, в том числе получены уравнения для средних топологических характеристик межфазной поверхности – удельной поверхности и компонент тензора удельной поверхности.

4. Получена система уравнений механики гетерогенных сред в случае, когда межфазной поверхностью является граница раздела несжимаемых ньютоновских жидкостей, на которой действуют поверхностные лапласовские силы. Система уравнений записана из известной общей системы уравнений механики гетерогенных сред [1], а уравнения для средних по межфазной поверхности параметров, входящие в систему, получены из системы уравнений для осредненных по межфазной поверхности параметров фаз, в том числе использованы уравнения для средних топологических характеристик межфазной поверхности. Осреднением по межфазной поверхности уравнений, выражающих на границе раздела равенство локальных скоростей фаз, касательных напряжений в фазах и равенство разности нормальных напряжений лапласовскому давлению, получены дополнительные уравнения, замыкающие систему уравнений механики гетерогенных сред в указанном случае смеси фаз ньютоновских жидкостей.

1.Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред.- М.:Наука,1978.-336с.
2.Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред.- т.1.-М.:Наука, 1987.- 463с.
3.Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред.-т.2- М.:Наука, 1987.- 359с.

5. Решена задача о спекании в невесомости упакованных в виде сферического слоя капель несжимаемой ньютоновской жидкости, находящейся в другой несжимаемой ньютоновской жидкости в сферически симметричной постановке. Решения получены для случаев, когда центральная область упаковки занята фазой капель или фазой жидкости окружающей капли. Уравнения задачи записаны на основе замкнутой системы уравнений, использующей точные выражения для объемной плотности лапласовских сил, средних топологических характеристик межфазной поверхности и других точных уравнений для осредненных по межфазной поверхности параметров фаз. Показано, что уравнения, для средних величин безразмерных скоростей фаз, средней по межфазной поверхности скорости, объемных долей фаз, удельной межфазной поверхности и безразмерных радиусов упаковки, зависят только от безразмерного числа Лапласа $L_0 = \frac{R_0}{\mu_i - \mu_j}\sqrt{\frac{\rho_j^0 \Sigma_0}{d}}$ (R_0 - внешний начальный радиус упаковки, μ_i, μ_j - вязкости фаз, ρ_j^0 - плотность жидкости окружающей капли, Σ_0 - коэффициент поверхностного натяжения на границе фаз, d – начальный диаметр капель) и отношения массовых плотностей жидкостей. Показано, что если начальная удельная поверхность пропорциональна объемной доле фазы, то гладкое сферически симметричное решение существует только в случае экспоненциальной зависимости начальной функции объемной доли спекаемой фазы от радиуса. Определена область начальных безразмерных параметров включающих меньший радиус упаковки и два коэффициента в начальной функции объемной доли, в которой существует сферически симметричное решение.

Достоверность полученных результатов__следует из корректности физической и математической постановки задач и методов их решения, точного выполнения законов сохранения и граничных условий и качественное соответствие результатов решения задачи о спекании с результатами известных из литературы экспериментов и численных расчетов.

Практическая и теоретическая значимость работы.

Введено новое понятие-функция распределения удельной межфазной поверхности в гетерогенной среде от углов наклона ее нормалей и получено уравнение для ее определения. Указанное новое уравнение может применяться как в механике гетерогенных сред, так и в других приложениях, где необходима информация о средних топологических характеристиках поверхности.

Создана теория вычисления осредненных по межфазной поверхности параметров входящих в систему уравнений механики гетерогенных сред. Это позволяет при определении указанных параметров не использовать приближенные представления о структуре межфазной поверхности, а использовать точные уравнения для определения удельной межфазной поверхности и других средних по межфазной поверхности характеристик гетерогенной смеси в зависимости от времени и координат.

Разработан метод дополнительного пространственного осреднения в механике гетерогенных сред, который может использоваться при получении выражений для средних параметров вдоль линий пересечения плоскости с межфазной поверхностью. Указанным методом получены аналоги формулы Стокса для гетерогенной среды и из них записаны точные формулы для объемных плотностей лапласовских сил, необходимые во многих приложениях. Методом дополнительного пространственного осреднения получена точная теоретическая формула для удельной длины линий пересечения плоскости с межфазной поверхностью, которая может использоваться в приложениях.

В точной постановке решена задача о спекании в невесомости сферически симметричной упаковки капель, находящейся в несжимаемой жидкости. Указанное точное решение, может быть использовано при моделировании явлений, связанных с разделением жидкостей, например, нефти и воды, масел и воды, жидких металлов и др.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Уравнение для функции распределения удельной площади межфазной поверхности от углов наклона ее нормалей и его решение в случае, когда границей раздела является свободная поверхность ньютоновской жидкости.
2. Метод дополнительного пространственного осреднения в механике гетерогенных сред и полученные этим методом аналоги формулы Стокса и формулы для объемных плотностей лапласовских сил и объемных плотностей момента импульса и мощности лапласовских сил.
3. Уравнение для признака - осредненной по межфазной поверхности функции локальных параметров фаз, в том числе уравнений для средних топологических характеристик межфазной поверхности – удельной поверхности и тензора удельной поверхности.
4. Теория вычисления осредненных по межфазной поверхности параметров фаз, входящих в систему уравнений механики гетерогенных сред, полученную методом пространственного осреднения.
5. Система уравнений механики гетерогенных сред в случае, когда межфазной поверхностью является граница раздела несжимаемых ньютоновских жидкостей.
6. Результаты решения сферически симметричной задачи о спекании в невесомости капель несжимаемой жидкости, находящихся в другой несжимаемой жидкости и упакованных в виде сферического слоя.

Апробация работы.__Основные результаты работы докладывались на семинарах Отдела структурной макрокинетики Томского научного центра СО РАН, в Институте прикладной математики и механики при Томском госуниверситете, на семинаре в Институте физики прочности и материаловедения Томского научного

центра СО РАН, на 7 Международном симпозиуме по самораспространяющемуся высокотемпературному синтезу (Краков 2003), на семинаре академика Р.И. Нигматулина в Институте механики Уфимского научного центра РАН, на семинаре кафедры математической физики Томского госуниверситета, на конференции по физической мезомеханике, компьютерному конструированию и разработке новых материалов (ИФПМ СО РАН, Томск, 2004), на 4 международной конференции “Хаос и структуры в нелинейных системах. Теория и эксперимент”(Караганда, 2004).

Публикации.

Результаты диссертации представлены в 20 работах, из них 19 - в журналах, 1 в материалах Международной конференции.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, 6 разделов, заключения и списка использованных источников. Общий объем диссертации 248 страниц, включая 15 рисунков, 143 наименования в библиографическом списке.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, формулируется цель работы, научная новизна полученных результатов, положения, выносимые на защиту.

Раздел 1. Метод пространственного осреднения в механике гетерогенных сред. Целью данного раздела является введение в терминологию и обозначения принятые в главе 2 из [1], посвященной методу пространственного осреднения однофазных уравнений механики сплошной среды, применяемому при получении уравнений механики гетерогенных сред. Сформулированы основные допущения, записана система уравнений механики гетерогенных сред из [1] , полученная методом пространственного осреднения. Для замыкания указанной системы необходимо создание теории вычисления интегралов по межфазной поверхности следующего вида:

$$<\varphi_i^{'}>_{12}=\frac{1}{dS_{12}}\int_{dS_{12}}\varphi_i^{'}d^{'}S, \qquad (1)$$

и интегралов по линиям пересечения межфазной поверхности с поверхностью ограничивающей представительный объем гетерогенной смеси вида:

$$\varphi_{\Sigma}(\vec{n})=l_{12}^{(n)}<\Phi_{\Sigma}^{'}>_{L\Sigma}^{(n)}=\frac{1}{ds(\vec{n})}\int_{dl_{12}}\Phi_{\Sigma}^{'}d^{'}l, \qquad (2)$$

где штрих указывает на локальные величины, индекс (n)- указывает на зависимость $\varphi_{\Sigma}(\vec{n})$ от направления нормали $\vec{n}$ к поверхности ds, dS_{12} - межфазная поверхность в представительном объеме dV гетерогенной смеси, dl_{12} - линии пересечения межфазной поверхности с поверхностью dS ограничивающей dV, $l_{12}^{(n)}$ - удельная длина линий пересечения межфазной поверхности с плоскостью заданной нормалью $\vec{n}$. Здесь не ставится задача написания литературного обзора по методу пространственного осреднения в механике гетерогенных сред, потому что существуют монографии [1-3] Р.И. Нигматулина, в которых детально рассмотрен метод пространственного осреднения и записана система уравнений механики гетерогенных сред в наиболее полной и удобной для использования форме. Поэтому, в настоящем разделе поставлена цель введения терминологии и обозначений, сформулированных в [1], чтобы дальнейший материал воспринимался как метод, предназначенный для замыкания системы уравнений механики гетерогенных сред, полученных методом пространственного осреднения. Для того чтобы наиболее полно представить себе метод пространственного осреднения в механике гетерогенных сред, необходимо обратиться к [1]. В рассматриваемом разделе поставлена задача о вычислении осредненных по межфазной поверхности параметров теоретическими методами с помощью уравнения для функции распределения площади межфазной поверхности от углов наклона ее нормалей и метода дополнительного пространственного осреднения.

Раздел 2. Теория уравнения для функции распределения площади межфазной поверхности от углов наклона ее нормалей. При моделировании многих физических процессов необходимо знание средних топологических характеристик поверхности. Например, в осредненных уравнениях механики гетерогенных сред [1], необходимо знание удельной межфазной поверхности, значения интегралов по межфазной поверхности, являющихся средними величинами локальных характеристик среды на межфазной поверхности (скорости, давления, тензора скоростей деформаций, вихря скорости и др.). Под указанными интегралами в качестве сомножителей присутствуют компоненты единичной нормали или произведения компонент нормали, как в тензоре удельной поверхности [3]. С целью вычисления таких интегралов по межфазной поверхности, в данном разделе введено понятие функции распределения площади межфазной поверхности от углов наклона ее нормалей и записано уравнение для нахождения этой функции распределения. Идея получения уравнения

происходит из следующей постановки задачи: пусть известны скорости каждой точки межфазной поверхности $\vec{\vartheta}(t,\vec{x}')$ в некоторый момент времени t - найти координаты межфазной поверхности в момент времени t+dt, если известны координаты в момент t. Поставленная задача в указанной постановке могла быть решена, и положение поверхности в момент t+dt могло быть найдено, затем можно было бы определить средние топологические характеристики поверхности в момент времени t+dt. Указанная идея возможности определения средних характеристик поверхности, если известна $\vec{\vartheta}(t,\vec{x}')$, реализована с помощью введенной функции распределения площади межфазной поверхности от углов наклона ее нормалей $s(t,\vec{x},\theta,\phi)$:

$$s(t,\vec{x},\theta,\phi)=\frac{\sum\limits_{\chi} dS\chi}{dVd\Omega}, \qquad (3)$$

где суммирование проводится по площадкам межфазной поверхности с номерами χ, находящимся в представительном объеме гетерогенной среды dV и имеющим заданные углы нормали θ и ϕ в телесном угле $d\Omega$, где θ - угол между нормалью и ортом $\vec{e}^3$ - декартовой системы координат, а угол ϕ - отсчитывается в перпендикулярной к вектору $\vec{e}^3$ плоскости. Из определения функции s следует, что $s(t,\vec{x},\theta,\phi)dVd\Omega$ - есть площадь межфазной поверхности в объеме dV, нормали которой имеют углы наклона θ и ϕ и лежат в телесном угле $d\Omega=\sin\theta d\theta d\phi$, так что

$$s_{12}=\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} s\sin\theta d\theta d\phi, \qquad (4)$$

где s_{12} общая площадь межфазной поверхности в единице объема, которая называется удельной поверхностью.

В пункте 2.1 записаны в удобной для дальнейших целей известные формулы для производной по времени единичной нормали $\vec{n}=\{\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta\}$ к поверхности в следующем виде:

$$\frac{d\vec{n}}{dt}=\vec{n}[\vec{n}(\vec{n}\vec{\nabla})\vec{V}]-(\vec{n}\vec{\nabla})\vec{V}-\vec{n}\times\mathrm{rot}\,\vec{V}, \qquad (5)$$

где $\vec{V}$ - скорость точки поверхности. Записаны локальные соотношения на межфазной поверхности, являющейся свободной поверхностью ньютоновской жидкости:

$$\frac{d\vec{n}}{dt}=\frac{1}{2}\vec{\Omega}\times\vec{n}, \qquad \vec{n}(n^p n^q e^{pq})-\vec{e}^l n^q e^{lq}=0, \qquad (6)$$

где $\vec{\Omega}=\mathrm{rot}\,\vec{V}$, e^{pq} - тензор скоростей деформаций.

В пункте 2.2 выведено уравнение для функции распределения площади межфазной поверхности от углов наклона ее нормалей $s(t,\vec{x},\theta,\phi)$ в следующем виде:

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\mathrm{div}(s<\vec{V}>_{12,\Omega})-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}[\sin\theta s n^p(\vec{n}_\theta)^q(\nabla^q V^p)_{12,\Omega}]-$$
$$-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}[s n^p(\vec{n}_\phi)^q(\nabla^q V^p)_{12,\Omega}]=s(\delta^{pq}-n^p n^q)<\nabla^p V^q>_{12,\Omega}, \qquad (7)$$

где $\vec{n}_\theta=\frac{\partial\vec{n}}{\partial\theta}, \vec{n}_\phi=\frac{\partial\vec{n}}{\partial\phi}$. По повторяющимся индексам поразумевается суммирование и где введено осреднение следующего вида:

$$<\nabla^q V^p>_{12,\Omega} s d\Omega=\sum_{\chi}(\nabla^q V^p)_\chi dS_\chi.$$

Суммирование в последнем выражении проводится по площадкам межфазной поверхности с номерами $,\chi$ находящимся в представительном объеме и имеющим заданные углы нормали θ и ϕ в телесном угле $d\Omega$.

Показано, что среднюю по межфазной поверхности величину функции $\Phi'=\Phi(t,\vec{x}',\theta,\phi)$ можно записать используя функцию распределения в следующем виде:

$$<\Phi'>_{12}=\frac{1}{dS_{12}}\int\limits_{dS_{12}}\{\frac{1}{s_{12}}\int\limits_{\Omega} s(t,\vec{x}',\theta,\phi)\Phi(t,\vec{x}',\vec{n})d\Omega\}d'S. \qquad (8)$$

Уравнение для функции признака, являющейся осредненной локальной функцией Φ' по межфазной поверхности, получено методом моментов из (7) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(s_{12} < \Phi' >_{12}) + \nabla^k (s_{12} < V'^k \Phi' >_{12}) = s_{12} < \frac{d\Phi'}{dt} >_{12} +$$
$$+ s_{12} < \Phi' (\delta^{pq} - n^p n^q) \nabla'^q V'^p >_{12}, \qquad (9)$$

где

$$\frac{d\Phi'}{dt} = \frac{\partial \Phi'}{\partial t} + (V'^k \nabla'^k)\Phi' - [\frac{\partial \Phi'}{\partial \theta} n^p (\vec{n}_\theta)^q + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial \Phi'}{\partial \phi} n^p (\vec{n}_\phi)^q] \nabla'^q V'^p .$$

В случае $\Phi' = 1$ из уравнения для признака получается следующее уравнение для удельной межфазной поверхности:

$$\frac{\partial}{\partial t} s_{12} + \nabla^k (s_{12} < V'^k >_{12}) = s_{12} < (\delta^{pq} - n^p n^q) \nabla'^q V'^p >_{12} . \qquad (10)$$

В пункте 2.3 получено решение уравнения для функции распределения (7) в случае, когда межфазная поверхность является свободной поверхностью ньютоновской жидкости, на которой отсутствуют касательные напряжения. Показано, что в этом случае уравнение (7) имеет вид

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{\vartheta}\vec{\nabla} s + \frac{1}{\sin\theta}\vec{\omega}[\frac{\partial}{\partial \theta}(s\,\vec{n}_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi}(s\,\vec{n}_\theta)] + s[n^p n^q \varepsilon^{pq} - \varepsilon^{qq} + \operatorname{div}\vec{\vartheta}] = 0 , \qquad (11)$$

где

$$\vec{\vartheta} = < \vec{V} >_{12,\Omega}, \quad \vec{\omega} = < \vec{\Omega} >_{12,\Omega}, \quad \varepsilon^{pq} = < e^{pq} >_{12,\Omega} .$$

Решение уравнения для функции распределения s ищется в виде разложения по сферическим функциям:

$$s = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^{j} s_{j,m}(t, \vec{x}) p_j^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi},$$

где $p_j^{|m|}(\cos\theta)$ - присоединенные полиномы Лежандра. Для коэффициентов ряда $s_{j,m}(t, \vec{x})$ из уравнения (11) методом моментов получается следующая система уравнений для j<3:

$$\hat{D}S_{0,0} + < n^p n^q > \varepsilon^{pq} = 0,$$

$$\hat{D}S_{1,0} + \frac{\vec{\omega}}{2}\{\frac{i}{2}(S_{1,-1} - S_{1,1}), \frac{1}{2}(S_{1,-1} + S_{1,1}), 0\} + < n^p > \varepsilon^{p3} = 0,$$

$$\hat{D}S_{2,0} + \frac{\vec{\omega}}{2}\{\frac{i}{2}(S_{2,-1} - S_{2,1}), \frac{1}{2}(S_{2,-1} + S_{2,1}), 0\} + \quad + \frac{3}{2} < n^p n^3 > \varepsilon^{p3} - \frac{1}{2} < n^p n^q > \varepsilon^{pq} = 0,$$

$$\hat{D}S_{1,1} + \frac{\vec{\omega}}{2}\{-iS_{1,0}, -S_{1,0}, iS_{1,1}\} + < n^p > \varepsilon^{p1} - i < n^p > \varepsilon^{p2} = 0, \qquad (12)$$

$$\hat{D}S_{2,1} + \frac{\vec{\omega}}{2}\{-3iS_{2,0} - \frac{1}{2}iS_{2,2}, -3s_{2,0} + \frac{1}{2}S_{2,2}, iS_{2,1}\} +$$
$$+ 3 < n^p n^1 > \varepsilon^{p1} + 3 < n^p n^3 > \varepsilon^{p3} - -3i < n^p n^2 > \varepsilon^{p2} - 3i < n^p n^3 > \varepsilon^{p3} = 0$$

$$\hat{D}S_{2,2} + \frac{\vec{\omega}}{2}\{-2iS_{2,1}, -2S_{2,1}, 2iS_{2,2}\} + 3 < n^p n^1 > \varepsilon^{p1} - 3 < n^p n^2 > \varepsilon^{p2} +$$
$$+ 6i < n^p n^1 > \varepsilon^{p2} + 6i < n^p n^2 > \varepsilon^{p1} = 0,$$

где введены следующие обозначения:

$$\hat{D}S = \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{\vartheta} S), \; S_{j,m} = s_{j,m}\frac{2}{2k+1}\frac{(k+m)!}{(k-m)!}, \quad m>0, \qquad (13)$$

$$< n^p n^q > = \begin{pmatrix} \frac{S_{0,0} - S_{2,0}}{3} + \frac{S_{2,-2} + S_{2,2}}{12} & i\frac{S_{2,2} - S_{2,-2}}{12} & \frac{S_{2,-1} + S_{2,1}}{6} \\ & \frac{S_{0,0} - S_{2,0}}{3} - \frac{S_{2,-2} + S_{2,2}}{12} & i\frac{S_{2,1} - S_{2,-1}}{6} \\ & & \frac{S_{0,0} + 2S_{2,0}}{3} \end{pmatrix} . \qquad (14)$$

Отметим, что система уравнений (12) является замкнутой, так как из того что

$$S_{2,1} = \overline{S}_{2,-1}, \quad S_{2,-2} = \overline{S}_{2,2}, \quad S_{1,-1} = \overline{S}_{1,1},$$

где черта над символом обозначает знак сопряжения, и (14)

$$S_{0,0} =< n^1 n^1 > + < n^2 n^2 > + < n^3 n^3 >= 1,$$

$$S_{2,0} = -\frac{1}{2} < n^1 n^1 > -\frac{1}{2} < n^2 n^2 > + < n^3 n^3 >= \frac{3}{2} < n^3 n^3 > -\frac{1}{2},$$

$$S_{2,1} = 3 < n^1 n^3 > -i3 < n^2 n^3 >, \qquad (15)$$

$$S_{2,2} = 3 < n^1 n^1 > +3 < n^2 n^2 > -i6 < n^1 n^2 >,$$

$$S_{1,1} =< n^1 > -i < n^2 >, \; S_{1,0} =< n^3 >.$$

Из уравнений (12)-(15) следует, что в случае, когда межфазная поверхность является свободной поверхностью, отделяющей несжимаемую ньютоновскую жидкость от газообразной среды, решение представимо в виде ряда по сферическим функциям. При этом, первые коэффициенты ряда до вторых гармоник включительно, находятся из системы уравнений независимой от системы уравнений для остальных коэффициентов ряда, а указанные первые коэффициенты ряда выражаются линейно с постоянными коэффициентами через компоненты тензора $< n^p n^q >$. Из замкнутости системы уравнений (12)-(15) следует, что если начальная функция распределения представляется в виде отрезка ряда

$$s(0,\vec{x},\theta,\phi) = \sum_{j=0}^{2} \sum_{m=-j}^{j} s_{j,m}(0,\vec{x}) p_j^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi}, \qquad (16)$$

то решение имеет вид такого же отрезка ряда, где функции s_{jm} находятся из системы уравнений (12), с учетом обозначений (13), формул (14)-(15) и начальных условий (16).

В пункте 2.4 решено следующее уравнение для логарифма функции распределения площади межфазной поверхности от углов наклона ее нормалей в случае, когда межфазная поверхность является свободной поверхностью:

$$\frac{dw}{dt} + \frac{\vec{\omega}}{2\sin\theta}(\vec{n}_\phi \frac{\partial w}{\partial\theta} - \vec{n}_\theta \frac{\partial w}{\partial\phi}) + n^p n^q \varepsilon^{pq} + \operatorname{div}\vec{\vartheta} - \varepsilon^{qq} = 0, \qquad (17)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\vartheta}\vec{\nabla}, \quad w = \ln(\frac{s}{s_0}),$$

s_0 некоторая константа размерности s. Решение уравнения (17) ищется в виде следующего ряда по сферическим функциям:

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^{j} \gamma_{j,m}(t,\vec{x}) p_j^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi}. \qquad (18)$$

Методом моментов из уравнения (17) и представления (18) получена замкнутая система уравнений для значений $j \le 2$ в виде двух независимых подсистем: 1) j=0,2; 2) j=1, а именно

$$\frac{d\gamma_{0,0}}{dt} + \frac{\varepsilon^{11} + \varepsilon^{22} + \varepsilon^{33}}{3} + \operatorname{div}\vec{\vartheta} - \varepsilon^{qq} = 0,$$

$$\frac{d\gamma_{2,0}}{dt} + 3\frac{\vec{\omega}}{2}\{\frac{i}{2}(\gamma_{2,-1} - \gamma_{2,1}), \gamma_{2,-1} + \gamma_{2,1}, 0\} + \frac{1}{3}(2\varepsilon^{33} - \varepsilon^{11} - \varepsilon^{22}) = 0,$$

$$\frac{d\gamma_{2,1}}{dt} + \vec{\omega}\{i(-\frac{1}{4}\gamma_{2,0} - \gamma_{2,2}), -\frac{1}{4}\gamma_{2,0} + \gamma_{2,2}, i\frac{1}{2}\gamma_{2,1}\} + \frac{\varepsilon^{13} + i\varepsilon^{23}}{3} = 0,$$

$$\frac{d\gamma_{2,2}}{dt} + \frac{\vec{\omega}}{4}\{-i\gamma_{2,1}, -\gamma_{2,1}, 4i\gamma_{2,2}\} + \frac{1}{12}(\varepsilon^{11} - \varepsilon^{22} + 2i\varepsilon^{12}) = 0, \qquad (19)$$

$$\gamma_{2,-1} = \bar{\gamma}_{2,1}, \; \gamma_{2,-2} = \bar{\gamma}_{2,2}.$$

$$2\frac{d\gamma_{1,0}}{dt} + \vec{\omega}\{i(\gamma_{1,-1} - \gamma_{1,1}), \gamma_{1,-1} + \gamma_{1,1}, 0\} = 0,$$

$$\frac{d\gamma_{1,1}}{dt} + \vec{\omega}\{-i\frac{1}{4}\gamma_{1,0}, -\frac{1}{4}\gamma_{1,0}, i\gamma_{1,1}\} = 0, \quad \gamma_{1,-1} = \bar{\gamma}_{1,1}. \qquad (20)$$

Из системы уравнений (19)-(20) следует, что если при t=0 $\gamma_{j,m}(0,\vec{x}) = 0$, для значений j>2, то и при t>0 функция $w = \ln\frac{s}{s_0}$ представляется отрезком ряда (18), в котором $0 \le j \le 2$. Показано, что, в системе уравнений для коэффициентов ряда (18) при j>2 каждое уравнение независимо от других. Таким образом, приходим к следующему выводу для случая, когда межфазная поверхность является свободной поверхностью. Если

начальная функция распределения $w = \ln\frac{s}{s_0}$ при t=0 представима конечным отрезком ряда по сферическим функциям, то решение является конечным отрезком ряда по тем же самым сферическим функциям.

В пункте 2.5 методом дополнительного пространственного осреднения (ДПО) вычислена средняя удельная длина линий l_{12}, образованных пересечением плоскости с межфазной поверхностью, приходящаяся на единицу площади плоскости, пересекающей межфазную поверхность, когда нормаль к плоскости параллельна орту $\vec{e}^3$ декартовой системы координат:

$$l_{12}(\vec{e}^3) = s_{12} < \sqrt{1-(n^3)^2} >_{12} = \int_\Omega \sin\theta s(t,\vec{x},\theta,\phi)d\Omega . \qquad (21)$$

Из (21) в случае представления функции распределения в виде ряда по сферическим функциям имеем

$$l_{12}(\vec{e}^3) = 2\pi \sum_{j=0}^{\infty} s_{j,0}p_j^0 \sin^2\theta d\theta = \frac{4\pi}{3}s_{1,0} . \qquad (22)$$

Показано, что если плоскость пересекающая межфазную поверхность задана единичным вектором нормали $\vec{\nu}_0 = \{\sin\alpha\cos\beta, \sin\alpha\sin\beta, \cos\beta\}$, то

$$l_{12}(\vec{\nu}_0) = \int_\Omega \sqrt{1-[\sin\theta\sin\alpha\cos(\phi-\beta)+\cos\theta\cos\beta]^2}\, s(t,\vec{x},\theta,\phi)d\Omega =$$

$$= s_{12} < [1-(\vec{n}'\vec{\nu}_0)^2]^{\frac{1}{2}} >_{12} . \qquad (23)$$

Из последнего выражения следует, что средняя удельная длина зависит от ориентации плоскости, относительно которой она определяется.

Раздел 3. Теория вычисления осредненных по межфазной поверхности параметров в уравнениях механики гетерогенных сред. В осредненные уравнения механики гетерогенных сред [1,2] входят средние характеристики по межфазной поверхности, такие как средние значения нормальной скорости, компоненты тензора скоростей деформаций, умноженные на компоненты единичной нормали, поверхностные силы, площадь межфазной поверхности в единице объема (удельная поверхность) и другие. В данном разделе предлагается теория определения указанных параметров на основе полученных аналогов интегральной формулы Стокса для гетерогенной среды, новых уравнений, описывающих эволюцию осредненных топологических параметров межфазной поверхности и сформулированной топологической гипотезы.

В пункте 3.1 сформулирована топологическая гипотеза которая заключается в следующем. Пусть $s(t,\vec{x}',\theta,\phi)$ - функция распределения площади межфазной поверхности в единице объема гетерогенной среды, определенная в предыдущем разделе 2. По определению величина $s(t,\vec{x}',\theta,\phi)d\Omega d'V$ численно равна площади межфазной поверхности в объеме $d'V$, имеющей углы наклона нормалей к межфазной поверхности равные θ и ϕ в телесном угле $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$. Рассмотрим осредненные по межфазной поверхности функции следующего вида:

$$< \psi_i'^k(t,\vec{x}')\varphi(\vec{n}_i') >_{12} = \frac{1}{dS_{12}} \int_{dS_{12}} \psi_i'^k(t,\vec{x}')\varphi(\vec{n}_i')d'S , \qquad (24)$$

где $\varphi(\vec{n}_i')$ - скалярная функция от локальных компонент единичной нормали, $\vec{x}'$ - радиус вектор точки межфазной поверхности, dS_{12} - площадь межфазной поверхности в представительном объеме dV гетерогенной среды, $dS_{12} = s_{12}dV$, где s_{12} - удельная поверхность. Штрих указывает на принадлежность к локальным характеристикам однофазной среды, нижний индекс i- указывает на принадлежность к i – фазе, $< >_{12}$ - знак осреднения по межфазной поверхности dS_{12}, содержащейся в представительном объеме dV; верхние индексы относятся к компонентам векторов и тензоров. (Терминология и обозначения из [1]). Используя функцию распределения $s(t,\vec{x}',\theta,\phi)$ раздела 2, запишем осреднение (24) следующим образом (см. (8)):

$$s_{12} < \psi_i'^k\varphi(\vec{n}_i') >_{12} = \frac{1}{dS_{12}} \int_{dS_{12}} \psi_i'^k \int_\Omega s(t,\vec{x}',\theta,\phi)\varphi(\vec{n})d\Omega d'S , \qquad (25)$$

где $d'S = s_{12}d'V$, а Ω - область интегрирования: $\Omega = (0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le 2\pi)$.

Вычисление $s(t,\vec{x}',\theta,\phi)$ должно происходить следующим образом: нужно просуммировать площадь межфазной поверхности в представительном объеме dV, имеющую углы наклона нормалей θ и ϕ, содержащиеся в телесном угле $d\Omega$, и отнести ее к величине $d\Omega dV$. Например, указанным способом вычислена функция распределения для упаковки сфер в [2]. Смысл сказанного состоит в том, что в интеграле (25) вместо аргумента

$\vec{x}'$ функции $s(t,\vec{x}',\theta,\phi)$ можно брать значение $\vec{x}$ - координаты представительного объема dV, что будет всегда использоваться в дальнейшем при вычислении интегралов (25), и это естественное предположение будем называть топологической гипотезой. Тогда (25) в предположении топологической гипотезы можно записать в виде

$$<\psi_i'^k\varphi(\vec{n}_i')>_{12}=<\psi_i'^k>_{12}<\varphi(\vec{n}_i')>_{12}, \qquad (26)$$

Из (26) следует:

$$s_{12}\nu^k=-\frac{1}{dV}\int_{dS}\alpha_i n^k dS=-\nabla^k\alpha_i\ ,\ <\psi_i'^k n_i'^k>_{12}=-\frac{\nabla^k\alpha_i}{s_{12}}<\psi_i'^k>_{12} \qquad (27)$$

где $\nu^k=<n'^k>_{12}$, $\nabla^k=(\vec{e}^k\nabla)$, $\vec{e}^k$ - орты декартовой системы координат; $\alpha_i=\frac{dV_i}{dV}$ - объемная доля i- фазы.

В пункте 3.2 из уравнения для признака (9) получены уравнения, описывающие эволюцию осредненных топологических параметров межфазной поверхности в следующем виде:

$$\frac{1}{s_{12}}[\frac{\partial(s_{12}\nu^{ik})}{\partial t}+\nabla^k(s_{12}\vartheta^k\nu^{ik})]-\nu^{ik}\varepsilon^{pp}+\frac{1}{2}(z^{ik}+z^{ki})+\frac{1}{2}(z_s^{ik}+z_s^{ki})=0\ , \qquad (28)$$

где

$$z^{ik}=\nu^{ip}\varepsilon^{pk}+э^{ipq}\nu^{kp}\omega^q\ ,\ \ z_s^{ik}=<n'^i(n'^p e'^{pq}-n'^k n'^p n'^q e'^{pq})>_{12}, \qquad (29)$$

$э^{kpq}$ - единичный антисимметричный тензор третьего ранга Леви-Чевиты,

$$\nu^{ik}=<n'^i n'^k>_{12}. \qquad (30)$$

Тензор $s^{ik}=\frac{1}{2}s_{12}(1-\nu^{ik})$ - назовем тензором удельной поверхности. Если просуммировать (28) при i=k и учесть что сумма $\nu^{kk}=1$, то получим уравнение для удельной поверхности s_{12}.

В пункте 3.3 излагается метод дополнительного пространственного осреднения на примере получения аналогов формулы Стокса для гетерогенной среды. Суть метода заключается в сведении вычисления интегралов по линиям пересечения межфазной поверхности и некоторой поверхности в гетерогенной смеси к интегралу по межфазной поверхности, путем осреднения интегралов по указанным линиям вдоль направления нормали к поверхности, пересекающей межфазную поверхность. Осреднения проводятся на расстояниях порядка характерных размеров гетерогенности, которые намного меньше размеров представительного объема гетерогенной среды. Путем такого осреднения получены следующие аналоги формулы Стокса для гетерогенной среды:

$$\begin{aligned}
&<\vec{n}'\,\mathrm{rot}'\,\vec{F}'>_{12}s_{12}=-\mathrm{div}(<\vec{n}'\times\vec{F}'>_{12}s_{12}),\\
&<(\vec{n}'\times\vec{\nabla}')\times\vec{F}'>_{12}s_{12}=\nabla^k(<(\vec{n}'\times\vec{e}^k)\times\vec{F}'>_{12}s_{12}), \qquad (31)\\
&<\vec{n}'\times\vec{\nabla}'\Phi'>_{12}s_{12}=-\mathrm{rot}(<\Phi'\vec{n}'>_{12}s_{12}),
\end{aligned}$$

где функции $\Phi'=\Phi(t,\vec{x}'),\vec{F}'=\vec{F}(t,\vec{x}')$ заданы на межфазной поверхности.

В пункте 3.4.1 из уравнения для признака (9) получены следующие уравнения для признака вида $\Phi'=\psi_i(t,\vec{x}')\varphi(\vec{n}_i')$:

$$(A_i^{pq}+\varphi_i\nu^{pq})(\psi_i^{pq}-\psi_i\varepsilon_i^{pq})=(<V_i'^q\psi_i'>_{12}-\vartheta^q\psi_i)\nabla^q\varphi_i\ , \qquad (32)$$

$$\begin{aligned}
&\psi_i[(\vec{\nabla}\alpha_i)^2\frac{\partial s_{12}}{\partial t}-\frac{1}{2}s_{12}\frac{\partial(\vec{\nabla}\alpha_i)^2}{\partial t}]+<\psi_i'\vec{V}_i'>_{12}[(\vec{\nabla}\alpha_i)^2\vec{\nabla}s_{12}-\\
&-\frac{1}{2}s_{12}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\alpha_i)^2]+s_{12}\psi_i^{pq}(\nu^{pq}-\nabla^p\alpha_i\nabla^q\alpha_i)=0\ , \qquad (33)
\end{aligned}$$

где

$$\varphi_i=<\varphi(\vec{n}_i')>_{12}\ ,\ \psi_i=<\psi_i'>_{12}\ ,\ \psi_i^{pq}=<\psi_i'\nabla'^p V_i'^q>_{12}\ ,$$

$$A_i^{pq}=<\frac{\partial\varphi_i'}{\partial n_i'^l}n_i'^l n_i'^p n_i'^q-\frac{\partial\varphi_i'}{\partial n_i'^p}n_i'^q-\varphi_i' n_i'^p n_i'^q>_{12}\ ,$$

Следствие. Положим в (32) $\varphi(\vec{n}_i')=n_i'^m n_i'^k$, тогда из (32):

$$(A_i^{pqmk}+\nu^{mk}\nu^{pq})(\psi_i^{pq}-\psi_i\varepsilon_i^{pq})=(<V_i'^q\psi_i'>_{12}-\vartheta^q\psi_i)\nabla^q\nu^{mk}\ , \qquad (34)$$

где

$$A_i^{pqmk} = \nu^{pqmk} - \delta^{pm}\nu^{kq} - \delta^{pk}\nu^{mq}, \qquad \nu^{pqmk} = < n_i^{'p} n_i^{'q} n_i^{'m} n_i^{'k} >_{12}.$$

Из уравнения (33) получаются уравнения для функций $\vartheta_i^m = < V_i^{'m} >_{12}$ и $\pi_i = < p_i^{'} >_{12}$ если присвоить последовательно признаку значения $\psi_i^{'} = V_i^{'m}$ и $\psi_i^{'} = p_i^{'}$,где $p_i^{'}$ - локальное давление, после чего получим уравнения вида (33), в которых:

$$\psi_i = \begin{pmatrix} \vartheta_i^m \\ \pi_i \end{pmatrix}, \quad \psi_i^{'} = \begin{pmatrix} V_i^{'m} \\ p_i^{'} \end{pmatrix}, \quad \psi_i^{pq} = \begin{pmatrix} < V_i^{'m} e_i^{'pq} >_{12} \\ < p_i^{'} e_i^{'pq} >_{12} \end{pmatrix}.$$

Систему уравнений (32) можно условно рассматривать как систему уравнений для определения величин ψ_i^{pq} входящих в уравнения (33). В указанных уравнениях в качестве $\varphi(\vec{n}_i^{'})$ необходимо выбрать некоторую систему функций достаточную для получения замкнутой системы уравнений. В дальнейшем в качестве функций $\varphi(\vec{n}_i^{'})$ будут выбираться функции $\varphi(\vec{n}_i^{'}) = n_i^{'m} n_i^{'k}$, поэтому система уравнений для определения ψ_i^{pq} будет иметь вид (34). Следует отметить, что если (34) просуммировать по m при m=k то полученное уравнение выполнится тождественно, поэтому система уравнений (34) состоит из 5 независимых уравнений.

Замечание 1. Показано, что если выбрать признак $\vec{\Phi}^{'} = \psi_i(t, \vec{x}^{'})\vec{n}_i^{'}$, то уравнение для признака выполнится тождественно.

Замечание 2. Показано, что для случая, когда $\psi_i(t, \vec{x}^{'}) = V_i^{'m}$ можно получить дополнительную систему уравнений:

$$(< V_i^{'m} \nabla^{'q} V_i^{'k} >_{12} + < V_i^{'k} \nabla^{'q} V_i^{'m} >_{12})[\delta^{pq} - \frac{\nabla^p \alpha_i \nabla^q \alpha_i}{(\vec{\nabla}\alpha_i)^2}] =$$

$$= [\nabla^p - \frac{\nabla^p \alpha_i (\vec{\nabla}\alpha_i \vec{\nabla})}{(\vec{\nabla}\alpha_i)^2}] < V_i^{'m} V_i^{'k} >_{12}. \qquad (35)$$

Легко проверить, что при умножении левой и правой части (35) на $\nabla^p \alpha_i$ и суммировании по p получается 6 тождеств, поэтому (35) является в данном случае системой из 12 дополнительных уравнений для системы уравнений (32), (33) в случае когда $\psi_i^{'} = V_i^{'m}$, m=1,2,3.

Замечание 3. Еще три дополнительных уравнений можно получить из уравнения неразрывности:

$$< V_i^{'m} \nabla^{'q} V_i^{'q} >_{12} = - < \frac{V_i^{'m}}{\rho_i^{'}} \frac{d^{'}\rho_i^{'}}{dt} >_{12}, \text{ m=1,2,3,} \qquad (36)$$

где $\rho_i^{'}$ - плотность i фазы. Особенно простой вид (36) принимает, когда фаза несжимаемая и, следовательно, правая часть равна нулю.

В качестве примера получения системы уравнений для осредненных по межфазной поверхности параметров в пункте 3.5 выписаны уравнения для определения соответственно осредненных компонент тензора скоростей деформаций, вихря скорости, давления, объемной плотности лапласовских сил в случае, когда межфазной поверхностью является свободная поверхность несжимаемой ньютоновской жидкости в следующем виде:

$$\varepsilon_i^{pq} = \frac{1}{2}(\nabla^p \vartheta_i^q + \nabla^q \vartheta_i^p) + \frac{1}{2}(T_i^q \nabla^q \alpha_i + T_i^q \nabla^p \alpha_i),$$

$$\vec{\omega}_i == \mathrm{rot}\,\vec{\vartheta}_i + \vec{\nabla}\alpha_i \times \vec{T}_i, \quad (\pi_i - \pi_0)(\vec{\nabla}\alpha_i)^2 = 2\mu_i \varepsilon^{pq} \nabla^q \alpha_i \nabla^p \alpha_i + \vec{\nabla}\alpha_i \vec{\Sigma}, \qquad (37)$$

$$(\pi_i - \pi_0)(\vec{\nabla}\alpha_i)^2 = 2\mu_i \varepsilon^{pq} \nabla^q \alpha_i \nabla^p \alpha_i + \vec{\nabla}\alpha_i \vec{\Sigma},$$

$$\Sigma^i = \Sigma_0 s_{12} < n^{'i} \mathrm{div}^{'} \vec{n}^{'} >_{12} = \Sigma_0[-\nabla^i s_{12} + \nabla^q (s_{12} \nu^{iq})],$$

где

$$\vec{T} = \frac{\vec{\nabla}\alpha_i \times \vec{\nabla}\alpha_i \times \vec{\Gamma}}{(\vec{\nabla}\alpha_i)^4} - \frac{\vec{\nabla}\alpha_i}{(\vec{\nabla}\alpha_i)^2} \mathrm{div}\,\vec{\vartheta}_i, \quad \Gamma^m = 2\mu_i \vec{\varepsilon}_0^m \vec{\nabla}\alpha_i + \Sigma_0[\nabla^m s_{12} - \vec{\nabla}(s_{12} \vec{\nu}^m)],$$

$$\vec{\varepsilon}_0^k = \{\varepsilon_0^{k1}, \varepsilon_0^{k2}, \varepsilon_0^{k3}\}, \quad \vec{\nu}^k = \{\nu^{k1}, \nu^{k2}, \nu^{k3}\}, \pi_i = < p_i^{'} >_{12}, \pi_0 = < p_0^{'} >_{12},$$

где нижний индекс i относится к жидкой фазе, а нижний индекс 0 к газу, где $\vec{\Sigma}$ объемная плотность лапласовских сил. Уравнения (37) позволяют определить осредненные по МФП компоненты тензора скоростей

деформаций, вектор угловой скорости и давление, если известны компоненты тензора ν^{ik} и осредненная по МФП скорость $\vec{\vartheta}_i$. На свободной поверхности из условия отсутствия касательных напряжений имеем $z_s^{ik} = 0$, поэтому из системы уравнений (29) можно определить компоненты тензора ν^{pq}, если известен вектор скорости $\vec{\vartheta}_i$. Неизвестный вектор $\vec{\vartheta}_i$ должен определиться из системы уравнений для признака (33), (32), где $\psi' = V_i'^m$, так что $\psi_i = \vartheta^m, \psi_i^{pq} =< V_i'^m e_i'^{pq} >_{12}$, и дополнительных уравнений (35), (36).

В конце раздела в пункте 3.6 методом дополнительного пространственного осреднения вычислены объемные плотности мощности и момента импульса лапласовских сил в части интегралов по dL_{12} (см. (2)) соответственно в виде:

$$l_{12} < \Sigma_0 \vec{\tau}' \vec{V}' >_{L\Sigma} = \Sigma_0[\mathrm{div}(s_{12}\vec{\vartheta}) - \nabla^q(s_{12}\nu^{pq}\vartheta^p)], \qquad l_{12} < \Sigma_0 \vec{x}' \times \vec{\tau}' >_{L\Sigma} = -\Sigma_0[\mathrm{rot}(s_{12}\vec{x}) + \vec{e}^i \text{э}^{ipq}\nabla^l(s_{12}\nu^{ql}x^p)], \tag{38}$$

где $\vec{\tau}'$ - единичный касательный к межфазной поверхности вектор, перпендикулярный контуру dL_{12} и нормали $\vec{n}'$.

Раздел 4. Уравнения механики гетерогенных сред в случае, когда межфазная поверхность разделяет две несмешивающиеся несжимаемые ньютоновские жидкости. Рассмотрен вопрос получения осредненных уравнений механики гетерогенных сред на основе уравнений [1] для случая, когда межфазная поверхность разделяет две несмешивающиеся несжимаемые ньютоновские жидкости. Интегралы по межфазной поверхности, входящие в уравнения механики гетерогенных сред вычисляются на основе теории, изложенной в предыдущем разделе 3. При выводе системы уравнений не использованы обычно применяемые методы, требующие, например, построения ячеистой модели среды, необходимые для вычисления интегралов по межфазной поверхности. Точно учтены лапласовские силы на границе фаз, на основе аналогов формул Стокса для гетерогенной среды (31) и получены точные выражения для объемной плотности лапласовских сил и объемных плотностей работы и момента импульса лапласовских сил.

В пункте 4.1. записаны известные условия на межфазной поверхности для локальных параметров в случае несжимаемых фаз

$$\vec{V}_i' = \vec{V}_j', \tag{39}$$

$$\sigma_i'^{kl} n_i'^l + \sigma_j'^{kl} n_j'^l + \Sigma_0 n_i'^k \left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'}\right) = 0, \tag{40}$$

где нижние индексы i и j обозначают фазы, верхние индексы здесь и в дальнейшем, относятся к компонентам векторов и тензоров; $\vec{V}_i', \vec{V}_j'$ - скорости фаз, $\sigma_i'^{kl}, \sigma_j'^{kl}$ - тензоры напряжений, $n_i'^l, n_j'^l$ -компоненты единичных внешних нормалей, $\vec{n}_i' = -\vec{n}_j'$, а R_i', R_j' - главные радиусы кривизн поверхности, где

$$\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} = \mathrm{div}'\,\vec{n}_i', \quad \sigma_i'^{kl} = -p_i'\delta^{kl} + 2\mu_i e_i'^{kl},$$

где p_i' - давление, μ_i - коэффициент динамической вязкости, $e_i'^{kl} = \frac{1}{2}(\nabla'^k V_i'^l + \nabla'^l V_i'^k)$, $\nabla'^k = (\vec{e}^k \vec{\nabla}')$.

В пункте 4.2 произведено осреднение граничных условий (39)-(40) по межфазной поверхности в следующем виде:

$$\begin{aligned} & s_{12} < \vec{n}_i' >_{12} = -\vec{\nabla}\alpha_i, \quad (\mu_i \vec{\varepsilon}_i^l - \mu_j \vec{\varepsilon}_j^l) \times \vec{\nu}^l = 0, \\ & (\pi_i - \pi_j)(\vec{\nabla}\alpha_i)^2 - 2(\mu_i \vec{E}_i + \mu_i \vec{E}_j)\vec{\nabla}\alpha_i + \vec{\Sigma}\vec{\nabla}\alpha_i = 0 \end{aligned}, \tag{41}$$

где

$$\pi_i =< p_i' >_{12}, \quad \pi_j =< p_j' >_{12}, \quad s_{12} < \vec{n}_i' >_{12} = -\vec{\nabla}\alpha_i,$$

$$s_{12} = \frac{dS_{12}}{dV_{12}}, \quad \alpha_i^l = \nabla^l \alpha_i, \quad \varepsilon_i^{kl} =< e_i'^{kl} >_{12}, \vec{E}_i = \varepsilon_i^{kl}\alpha_i^l \vec{e}^k.$$

Уравнения (41) в дальнейшем используются для получения замкнутой системы уравнений механики гетерогенных среды, состоящей из несжимаемых жидких фаз.

В пунктк 4.3. записаны уравнения теории раздела 3 и их следствия для гетерогенной среды из двух фаз ньютоновских жидкостей. Величины $\vec{\Sigma}, \varepsilon_i^{pq}, \vec{\omega}_i$, вычислены в следующем виде:

$$\vec{\Sigma} = \Sigma_0[-\vec{\nabla} s_{12} + \vec{e}^{p} \nabla^k (s_{12}\nu^{kp})],$$
$$\varepsilon_k^{pq} = \varepsilon_0^{pq} + \frac{1}{2}(T_k^q \alpha_k^p + T_k^p \alpha_k^q), \vec{\omega}_k = \mathrm{rot}\,\vec{\vartheta} + \vec{\nabla}\alpha_k \times \vec{T}_k, \quad (42)$$

где k=i,j, $\varepsilon_0^{pq} = \frac{1}{2}(\nabla^p \vartheta^q + \nabla^q \vartheta^p)$, $\vec{T}_i = -\vec{T}_j = \frac{\vec{\nabla}\alpha_i \times (\vec{\nabla}\alpha_i \times \vec{\Gamma})}{(\vec{\nabla}\alpha_i)^4} - \frac{\vec{\nabla}\alpha_i}{(\vec{\nabla}\alpha_i)^2}\mathrm{div}\,\vec{\vartheta}$,

$$\Gamma^p = 2\varepsilon_0^{pq}\nabla^q \alpha_i - \frac{\Sigma^p}{\mu_i - \mu_j}.$$

Показано, что уравнения для топологических характеристик межфазной поверхности имеют следующий вид в случае гетерогенной среды, состоящей из двух фаз ньютоновских жидкостей:

$$\frac{\partial(s_{12}\nu^{mk})}{\partial t} + \mathrm{div}(s_{12}\nu^{mk}\vec{\vartheta}) + \frac{1}{2}s_{12}[\nu^{lp}\varepsilon_i^{pk} + \nu^{pk}\varepsilon_i^{pl} + (э^{lpq}\nu^{kp} + э^{kpq}\nu^{lp})\omega_i^q] = 0. \quad (43)$$

Так как $\nu^{kk} = 1$, поэтому, суммируя (43) при m=k получим следующее уравнение для функции удельной поверхности s_{12}:

$$\frac{\partial s_{12}}{\partial t} + \mathrm{div}(s_{12}\vec{\vartheta}) + s_{12}[\nu^{kp}\varepsilon_i^{pk} + э^{kpq}\nu^{kp}\omega_i^q] = 0, \quad (44)$$

где $э^{kpq}$ - антисимметричный тензор Леви-Чевиты. Уравнения для средних топологических характеристик межфазной поверхности ν^{pq}, через которые записывается тензор удельной поверхности $s^{pq} = \frac{1}{2}(\delta^{pq} - \nu^{pq})$, позволяют точным образом определить удельную поверхность, объемные плотности лапласовских сил в гетерогенной среде из (37), а также объемные плотности мощности и момента импульса лапласовских сил гетерогенной среды в части интегралов (38).

В пункте 4.3.3. записаны уравнения для величин $\vec{\vartheta}, \pi_i, \pi_j$.Для этого получена система уравнений (33), (34) для признака вида $\Phi' = \psi_i(t, \vec{x}')n_i'^m n_i'^k$. Уравнения для величин $\vec{\vartheta}, \pi_i, \pi_j$ получаются из уравнения для признака (33) путем задания признаку соответственно значений $\psi_i(t, \vec{x}') = \vec{V}_i', p_i', p_j'$. Для замыкания указанных уравнений в случае гетерогенной среды из двух ньютоновских жидкостей, использованы дополнительные уравнения, которые получены из граничных условий для локальных параметров на МФП в виде (41), выражающих факт равенства векторов скоростей и касательных напряжений, и равенство разности нормальных напряжений лапласовскому давлению. Из уравнения для признака в форме (34) записаны уравнения для вспомогательных величин $< V_i'^m \nabla^p V_i'^l >_{12}$, $< p_i' \nabla^p V_i'^l >_{12}$, $< e_i'^{pq} e_i'^{ml} >_{12}$, $< e_i'^{pq} \Omega_i'^l >_{12}$, $< \Omega_i'^m \Omega_i'^l >_{12}$ соответственно в виде (уравнения для j – фазы получаются заменой индекса i на j):

$$-\frac{1}{2}\nu^{kq}(E_{\psi i}^{mq} - \psi_i \varepsilon_i^{mq}) - \frac{1}{2}\nu^{mq}(E_{\psi i}^{kq} - \psi_i \varepsilon_i^{kq}) + \nu^{mk}\nu^{pq}(E_{\psi i}^{pq} - \psi_i \varepsilon_i^{pq}) -$$
$$-\frac{1}{2}(\nu^{kq} э^{lmq} + \nu^{mq} э^{lkq})\Omega_{i\psi_i}^l = (< V_i'^q \psi_i' >_{12} - \vartheta_i^q \psi_i)\nabla^q \nu^{mk}, \quad (45)$$

$$(E_i^{spq} - a^p a^m E_i^{smq}) + \frac{1}{2}\Omega_i^{sl}(э^{lpq} - a^p a^m э^{lmq}) + (E_i^{qps} - a^p a^m E_i^{qms}) +$$
$$+\frac{1}{2}\Omega_i^{ql}(э^{lps} - a^p a^m э^{lms}) - (\nabla^q W_i^{sq} - a^p a^m \nabla^m W_i^{sq}) = 0, \quad (46)$$

$$E_i^{sqq} = 0, \quad s = 1,2,3. \quad (47)$$

$$(E_{iP}^{ml} + \frac{1}{2}э^{sml}\Omega_{iP}^s)\nabla^p \alpha_i - 2(\mu_i - \mu_j)E_{ie^{pq}}^{ml} +$$
$$+\Sigma_0[(\varepsilon_i^{ml} + \frac{1}{2}э^{sml}\omega_i^s)\nabla^q s^{pq} - A_i^{ml} s^{pq}\nabla^q \alpha_i] = 0, \quad (48)$$

$$-\mathrm{div}(\vec{\nabla}\alpha_i \times < V_i'^m \vec{\nabla}' V_i'^l >_{12}) = \vec{\nabla}\alpha_i \mathrm{rot}[\vec{e}^p(E_i^{mpl} + \frac{1}{2}э^{qpl}\Omega_i^{mq})] =$$
$$= [\vec{e}^p \times \vec{\nabla}\alpha_i, \vec{\nabla}(E_i^{mpl} + \frac{1}{2}э^{qpl}\Omega_i^{mq})] = -\nabla^s \alpha_i (э^{spq} E_{ie^{ql}}^{pm} - \frac{1}{2}\delta^{ms} < \omega_i'^q e_i'^{ql} >_{12} +$$
$$+\frac{1}{2}\delta^{ls} < \omega_i'^p e_i'^{pm} >_{12} + \frac{1}{4}э^{pml} < \omega_i'^s \omega_i'^p >_{12}), \quad (49)$$

$$E^{mm}_{ie^{pq}} = 0, \quad < \omega_i^{'p} e_i^{'qq} >_{12} = 0 , \qquad (50)$$

где

$$E^{pq}_{\psi_i} = \frac{1}{2}(\psi_i^{pq} + \psi_i^{qp}) , \quad \Omega^{l}_{i\psi_i} =< \psi_i^{'} \Omega_i^{'l} >_{12} ,$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{\nabla}\alpha_i}{\sqrt{(\vec{\nabla}\alpha_i)^2}} , \quad W_i^{sq} =< V_i^{'s} \nabla^{'p} V_i^{'q} >_{12} , \quad \Omega_i^{ql} =< V_i^{'q} \Omega_i^{'l} >_{12} ,$$

$$E_i^{spq} = \frac{1}{2}(< V_i^{'s} \nabla^{'p} V_i^{'q} >_{12} + < V_i^{'s} \nabla^{'q} V_i^{'p} >_{12}) =< V_i^{'s} e_i^{'pq} >_{12} ,$$

$$A_i^{ml} = \nabla^l T_i^m - \frac{\nabla^l \alpha_i}{(\vec{\nabla}\alpha_i)^2}[(\vec{\nabla}\alpha_i \vec{\nabla}) T_i^m + \nabla^p (\nabla^m \vartheta^p + T_i^p \nabla^m \alpha_i)] ,$$

$$\vec{T}_i = (-2\vec{\varepsilon}_0 + \frac{\vec{\Sigma}}{\mu_i - \mu_j}) + \frac{\vec{\nabla}\alpha_i}{(\vec{\nabla}\alpha_i)^2}(2\vec{\varepsilon}_0 \vec{\nabla}\alpha_i - \frac{\vec{\Sigma}\vec{\nabla}\alpha_i}{\mu_i - \mu_j} - \operatorname{div}\vec{\vartheta}) ,$$

$$E^{ml}_{ie^{pq}} =< e_i^{'pq} e_i^{'ml} >_{12} .$$

В пункте 4.4 получены для каждой фазы уравнения сохранения массы и импульса соответственно в следующем виде:

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i \vec{V}_i) = 0 . \qquad (51)$$

$$\rho_i^0 \frac{\partial(\alpha_i \vec{V}_i)}{\partial t} = \nabla^k \vec{\Pi}_i^k + (\alpha_i^p \pi_i - 2\mu_i \alpha_i^k \varepsilon_i^{pk}) \vec{e}^p , \qquad (52)$$

где

$$\Pi_i^{kp} = \sigma_i^{kp} - \rho_i^0 \alpha_i [V_i^p V_i^k + < \Delta V_i^{'p} \Delta V_i^{'k} >_i] ,$$

$$\sigma_i^{kp} = (-p_i \delta^{pk} + 2\mu_i e_i^{pk})\alpha_i + \mu_i [(V_i^k - \vartheta_i^k)\alpha_i^p + \frac{1}{2}(V_i^p - \vartheta_i^p)\alpha_i^k] .$$

В пункте 4.5 записаны уравнения сохранения массы и импульса для гетерогенной среды соответственно в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 , \qquad (53)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} = \nabla^k \vec{\Pi}^k . \qquad (54)$$

Плотность ρ гетерогенной среды равна $\rho = \rho_i^0 \alpha_i + \rho_j^0 \alpha_j$, средняя скорость гетерогенной среды

$\vec{V} = \frac{\rho_i^0 \alpha_i \vec{V}_i + \rho_j^0 \alpha_j \vec{V}_j}{\rho}$. Тензор полных напряжений гетерогенной среды равен:

$$\Pi^{kp} = \Pi_i^{kp} + \Pi_j^{kp} + \Sigma_0 s_{12}(\delta^{kp} - \nu^{kp}) .$$

Выражение для тензора полных напряжений гетерогенной среды удобно использовать при задании граничных условий в напряжениях на границе раздела гетерогенной и однофазной сред. Тензор $\Sigma^{kp} = \frac{1}{2}\Sigma_0 s_{12}(\delta^{kp} - \nu^{kp})$ называется тензором поверхностной энергии. Легко видеть, что след тензора поверхностной энергии равен $\Sigma_0 s_{12}$ - поверхностной энергии единицы объема гетерогенной среды.

В пункте 4.6 записано уравнение сохранения энергии в следующем виде:

$$\rho_i^0 \alpha_i \frac{d_i e_i}{dt} = \nabla^k \psi_i^k + s_{12} < \psi_i^{'k} n_i^{'k} >_{12} , \qquad (55)$$

где

$$\psi_i^k = \alpha_i [< \psi_i^{'k} >_i - \rho_i^0 < \Delta e_i^{'} \Delta V_i^{'k} >_i] , \; e_i =< e_i^{'} >_i , \; e_i^{'} = u_i^{'} + \frac{1}{2}(\vec{V}_i^{'})^2 ,$$

$$\psi_i^{'k} = \vec{\sigma}_i^{'k} \vec{V}_i^{'} - q_i^{'k} , \; e_i = u_i + \frac{1}{2}[(\vec{V}_i)^2 + < (\Delta \vec{V}_i^{'})^2 >_i] ,$$

где $u_i^{'}, \vec{q}_i^{'}$ - соответственно внутренняя энергия единицы массы и вектор потока тепла i – фазы,

$$\alpha_i < \vec{\sigma}_i^{'k} \vec{V}_i^{'} >_i = \alpha_i \{-p_i V_i^k + \mu_i [\nabla^p (V_i^p V_i^k) + \frac{1}{2} \nabla^k (V_i^p)^2]\} -$$

$$-\mu_i [\alpha_i^p < V_i^{'p} V_i^{'k} >_{12}) + \frac{1}{2} \alpha_i^k < V_i^{'p} V_i^{'p} >_{12})] -$$

$$-\alpha_i < \Delta p_i^{'} \Delta V_i^{'k} >_i + \mu_i [\nabla^p (\alpha_i < V_i^{'p} V_i^{'k} >_i) + \frac{1}{2} \nabla^k (\alpha_i < V_i^{'p} V_i^{'p} >_i)] .$$

$$s_{12} < \psi_i^{'k} n_i^{'k} >_{12} = -\frac{\mu_j}{\mu_i - \mu_j} \alpha_i^k < p_i^{'} V_i^{'k} >_{12} + \frac{\mu_i}{\mu_i - \mu_j} \alpha_i^k < p_j^{'} V_j^{'k} >_{12} -$$

$$-\frac{\mu_i}{\mu_i - \mu_j} \Sigma_0 s_{12} < V_i^{'k} n_i^{'k} \mathrm{div}^{'} \vec{n}_i^{'} >_{12} ,$$

$$\Sigma_0 s_{12} < V_i^{'k} n_i^{'k} \mathrm{div}^{'} \vec{n}_i^{'} >_{12} = -[\mathrm{div}(s_{12} \vec{\vartheta}) - \nabla^q (s_{12} \nu^{pq} \vartheta^q)] - s_{12} \nu^{pq} \varepsilon^{pq} .$$

Последняя формула является точным выражением объемной плотности мощности лапласовских сил в гетерогенной среде в случае несжимаемых фаз в части интеграла по межфазной поверхности. Аналогичное уравнение энергии для j– фазы получается из (55) заменой индекса i на j и α_i на $\alpha_j = 1 - \alpha_i$.

В пункте 4.7. получено уравнение сохранения момента импульса для гетерогенной среды состоящей из двух фаз ньютоновских жидкостей, которые для симметричных тензоров напряжений фаз является следствием уравнения сохранения импульса фаз (52).

Раздел 5. Система уравнений механики гетерогенных сред в криволинейной ортогональной системе координат в случае, когда межфазной поверхностью является поверхность раздела несжимаемых ньютоновских жидкостей. При решении конкретных задач механики гетерогенных сред часто встречаются задачи обладающие симметрией, например, сферической, осевой, а также бывает целесообразно выбрать ортогональную криволинейную систему координат, наиболее подходящую для конкретной задачи. В данном разделе записаны уравнения предыдущего раздела 4 в произвольной ортогональной криволинейной системе координат. Указанная запись является актуальной в связи с тем, что уравнения для средних топологических характеристик межфазной поверхности, а также для других осредненных по межфазной поверхности параметров, таких как скорости, компоненты тензора напряжений, угловой скорости, давления и других записаны в декартовой системе координат не в инвариантной форме, а поэтому их запись в ортогональной криволинейной системе координат является не тривиальной задачей. Уравнения записаны в случае, когда межфазной границей является поверхность раздела несмешивающихся несжимаемых ньютоновских жидкостей. В частности, в пункте 5.1 приведены указанные уравнения в сферической системе координат в той части, в которой они будут использованы в следующем разделе. К известным общим уравнениям механики гетерогенных сред, полученных методом пространственного осреднения [1], добавлена система уравнений для определения осредненных по межфазной границе параметров фаз, замыкающая общую систему уравнений, при этом добавленная система уравнений записана в ортогональной криволинейной системе координат. Здесь же в компактной форме приведены известные в другой записи соотношения, для определения производных от векторов базиса произвольной ортогональной криволинейной системы координат:

$$(\vec{э}^l \vec{\nabla}) \vec{э}^m = \tilde{g}^{(l)m} \vec{э}^l - \delta^{(m)l} \tilde{g}^{(m)p} \vec{э}^p , \text{ где } \tilde{g}^{lk} = \frac{1}{h^{(k)}} \frac{\partial h^l}{\partial \xi^{(k)}} , \qquad (57)$$

где $\vec{э}^l, h^l, \xi^l$ - соответственно единичные орты , коэффициенты Лямэ и координаты ортогональной системы координат.

Раздел 6. Спекание упаковки капель жидкости, окруженной другой жидкостю. Решается задача о спекании упаковки капель несжимаемой ньютоновской жидкости, находящейся в другой несжимаемой жидкости. Рассмотрим в невесомости упаковку капель несжимаемой ньютоновской жидкости (i- фаза) находящейся в другой несжимаемой жидкости(j- фаза), рис.1.

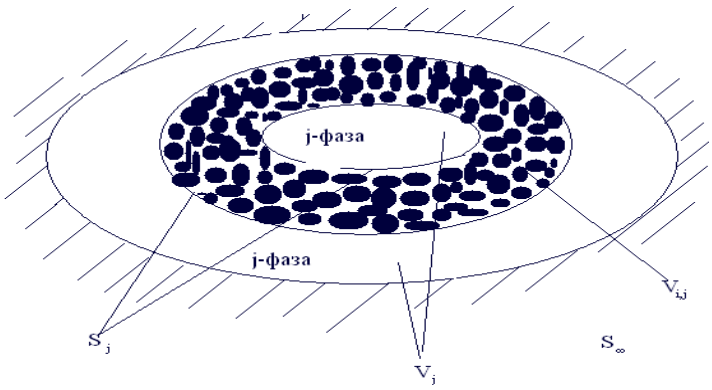

Рис.1. Упаковка капель.

В закрашенной области находятся капли i -фазы, окруженные жидкостью j-фазы и которые образуют вместе с j-фазой гетерогенный объем V_{ij}. Капли i-фазы под действием поверхностных сил слипаются, и со временем образуется сложная область занятая i-фазой в гетерогенной области V_{ij}, отделенная от j-фазы межфазной поверхностью S_{12}. Гетерогенная область V_{ij} отделена поверхностью S_j от однофазной области V_j, занятой j-фазой. Пусть S_∞ - внешняя поверхность однофазной области V_j. На межфазной поверхности S_{12} в гетерогенной среде V_{ij}, отделяющей i и j- фазы действуют лапласовские силы, под влиянием которых, первоначально находящаяся в покое упаковка капель начинает движение. Нашей задачей является нахождение решения уравнений раздела 4, моделирующих задачу о спекании капель.

В пункте 6.1 записаны интегральные законы справедливые для задачи о спекании. Закон сохранения общей массы i-фазы M_i имеет вид

$$M_i = \oint_{Vij} \rho_i^0 \alpha_i(t,x) dV . \qquad (58)$$

Теорема вириала записана в следующей форме:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} = 2(E - \Sigma_0 S - \Sigma_\infty S_\infty) + 3\Pi + 3p_н(V_i + V_j) . \qquad (59)$$

В уравнении (59) S - общая площадь межфазной поверхности, а момент инерции I, кинетическая энергия E, интеграл сил давления Π равны

$$I = \sum_{k=i,j} \rho_k^0 \int_{V_k} (x'^p)^2 d'V , \; E = \sum_{k=i,j} \frac{1}{2}\rho_k^0 \int_{V_k} (\vec{V}_k')^2 d'V , \; \Pi = \sum_{k=i,j} \int_{V_k} p_k' d'V .$$

Уравнение живых сил имеет вид:

$$\frac{dE}{dt} = \Sigma_0 \frac{dS}{dt} - \Sigma_\infty \frac{dS_\infty}{dt} - \dot{E}_T , \text{ где } \dot{E}_T = \sum_k 2\mu_k \int_{V_k} \left(e_k'^{pq}\right)^2 d'V . \qquad (60)$$

Предполагая адиабатичность процесса спекания для области $V_{ij} + V_j$ занятой i и j фазами, интегральный закон сохранения энергии можно записать следующим образом:

$$E + \Sigma_0 S + \Sigma_\infty S_\infty + E_{вн} = E_0 = \text{const} , \qquad (61)$$

где $E_{вн}$ - внутренняя энергия фаз. Дифференцируя (61) по времени и сравнивая с (60) полученное уравнение, приходим к выводу, что $\dot{E}_T = \frac{dE_{вн}}{dt}$.

Принцип минимума для задачи спекания является записью того факта, что виртуальная мощность внутренних сил, действующих в спекаемой упаковке и окружающей ее жидкости j-фазы равна виртуальной мощности внешних сил. Показано, что указанный виртуальный принцип минимума имеет следующую запись:

$$\delta[\sum_{k=i,j} \mu_k \int_{V_k} \left(e_k'^{pq}\right)^2 d'V + \Sigma_0 \frac{dS}{dt} + \Sigma_\infty \frac{dS_\infty}{dt}] = \sum_{k=i,j} \mu_k \int_{V_k} \left(\delta e_k'^{pq}\right)^2 d'V > 0 .$$

Из неравенства следует, что величина в квадратных скобках является минимальной для действительных полей скоростей и для заданного положения межфазной поверхности S_{12} и заданного момента времени. Таким образом, имеем следующий принцип минимума для рассматриваемой задачи спекания:

$$\sum_{k=i,j} \mu_k \int_{V_k} \left(e_k'^{pq}\right)^2 d'V + \Sigma_0 \frac{dS}{dt} + \Sigma_\infty \frac{dS_\infty}{dt} = \min . \qquad (62)$$

Учитывая уравнение живых сил (60) и уравнение сохранения полной энергии (61), принцип минимума можно переписать в другом виде:

$$\Sigma_0 \frac{dS}{dt} + \Sigma_\infty \frac{dS_\infty}{dt} - \frac{dE}{dt} = \min . \qquad (63)$$

Таким образом, принцип минимума (63) заключается в том, что при заданном положении межфазной поверхности в адиабатической спекаемой системе несжимаемых i и j фаз ньютоновской жидкости, производная по времени разности поверхностной и кинетической энергий минимальна на действительном поле скоростей.

В пункте 6.2 записаны уравнения задачи о спекании капель в сферически симметричном случае. На рис. 1 это соответствует случаю, когда V_{ij} является сферическим слоем, а S_j-поверхность сфер. Уравнения для сферической симметрии получаются из уравнений раздела 5, приравниванием нулю производных по углам θ и ϕ сферической системы координат от всех параметров входящих в систему уравнений. Показано, что после указанных действий система уравнений примет следующий вид:

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \alpha_i V_i\right) = 0 , \qquad (64)$$

$$\frac{\partial\left(\rho_i^0 \alpha_i V_i\right)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}(\alpha_i P_i + \alpha_i \rho_i V_i^2 + \frac{4\mu_i \alpha_i V_i}{r}) +$$

$$+ 2\rho_i^0 \alpha_i \frac{W_i^{\theta\theta} - W_i^{rr}}{r} + \pi_i \alpha_r + 4\mu_i \frac{\vartheta}{r}\alpha_r - \frac{12\mu_i \alpha_i V_i}{r^2} , \qquad (65)$$

где $V_i = V_i^r$, $\vartheta = \vartheta^r$ - соответственно средние по объему и по межфазной поверхности радиальные скорости, где

$$P_i = p_i + \frac{1}{3} W_i^{rr} , \; W_{iэ}^{qs} = a^{pq} a^{ks} < \Delta V_i'^p \Delta V_i'^k >_i , \; W_i^{\theta\theta} = W_i^{\phi\phi},$$

$$\alpha_i V_i + (1-\alpha_i) V_j = 0 , \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \vartheta^r \alpha_r = 0, \text{ где } \alpha_r = \frac{\partial \alpha_i}{\partial r} , \qquad (66)$$

$$W_{iэ}^{qs} = \begin{pmatrix} W_i^{rr} & 0 & 0 \\ 0 & W_i^{\theta\theta} & \\ 0 & 0 & W_i^{\phi\phi} \end{pmatrix}, \; a^{pq} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

$$V_i^\theta = 0, \quad V_i^\phi = 0 , \quad \nu^{\theta\theta} - \nu^{\phi\phi} = 0 , \quad \nu^{\theta\phi} = 0 , \; \vartheta^\theta = \vartheta^\phi = 0 , \; \vec{\omega} = 0 ,$$

$$\varepsilon_{iэ}^{pq} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{\phi\phi} \end{pmatrix} = \frac{\vartheta}{r}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \nu_э^{lk} = \begin{pmatrix} \nu^{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(1-\nu^{rr}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(1-\nu^{rr}\right) \end{pmatrix},$$

где нижний индекс э указывает на компоненты векторов и тензоров в ортогональной криволинейной системе координат.

В пункте 6.2.5 получено уравнение сохранения импульса гетерогенной среды в сферически симметричном случае:

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} = \frac{\partial \Pi^{rr}}{\partial r} + Y_э^1(\Pi), \qquad (67)$$

где

$$Y_э^1(\Pi) = \frac{2}{r}\Pi^{rr} - \frac{1}{r}\left(\Pi^{\theta\theta} + \Pi^{\phi\phi}\right) = -\frac{8\mu_i \alpha_i V_i}{r^2} - \frac{8\mu_j \alpha_j V_j}{r^2} + \frac{\Sigma_0 s_{12}\left(1 - 3\nu^{rr}\right)}{r} -$$

$$-\frac{\rho}{r}[V^2 + \varepsilon_i \varepsilon_j \left(V_i - V_j\right)^2] + \frac{2}{r}(W^{rr} - W^{\theta\theta}),$$

$$\Pi^{rr} = -P - \frac{4\mu_i \alpha_i V_i}{r} - \frac{4\mu_j \alpha_j V_j}{r} + \Sigma_0 s_{12}\left(1 - \nu^{rr}\right) - \rho[V^2 + \varepsilon_i \varepsilon_j \left(V_i - V_j\right)^2] ,$$

$$\Pi^{\theta\theta} = \Pi^{\phi\phi} = -P + \frac{2\mu_i \alpha_i V_i}{r} + \frac{2\mu_j \alpha_j V_j}{r} + \frac{1}{2}\Sigma_0 s_{12}\left(1 + \nu^{rr}\right) + W^{rr} - W^{\theta\theta} ,$$

$$\rho = \alpha_i \rho_i^0 + \alpha_j \rho_j^0 , \qquad \varepsilon_k = \alpha_k \rho_k / \rho \;\; , \; k=i, j, \;\; V = \varepsilon_i V_i + \varepsilon_j V_j ,$$

$$P = \alpha_i P_i + \alpha_j P_j , \qquad W_э^{pq} = \alpha_i \rho_i^0 W_{iэ}^{pq} + \alpha_j \rho_j^0 W_{jэ}^{pq} .$$

В пункте 6.2.6 записаны уравнения для средних топологических параметров МФП в сферически симметричном случае:

$$\frac{\partial\left(s_{12}\nu^{rr}\right)}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\vartheta s_{12}\nu^{rr}\right)}{\partial r}-\frac{2\vartheta}{r}s_{12}\nu^{rr}=0\,, \qquad (68)$$

$$\frac{\partial s_{12}}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\vartheta s_{12}\right)}{\partial r}+\frac{\vartheta}{r}s_{12}(1-\nu^{rr})=0\,. \qquad (69)$$

В пункте 6.3.1 показано, что из уравнений (45)-(50) в случае сферической симметрии следует следующее уравнение:

$$<V'^{r}\psi_i'>_{12}\frac{\partial}{\partial r}\ln\left(\frac{s_{12}\nu^{rr}}{\alpha_r}\right)+\psi_i\frac{\partial}{\partial t}\ln\left(\frac{s_{12}\nu^{rr}}{\alpha_r}\right)=0\,, \qquad (70)$$

где функция ψ_i сомножитель в признаке вида $\Phi'=\psi_i(t,\vec{x}')\varphi(\vec{n}_i')$, $\alpha_r=\frac{\partial\alpha_i}{\partial r}$.

В пункте 6.3.2 получено решение уравнений для топологических характеристик МФП (68)-(69) в сферически симметричном случае в следующем виде:

$$\frac{\alpha_r}{s_{12}\nu^{rr}}=f(\alpha),\qquad \nu^{rr}=\frac{1}{1+\frac{f(\alpha)N(\alpha)}{r^3}}\,, \qquad (71)$$

где f и N – произвольные функции $\alpha=\alpha_i$. Подставим (71) в (70), учитывая, что из (66) $\vartheta=-\alpha_t/\alpha_r$ получим:

$$\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}(<V_i'^{r}\psi_i'>_{12}\alpha_r+\psi_i'\alpha_t)=0\,. \qquad (72)$$

Из (72) выбран случай, когда $f'(\alpha)=0$, откуда $f(\alpha)=f_0=\text{const}$. Задавая начальные условия в виде $\alpha(0,r)=\alpha_0(r)$ (откуда $r=r_0(\alpha_0)$) и $\nu^{rr}=\nu^{rr}(0,r)$, получим:

$$\nu^{rr}(t,r)=\frac{1}{1+\frac{r_0^3(\alpha)}{r^3}\left[-1+\frac{1}{\nu^{rr}(0,r_0(\alpha))}\right]} \qquad (73)$$

В пункте 6.3.3 определена функция обемной доли $\alpha_i(t,r)$ и ϑ - средняя скорость на МФП, из уравнений (45)-(50) записанных в сферической системе координат в сферически симметричном случае для признаков $\psi_i'=p_i'-p_j',e_i'^{rr},V_i'^{r}$ в следующем виде:

$$\vartheta=\frac{\Phi'(t)}{r^2},\quad \alpha=F(\frac{r^3}{3}-\Phi(t))\,, \qquad (74)$$

где $\Phi(t)$ произвольная функция времени t, $F(\alpha)$ - произвольная функция α.

В пункте 6.3.4 получены следующие уравнения для функций V_i и V_j:

$$\alpha_iV_i+\alpha_jV_j=0\,,\quad -\Phi'(t)\alpha_i+r^2\alpha_iV_i=\psi(t)\,, \qquad (75)$$

где ψ(t)- произвольная функция времени. Показано, что неизвестные функции выражаются через радиусы слоя сферической упаковки ρ и R (где ρ <R) в виде

$$\psi(t)=\frac{R^2R'-\rho^2\rho'}{\frac{1}{\alpha_i(t,R)}-\frac{1}{\alpha_i(t,\rho)}}\,,\ \Phi'(t)=\frac{R^2R'\alpha_i(t,R)-\rho^2\rho'\alpha_i(t,\rho)}{\alpha_i(t,R)-\alpha_i(t,\rho)}\,. \qquad (75)$$

Пусть при t=0 упакованы сферические капли i- фазы, диаметром d, тогда

$$\nu^{rr}(0,r)=1/3,\qquad s_{12}(0,r)=6\alpha_i(0,r)/d\,, \qquad (76)$$

откуда $\alpha_i(0,r)=y_0\exp(2f_0/r)$, где y_0 и f_0- неизвестные постоянные. Удовлетворение указанным начальным условиям приводит к следующим выражениям для искомых функций:

$$\alpha_i(t,r)=y_0\exp(\frac{2f_0}{d}L)\,,\ \frac{1}{\nu^{rr}}=1+2\frac{L^3}{r^3}\,,\ s_{12}=\frac{2y_0}{d}\frac{r^2}{L^2}\left(1+2\frac{L^3}{r^3}\right)\exp\left(\frac{2f_0}{d}L\right), \qquad (77)$$

где $L=\sqrt[3]{r^3+\varphi}$, $\varphi(t)=3[\Phi(0)-\Phi(t)]$. (78)

В пунктах 6.3.7-6.3.8 определены полные напряжения в гетерогенной смеси и затем записаны условия равенства полных напряжений на границах гетерогенной области в системах координат связанных с указанными границами в случае, когда центральная область упаковки занята j – фазой в следующей форме:

$$-P(t,x)-\frac{4(\mu_i-\mu_j)\alpha_i(t,x)x'}{x}+\Sigma_0 s_{12}(t,x)\left(1-\nu^{rr}(t,x)\right)-\rho_j^0\frac{x'^2}{1-\alpha_i(t,x)}= \qquad =-p_{jx}(t,x)-\rho_j^0 W_{jx}^{rr}(t,x),$$

$$x=\begin{pmatrix}\rho\\ R\end{pmatrix}, \qquad (79)$$

где $W_k^{pq}=<\Delta V'^p\Delta V'^q>_k$, нижний индекс ρ относится к параметрам в центральной области, а нижний индекс R - к параметрам в области $R<r<R_\infty$.

В пункте 6.3.9. сформулированы дополнительные граничные условия на границах гетерогенной среды использующиеся в дальнейшем для определения неизвестных функций ρ(t) и R(t). В качестве дополнительных граничных условий использованы условия равенства полных касательных напряжений, как условия существования неразмываемых границ гетерогенной области. Указанные дополнительные условия имеют следующий вид:

$$-P(t,x)+\frac{2(\mu_i-\mu_j)\alpha_i(t,x)x'}{x}+\frac{1}{2}\Sigma_0 s_{12}(t,x)\left(1+\nu^{rr}(t,x)\right)+$$
$$+W^{rr}(t,x)-W^{\theta\theta}(t,x)=-p_{jx}(t,x)-\rho_j^0 W_{jx}^{\theta\theta}(t,x), \qquad (80)$$

Вычитая (80) и (79) получим следующие уравнения на границах гетерогенной области:

$$\frac{6(\mu_i-\mu_j)\alpha_i(t,x)x'}{x}+\frac{1}{2}\Sigma_0 s_{12}(t,x)\left(-1+3\nu^{rr}(t,x)\right)+\rho_j^0\frac{x'^2}{1-\alpha_i(t,x)}+$$
$$+\{[W^{rr}(t,x)-\rho_j^0 W_{jx}^{rr}(t,x)]-[W^{\theta\theta}(t,x)-\rho_j^0 W_{jx}^{\theta\theta}(t,x)]\}=0, \qquad (81)$$

Величины в квадратных скобках можно трактовать как разности удвоенных радиальных и касательных пульсационных энергий гетерогенной смеси и j- фазы на границах гетерогенной области. В дальнейших вычислениях величины в фигурных скобках предполаглись малыми и не учитывались. Тогда из системы обыкновенных дифференциальных уравнений (81) можно определить неизвестные функции ρ(t) и R(t)-границы гетерогенной области.

В пункте 6.3.10 проведено обезразмеривание системы уравнений для определения радиусов упаковки (81) в следующей форме:

$$\frac{6}{L_0}z'-2\frac{\phi}{\left(z^3+\phi\right)^{\frac{2}{3}}}+\frac{zz'^2}{a(z)[1-a(z)]}=0,\ a(z)=y_0\exp\left(\frac{2f_0}{\varepsilon}\left(z^3+\phi\right)^{\frac{1}{3}}\right), \quad (82)$$

где $z=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$, $t_0=R_0\sqrt{\frac{\rho_j^0 d}{\Sigma_0}}$, $\xi=\frac{\rho}{R_0}$, $\eta=\frac{R}{R_0}$, $\phi=\frac{\varphi}{R_0^3}$, $L_0=\frac{R_0}{\mu_i-\mu_j}\sqrt{\frac{\rho_j^0\Sigma_0}{d}}$,

где L_0 - безразмерное число Лапласа, которое может быть отрицательной величиной, если $\mu_i<\mu_j$. Например, модуль безразмерное число Лапласа $|L_0|$, для органических жидкостей граничащих с водой, изменяется от 1000 и до больших величин. Указанные значения модуля числа Лапласа следуют из справочных данных для температур $10-60^0C$, пограничного натяжения воды на границе с органическими жидкостями $5-50\frac{дин}{см}$, вязкостей $0.2\cdot10^{-3}-20\cdot10^{-3}\frac{г}{см\cdot сек}$, размеров капель $d\sim10^{-3}см$ и радиуса упаковки $R_0\sim10см$. В качестве замыкающего уравнения для системы (2) использовано дифференциальное условие сохранения объема i-фазы:

$$(\eta^2\eta'+\frac{\phi'}{3})a(\eta)-(\xi^2\xi'+\frac{\phi'}{3})a(\xi)=0. \qquad (83)$$

Для системы уравнений (82), (83) запишем, учитывая (78), следующие начальные условия:

$$t=0,\quad \xi=\xi_0,\quad \eta=1,\quad \phi=0. \qquad (84)$$

В пункте 6.3.11 записаны уравнения задачи о спекании сферической упаковки в случае, когда центральная область упаковки занята i- фазой, которые в безразмерном виде записаны следующим образом:

$$\frac{6}{L_0}\eta'-2\frac{\phi}{\left(\eta^3+\phi\right)^{\frac{2}{3}}}+\frac{\eta\eta'^2}{a(\eta)[1-a(\eta)]}=0,$$
$$-\frac{6}{L_0}\xi'-2\frac{\phi}{\left(\xi^3+\phi\right)^{\frac{2}{3}}}\frac{a(\xi)}{1-a(\xi)}+\frac{\gamma\xi\xi'^2}{a(\xi)[1-a(\xi)]}=0 \qquad (85)$$

$$\xi^2\xi'+(3\eta^2\eta'+\phi')a(\eta)-(3\xi^2\xi'+\phi')a(\xi)=0. \qquad (86)$$

где $\gamma = \rho_i^0 / \rho_j^0$. В отличие от случая предыдущего пункта, когда в центральной области спекания находится j-фаза, в систему уравнений входит еще одно безразмерное число γ, наряду с числом Лапласа.

В пунктах 6.3.12-6.3.13 решены задачи о спекании сферической упаковки для случая, когда центральная область упаковки занята j- фазой и i фазами соответственно для времен близких к началу спекания. Выражая из систем квадратных уравнений (82) и (85) безразмерные скорости границ упаковки, перед корнями можно выбрать знаки следующими 4 способами: 1) плюс, плюс, 2) минус, плюс, 3) плюс, минус, 4) минус, минус. В четвертом способе записи, очевидно, получается тривиальное решение. Далее рассмотрены три первых способа записи уравнений. В начальный момент времени, когда заданы начальные условия, необходимо выбрать один из трех указанных выше способов записи систем уравнений. Для этого нужно использовать условие того, что в результате спекания внутренняя энергия упаковки и окружающей ее жидкости увеличивается. Из уравнения сохранения полной энергии (61), пренебрегая изменением поверхностной энергией на внешней границе $r = R_\infty$ указанное условие запишем в следующем виде:

$$-\frac{dE_{вн}}{dt} = \Sigma_0 \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} < 0 . \qquad (87)$$

Кроме этого систему уравнений нужно выбирать из принципа минимума (63), сравнивая для каждого способа записи системы уравнений разности соответственно производных по времени поверхностной и кинетической энергий. Для того чтобы пользоваться указанными условиями выбора нужной системы уравнений необходимо вычислить производные по времени поверхностной энергии и кинетической энергии. Для вычисления кинетической энергии необходимо определить энергию пульсационных движений, которая в рассматриваемой постановке не вычисляется.

В пункте 6.12.2 численно решены нелинейные уравнения (82)-(83) для определения радиусов упаковки в зависимости от времени в случае, когда центральная область занята j – фазой. На рис.2-5 приведены графики зависимостей от времени радиусов упаковки и общей площади межфазной поверхности для чисел Лапласа равных 1400 и 100. На рис.2 сферически симметричное решение существует для значения безразмерного времени равного 1.016. До значений времени равного 0.86 происходит увеличение общей безразмерной площади МФП, а после указанного времени и до времени равного 1.016 происходит ее уменьшение. На рис.3 показаны зависимости безразмерных радиусов упаковки для второго способа выбора системы уравнений, когда в начальный момент времени скорость внутренней границы упаковки конечна, а скорость внешней границы равна нулю. Решение существует до значения безразмерного времени равного 0.51. Для третьего способа выбора системы уравнений начальная скорость внутренней границы упаковки равна нулю, а скорость внешней границы конечная. В этом случае дискриминант в выражениях для скоростей границ упаковки практически в начальный момент времени становится отрицательным.

На рисунках 4-5 в отличие от численного решения для числа Лапласа равного 1400, решение существует для гораздо меньших значений безразмерного времени во всех способах выбора уравнений для безразмерных радиусов упаковки. Для третьего способа выбора уравнений, когда в начальный момент времени скорость внутренней границы равна нулю, а внешней границы – конечная, дискриминант в формулах для скоростей границ практически в начальный момент времени становится отрицательным.

Примеры численных расчетов точной системы уравнений на рис.2-5 характерны и для других значений чисел Лапласа в промежутке $100<L_0.<1400$. Результаты расчетов показывают, что сферически симметричное решение задачи о спекании упаковки существует для значений безразмерного времени порядка единицы. Результаты расчетов качественно сравнены с фотографиями[3] различных моментов процесса спекания системы нагретых до температуры плавления стеклянных сфер, лежащих на плоскости из графита. Картина спекания существенно зависит от фактора смачиваемости на границе стеклянных сфер и плоскости графита. Даже для маленьких значений фактора смачиваемости наблюдается образование полостей внутри области спекания, несмотря на уменьшение размеров области упаковки спекаемых сфер. Наличие полостей указывает на то, что в случае спекания стеклянных шаров, лежащих на плоскости из графита, даже при маленьком факторе смачиваемости, не существует во всей области упаковки однородности относительно оси симметрии функции объемной доли спекаемых капель. Это значит, что не существует симметричной картины спекания относительно оси, проходящей через центр упаковки перпендикулярно плоскости графитовой подложки. По-видимому, в рассмотренной нами задаче о спекании сферической упаковки капель несжимаемой жидкости, окруженной другой жидкостью, существует некоторый аналог фактора смачиваемости. Указанный фактор, уже близко к началу спекания, приводит к образованию локальных центров спекания, к которым движется фаза капель, а между центрами спекания образуются области свободные от капель, тем самым нарушается сферическая симметрия картины спекания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная теория вычисления осредненных по межфазной поверхности параметров в уравнениях механики гетерогенных сред позволяет моделировать явления в гетерогенных средах, используя точные

[3] Jagota A., Dawson P.R. Micromechanical modeling of powder compacts.– 2. Truss formulation of discrete packings // Acta metal.– 1988.- Vol.36.– No 9.-p.2563-2573.

уравнения для средних параметров фаз на межфазной поверхности, в том числе точные уравнения для удельной межфазной поверхности, тензора удельной поверхности и формулы для объемных плотностей лапласовских сил.

Основные выводы по работе заключаются в следующем:

1. Дано определение функции распределения площади межфазной поверхности от углов наклона ее нормалей. Получено уравнение для указанной функции в предположении, что в гетерогенной среде нет источников “рождения” и “уничтожения” межфазной поверхности (например, образование зародышей в конденсированной фазы в паре, или пузырьков в жидкости). Методом представления решения в виде суммы по индексу j членов ряда из сферических гармоник показано, что решение для функции распределения и логарифма в случае, когда межфазной поверхностью является свободная поверхность ньютоновской жидкости, состоит из двух независимых сумм, а именно, для значений $j \le 2$ и $j > 2$. Коэффициенты указанных рядов s_{jm} находятся независимо друг от друга, при этом коэффициенты для отрезка ряда $j \le 2$ выражаются линейно с постоянными коэффициентами через средние топологические параметры межфазной поверхности – компоненты тензора удельной поверхности. Получено решение уравнения для логарифма функции распределения в виде ряда по сферическим функциям в случае, когда межфазной поверхностью является свободная поверхность ньютоновской жидкости. Показано, что коэффициенты ряда выражаются из двух независимых систем уравнений. Система уравнений для коэффициентов ряда j>2 состоит из независимых друг от друга уравнений. Сделан вывод, что если начальная функция логарифма функции распределения представляется конечным отрезком ряда по сферическим функциям, то и решение будет являться конечным рядом по этим же сферическим функциям. Получено выражение для средней удельной длины линий пересечения межфазной поверхности и плоскости заданной вектором нормали к ней;

2. Разработана теория вычисления осредненных по межфазной поверхности параметров, входящих в уравнения механики гетерогенных сред, полученных методом пространственного осреднения. Предложен метод дополнительного пространственного осреднения (ДПО). Указанным методом получены аналоги формулы Стокса для гетерогенной среды;

3. Предложена топологическая гипотеза, позволяющая вычислять осредненную по межфазной поверхности величину произведения функции от локальных координат и вещественной функции от компонент нормали, через произведение указанных осредненных функций;

4. Из уравнения для признака, записаны система уравнений для компонент тензора удельной поверхности и система уравнений для признака вида $\Phi' = \psi_i(t, \vec{x}')n_i'^k n_i'^m$. Присваиванием в указанной системе уравнений признаков в виде величин скорости, давлений и их произведений на компоненты тензора скоростей деформаций, получены уравнения для осредненных по МФП величин скорости, давлений и их произведений на компоненты тензора скоростей деформаций;

5. Записаны уравнения механики гетерогенных сред для случая, когда межфазная поверхность разделяет две несмешивающиеся несжимаемые ньютоновские жидкости. Дополнительно к общей системе уравнений, получены уравнения для осредненных по межфазной поверхности параметров вектора скорости, давления, тензора скоростей деформаций, угловой скорости, компонент тензора удельной поверхности и удельной поверхности, вспомогательных величин $< V_i'^m \nabla^{p'} V_i'^l >_{12}$, $< p_i' \nabla^{p'} V_i'^l >_{12}$, $< e_i'^{pq} e_i'^{ml} >_{12}$, $< e_i'^{pq} \Omega_i'^l >_{12}$, $< \Omega_i'^m \Omega_i'^l >_{12}$. Указанные дополнительные уравнения необходимы для получения замкнутой системы уравнений механики гетерогенных сред и являются способом вычисления не использующим дополнительных допущений при определении неизвестных интегралов по межфазной поверхности в уравнениях механики гетерогенных сред [1], для случая двух фаз несжимаемых ньютоновских жидкостей. Уравнения для средних топологических характеристик межфазной поверхности позволяют точным образом определить удельную поверхность, объемные плотности лапласовских сил в гетерогенной среде, а также объемные плотности мощности и момента импульса лапласовских сил гетерогенной среды. Для указанных объемных плотностей получены точные аналитические формулы. Получено выражение для тензора полных напряжений гетерогенной среды, которое является полезным для задания граничных условий в напряжениях на границе раздела гетерогенной и однофазной сред;

6. Решена в сферически симметричной постановке задача о спекании в невесомости упакованных в виде сферического слоя капель несжимаемой жидкости, окруженной другой жидкостью. В качестве уравнений задачи использованы уравнения механики гетерогенных сред [1] и точные уравнения теории вычисления осредненных по межфазной поверхности параметров фаз. Показано, что безразмерные скорости границ гетерогенного сферического слоя, средние скорости фаз, средняя скорость на межфазной поверхности, объемные доли фаз, удельная межфазная поверхность, средняя по межфазной поверхности лапласовская сила – являются функциями только двух безразмерных параметров. А именно, числа Лапласа $L_0 = \sqrt{\rho_j \Sigma_0 d}/(\mu_i - \mu_j)$ и отношения плотностей фаз $\gamma = \rho_i / \rho_j$, где $\rho_i, \rho_j, \mu_i, \mu_j$ - соответственно плотности и динамические вязкости фаз, Σ_0 - коэффициент поверхностного натяжения на межфазной поверхности, d- начальный диаметр капель. Записано аналитическое решение задачи о спекании в сферически симметричной постановке для маленьких времен, соответствующих началу спекания. Получено численное решение системы точных обыкновенных

дифференциальных уравнений для определения зависимостей радиусов упаковки от времени для чисел Лапласа равных 1400 и 100, в случае, когда первоначально в центральной области упаковки находится фаза жидкости окружающей капли.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Бушланов В.П. Осредненное выражение для вектора объемной плотности капиллярной силы в спекаемой порошковой смеси // ПМТФ.-2000.-т. 41.-№ 4.-С.165-167.
2. Бушланов В.П. О функции распределения площади межфазной поверхности в зависимости от углов наклона ее нормалей // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования.-2000.-№10.-С.88-91.
3. Бушланов В.П., Бушланов И.В. Теория вычисления осредненных по межфазной поверхности параметров в уравнениях механики гетерогенных сред // Физическая мезомеханика.-2002.-т.5.-№2.-С.57-63.
4. Бушланов В.П., Смолин А.Ю. Модель процесса квазистатического прессования пористых тел // Порошковая металлургия.-1992.-№8.– С.39-43.
5. Бушланов В.П., Бушланов И.В. К теории пространственного осреднения в механике гетерогенных сред // ДАН.- 2002.-т.382.- №3.- С.346-348.
6. Бушланов В.П., Бушланов И.В. Метод вычисления осредненных по межфазной поверхности параметров фаз в пространственно осредненных уравнениях механики гетерогенной среды двух несмешивающихся ньютоновских жидкостей // Физическая мезомеханика.-2004.-т.7.-Спец. выпуск.-ч.1.-С.46-49.
7. Бушланов В.П., Бушланов И.В. Решение задачи о слиянии сферически упакованных капель ньютоновской жидкости, взвешенных в другой жидкости // Физическая мезомеханика.-2004.-т.7.-Спец. выпуск.-ч.1.-С.50-54.
8. Бушланов В.П. Приближенное решение задачи об осесимметричном течении вязкой несжимаемой жидкости в угловой области // Изв. РАН. МЖГ.- 1999.-№1.- С.157-160.
9. Бушланов В.П. Решение уравнения для функции распределения площади межфазной поверхности от углов наклона ее нормалей в случае, когда межфазная поверхность является свободной поверхностью ньютоновской жидкости // Вестник Томского государственного университета. Бюллетень оперативной научной информации.-№17.-январь 2004.- С.6-13.
10. Бушланов В.П. Решение уравнения для логарифма функции распределения площади межфазной поверхности от углов наклона ее нормалей в случае, когда межфазной поверхностью является свободная поверхность ньютоновской жидкости // Вестник Томского государственного университета. Бюллетень оперативной научной информации.-№17.-январь 2004.- С.14-26.
11. Бушланов В.П. К теории получения замкнутой системы уравнений для осредненных по межфазной поверхности параметров в уравнениях механики гетерогенных сред // Вестник Томского государственного университета. Бюллетень оперативной научной информации.-№17.-январь 2004.- С.27-34.
12. Бушланов В.П. Уравнения для осредненных по межфазной поверхности параметров гетерогенной среды в случае, когда межфазная поверхность разделяет две несмешивающиеся несжимаемые жидкости // Вестник Томского государственного университета. Бюллетень оперативной научной информации.-№17.-январь 2004.- С.35-47.
13. Бушланов В.П. Уравнения механики гетерогенной среды в случае, когда межфазная поверхность разделяет две несмешивающиеся несжимаемые ньютоновские жидкости // Вестник Томского государственного университета. Бюллетень оперативной научной информации.-№17.-январь 2004.- С.48-57.
14. Бушланов В.П. Интегральные уравнения для задачи о спекании упаковки капель жидкости, окруженных другой жидкостью // Вестник Томского государственного университета. Бюллетень оперативной научной информации.-№17.-январь 2004.- С.58-63.
15. Бушланов В.П. Уравнения задачи о спекании упаковки капель несжимаемой жидкости окруженной другой несжимаемой жидкостью в сферически симметричном случае // Вестник Томского государственного университета. Бюллетень оперативной научной информации.-№17.-январь 2004.- С.65-80.
16. Бушланов В.П. Решение задачи о спекании упаковки капель несжимаемой жидкости, окруженных другой жидкостью в сферически симметричной постановке // Вестник Томского государственного университета. Бюллетень оперативной научной информации.-№17.-январь 2004.- С.81-94.
17. Бушланов В.П. Вероятность образования покрытия из термически активных частиц // ПМТФ.- 1992.- С. 26-29.
18 Бушланов В.П. О взаимном тепловом влиянии напыленных частиц на прочность плазменного покрытия // ИФЖ.- 1992.- т.62.- №1.- С. 51-56.
19. Shrager E.R., Bushlanov V.P. Calculation of mean specific length of lines, formed by crossing of plane whis interface in heterogeneous medium// EPT journal.-2004.-Karaganda (в печати)
20. Шрагер Э. Р. Бушланов В.П. Вычисление средней удельной длины линий, образованных пересечением плоскости с межфазной поверхностью в гетерогенной среде. Труды 4 международной конференции “Хаос и структуры в нелинейных системах. Теория и эксперимент”, Караганда, 2004. (в печати)

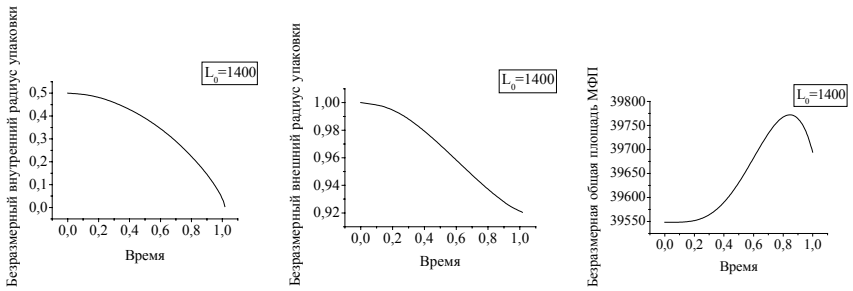

Рис. 2. Начальные скорости границ упаковки конечные.

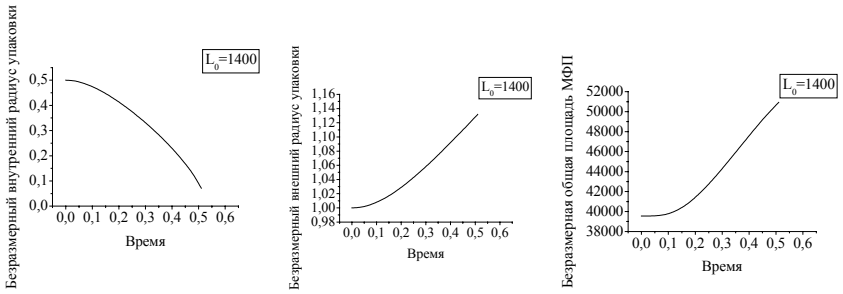

Рис. 3. Начальная скорость внутренней границы упаковки конечная, а внешней границы – равна нулю.

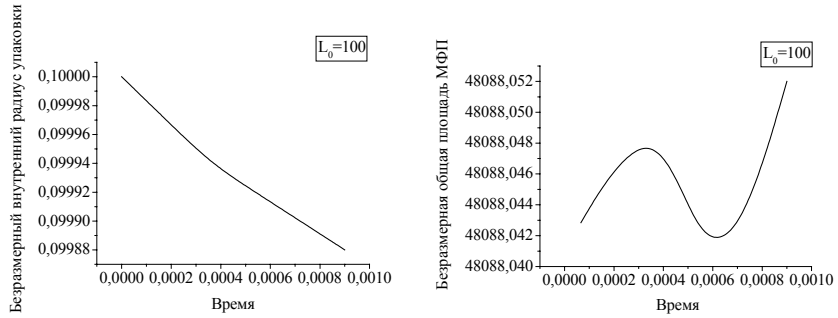

Рис. 4. Начальные скорости границ упаковки конечные. Внешний радиус упаковки практически не меняется.

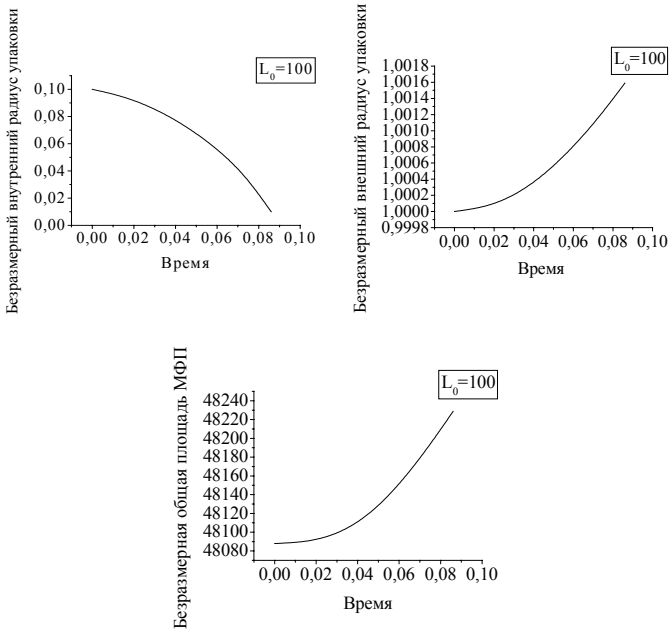

Рис. 5. Начальная скорость внутренней границы упаковки конечная, а внешней границы – равна нулю.