На правах рукописи

ВАСИЛЬЕВА ЛАРИСА АНАТОЛЬЕВНА

ОЦЕНИВАНИЕ ДЛИТЕЛЬНОСТИ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИИ И ПАРАМЕТРОВ АСИНХРОННОГО ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

05.13.01–Системный анализ, управление и обработка информации
(в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2005

Работа выполнена в Томском государственном университете.

Научный руководитель:
доктор технических наук,
профессор Горцев Александр Михайлович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Терпугов Александр Федорович

кандидат физико-математических наук,
доцент Буркатовская Юлия Борисовна

Ведущая организация:
Московский государственный институт электроники и математики (технический университет) (г. Москва)

Защита состоится:
07 апреля 2005 г. в 10.30 часов на заседании диссертационного совета Д 212.267.12 при Томском государственном университете по адресу:
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться:
В научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан: « _14__ » февраля 2005 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
д.т.н., профессор В. И. Смагин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Одним из важных разделов математики является теория массового обслуживания, представляющая собой теоретические основы комплекса вопросов эффективности, конструирования и эксплуатации систем массового обслуживания. Идеи и методы теории массового обслуживания получили широкое распространение (производство, техника, военная область и др.) и круг практических задач, решаемых методами этой теории, непрерывно расширяется. В последние два десятилетия в связи с бурным развитием компьютерной техники и информационных технологий появилась еще одна важная сфера приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных систем, объединяющих в себе большое количество компьютеров, а также компьютерных сетей связи, спутниковых систем связи и т.п. Однако, несмотря на большое количество работ, остается еще много проблем, требующих дополнительного исследования. В частности, анализ литературных источников приводит к выводу, что в литературе по теории массового обслуживания и ее приложениям совсем незначительное количество работ посвящено адаптивным системам, т.е. системам, функционирующим в условиях полной или частичной неопределенности. Наряду с тем, что подавляющее число авторов рассматривает ситуации, когда все параметры, характеризующие СМО, точно известны, в реальных системах массового обслуживания параметры входящих потоков заявок обычно меняются со временем, при этом изменения часто носят случайный характер, что приводит к рассмотрению дважды стохастических потоков событий. С другой стороны, очевидно, что функционирование СМО непосредственно зависит от интенсивностей входящих потоков заявок.

Потоки событий с интенсивностью, зависящей от времени и являющейся случайным процессом, можно разделить на два класса. К первому классу относятся потоки с интенсивностью, являющейся непрерывным случайным процессом. Ко второму классу можно отнести потоки, у которых интенсивность есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Такие потоки (потоки с переключениями, МС-потоки событий) являются наиболее характерными для реальных телекоммуникационных сетей, вычислительных сетей и систем. В свою очередь, в зависимости от того каким образом происходит переход из состояния в состояние МС-потоки можно разделить на 3 класса: 1) *синхронные дважды стохастические потоки событий* – потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени, являющиеся моментами наступления событий; 2) *асинхронные дважды стохастические потоки событий* – потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние не зависит от моментов наступления событий; 3) *полусинхронные дважды стохастические потоки событий* – потоки, у которых для одного множества состояний справедливо 1, а для остальных состояний справедливо 2.

Согласно обзору литературы, приведенному в работе, при исследовании таких потоков могут быть выделены два класса задач: 1) *задача фильтрации интенсивности потока* (или задача оценивания состояний потока событий) по наблюдениям за потоком (моментами наступления событий потока) и 2) *задача оценивания параметров потока* по наблюдениям в случае, когда значения параметров неизвестны.

В данной работе рассматривается задача второго класса - задача оценивания параметров асинхронного дважды стохастического потока событий с интенсивностью $\lambda(t)$, являющейся кусочно–постоянным марковским процессом, принимающим два значения, события которого частично наблюдаемы. Частичная наблюдаемость связана с возникновением, так называемой, схемы мертвого времени, когда после наступления события в асинхронном потоке наступает некоторое время фиксированной длительности (период мертвого времени), в течение которого другие события недоступны наблюдению. Одним из основных искажающих факторов при определении характеристик случайных потоков выступает мертвое время устройств регистрации. В течение мертвого времени обрабатывается зарегистрированное событие, а любое другое событие, поступившее на вход системы в этот период, теряется. По этой причине счетчик событий показывает, как правило, не истинную картину, а несколько искаженный ход явлений. В

связи с этим возникает задача оценивания параметров истинного потока событий, поступающего на вход системы, и длительности мертвого времени. В конкретных устройствах величина и характер мертвого времени зависят от многих факторов. В первом приближении можно считать, что этот период продолжается некоторое определенное (фиксированное) время T. Все устройства регистрации с достаточной степенью приближения можно разделить на две группы. Первую группу составляют устройства с *непродлевающимся* мертвым временем, которое не зависит от поступления других событий в пределах его действия. Ко второй группе относятся устройства с *продлевающимся* мертвым временем. В этом случае мертвое время возникает после любого события, поступившего на вход системы, вне зависимости от факта его регистрации, что приводит к увеличению общего периода ненаблюдаемости и, следовательно, к еще большей потере информации.

Таким образом, данная работа, в которой решается задача оценивания параметров асинхронного потока событий при наличии мертвого времени, является актуальной.

Цель диссертационной работы. Методом моментов оценить параметры асинхронного дважды стохастического потока событий и длительность мертвого времени по наблюдениям за потоком в течение конечного временного интервала.

Методы исследования. При выполнении диссертационной работы использовались методы теории вероятностей, теории случайных процессов, теории марковских процессов, теории массового обслуживания, математической статистики, теории матриц, численные методы и методы имитационного моделирования.

Научная новизна. Результаты, выносимые на защиту. Научная новизна работы состоит в рассмотрении и решении задач оценивания длительности мертвого времени и параметров асинхронного дважды стохастического потока событий в схемах с непродлевающимся и с продлевающимся мертвым временем. Результатами, выносимыми на защиту, являются:

– аналитический вид основных характеристик асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях мертвого времени фиксированной длительности: в схеме с непродлевающимся мертвым временем – плотность распределения вероятностей временного интервала между соседними событиями, в схеме с продлевающимся мертвым временем – преобразование Лапласа плотности распределения вероятностей временного интервала между соседними событиями;

– алгоритмы оценивания методом моментов длительности мертвого времени и параметров асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях мертвого времени фиксированной длительности как в схеме с непродлевающимся мертвым временем, так и в схеме с продлевающимся мертвым временем;

– статистические исследования свойств построенных оценок, проведенные на имитационной модели асинхронного дважды стохастического потока событий.

Практическое значение работы. Полученные в работе результаты могут применяться при обработке данных в различных физических экспериментах, в задачах разработки (на этапе проектирования) и исследования СМО (телекоммуникационные сети, информационно-вычислительные сети, сети связи), функционирование которых зависит от параметров и интенсивностей входящих потоков событий.

Апробация работы. Внедрение результатов работы. Работа выполнялось в рамках научно-исследовательской работы Томского государственного университета “Разработка алгоритмов оценки параметров и состояний дважды стохастических потоков заявок, циркулирующих в информационно-вычислительных, локально-вычислительных сетях и коммутационных системах” (код темы по ГРНТИ: 28.17.19.29.19.15) в период с 1996 по 2000г.г. и научно-исследовательской работы “Исследование и разработка моделей высокопроизводительных многопроцессорных систем и методов обеспечения компьютерной безопасности” (код темы по ГРНТИ: 50.07.05) в период с 2001 по 2004г.г. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

–на юбилейной конференции СФТИ при Томском госуниверситете, посвященной 70-летию образования института (Томск, 29 сентября - 2 октября 1998г.);

–на IV Всероссийской конференции с международным участием “Новые информационные технологии в исследовании сложных структур” и Сибирской научной школе-семинаре “Проблемы компьютерной безопасности” (Томск, ТГУ, 10-13 сентября 2002г.).

–на Всероссийской научно-практической конференции “Новые технологии и комплексные решения: наука, образование, производство” (Анжеро-Судженск, 18-19 октября 2001г.)

Кроме того, материалы исследований используются в учебном процессе при выполнении курсовых и дипломных работ студентов.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 печатных работ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3-х глав, заключения, приложения, списка использованной литературы. Работа содержит 147 страниц машинописного текста, 13 рисунков, 20 таблиц. Список литературы включает 119 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении раскрывается актуальность исследуемой проблемы, приводится обзор работ других авторов, формулируется цель и содержание работы, обосновывается теоретическая и практическая ценность работы.

В первой главе дается определение исследуемого асинхронного дважды стохастического потока событий в схеме с непродлевающимся мертвым временем фиксированной длительности. Решается задача оценивания длительности мертвого времени и параметров асинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов.

Рассматривается асинхронный дважды стохастический поток событий (далее асинхронный поток), интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 (первое состояние) и λ_2 (второе состояние) $(\lambda_1 > \lambda_2)$. Длительности пребывания процесса в том или ином состоянии распределены по экспоненциальному закону $F_i(t) = 1 - \exp\{-\alpha_i t\}$, i=1,2, где α_1 – интенсивность смены первого состояния процесса на второе, α_2 – наоборот. На участках стационарности (когда $\lambda(t) = \lambda_1$, либо $\lambda(t) = \lambda_2$) имеет место пуассоновский поток событий. Частичная наблюдаемость связана с возникновением схемы мертвого времени, когда после наступления событий в асинхронном потоке наступает время фиксированной длительности T (период мертвого времени), в течение которого другие события исходного асинхронного потока недоступны наблюдению. Вариант возникающей ситуации показан на рис.1.

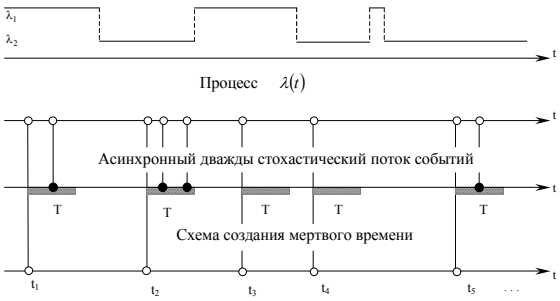

Рис.1

По наблюдениям $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$ на конечном интервале времени требуется построить оценки параметров λ_1, λ_2, α_1, α_2 случайного процесса $\lambda(t)$ и длительности мертвого времени T, а также исследовать их свойства.

Рассматривается установившийся режим функционирования потока событий. Осуществляется переход от моментов наступления событий $t_1, t_2, \ldots$ к длительностям интервалов $\tau_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда основой для исследования

является плотность распределения вероятностей $p(\tau)$ случайной величины – интервала времени между соседними событиями в наблюдаемом потоке. Изложим кратко вывод формулы для $p(\tau)$.

Пусть регистрируется событие в наблюдаемом потоке. Припишем этому событию, момент времени t=0. Обозначим через $\pi_j(t,T)$– условную вероятность того, что в момент времени t процесс $\lambda(t)$ будет находиться в состоянии j (j=1,2) при условии, что в момент времени t=0 событие наступило. Тогда для введенных вероятностей $\pi_j(t,T)$ $(j=1,2)$ имеет место следующая система уравнений:

$$\pi_1^{/}(t,T)=-\alpha_1\pi_1(t,T)+\alpha_2\pi_2(t,T)\,, \qquad \pi_2^{/}(t,T)=\alpha_1\pi_1(t,T)-\alpha_2\pi_2(t,T)\,,$$

решая которую, находим

$$\pi_1(t,T)=A_1(T)+A_2(T)\,e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\,t}\,, \quad \pi_2(t,T)=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}A_1(T)-A_2(T)\,e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\,t}\,. \qquad (1)$$

Для определения констант $A_1(T)$, $A_2(T)$ в (1), найдем $\pi_j(0,T)$ – условную вероятность того, что процесс $\lambda(t)$ в момент времени t=0 находится в состоянии j (j=1,2) при условии, что в этот момент времени событие наступило и наступило мертвое время длительности T. Обозначим $\pi_j(0,T)=\tilde{\pi}_j(T)$. Введем в рассмотрение переходные вероятности π_{ij} – вероятность того, что за время, которое пройдет от момента t=0 до наступления следующего события в наблюдаемом потоке, процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния i (момент t=0) в состояние j (момент наступления следующего события в наблюдаемом потоке), i, j=1,2. Тогда, так как моменты времени t_i образуют вложенную цепь Маркова, справедливы уравнения для финальных вероятностей $\tilde{\pi}_1(T)$ и $\tilde{\pi}_2(T)$:

$$\tilde{\pi}_1(T)=\tilde{\pi}_1(T)\pi_{11}+\tilde{\pi}_2(T)\pi_{21}\,,\ \tilde{\pi}_2(T)=\tilde{\pi}_1(T)\pi_{12}+\tilde{\pi}_2(T)\pi_{22}\,,\ \tilde{\pi}_1(T)+\tilde{\pi}_2(T)=1\,. \qquad (2)$$

Обозначим $q_{ij}(T)$ – вероятность того, что за мертвое время длительности T процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния i (момент t=0) в состояние j (момент t=T), i, j=1,2. Пусть $0<t\le T$. Тогда для введенных вероятностей $q_{ij}(T)$ имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} &q_{11}(t)=\pi_1+\pi_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\,t},\ q_{12}(t)=\pi_2-\pi_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\,t},\\ &q_{21}(t)=\pi_1-\pi_1 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\,t},\ q_{22}(t)=\pi_2+\pi_1 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\,t}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где π_1, π_2 – финальные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$:

$$\pi_1=\alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2), \qquad \pi_2=\alpha_1/(\alpha_1+\alpha_2).$$

Припишем моменту окончания мертвого времени момент $\tau=0$. Тогда на полуинтервале $[\tau,\tau+\Delta\tau)$, где $\Delta\tau$ – достаточно малый интервал времени, с вероятностью $\lambda_j\Delta\tau+o(\Delta\tau)$ (j=1,2) произойдет событие наблюдаемого потока. Пусть $p_{ij}(\tau)$ – вероятность того, что на интервале $(0,\tau)$ нет событий наблюдаемого потока и в момент времени τ имеет место $\lambda(\tau)=\lambda_j$ при условии, что в момент времени $\tau=0$ имеет место $\lambda(0)=\lambda_i$. Тогда совместная вероятность наступления события на полуинтервале $[\tau,\tau+\Delta\tau)$ и перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния i в состояние j запишется в виде $p_{ij}(\tau)\lambda_j\Delta\tau+o(\Delta\tau)$. Соответствующая плотность вероятностей есть $\tilde{p}_{ij}(\tau)=\lambda_j p_{ij}(\tau)$. Так как τ – произвольный момент времени, то вероятность перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния i в состояние j (i, j=1,2) за бесконечный интервал времени запишется в виде

$$p_{ij}=\int_0^\infty \tilde{p}_{ij}(\tau)d\tau=\lambda_j\int_0^\infty p_{ij}(\tau)d\tau\,,\ (i,\ j=1,2). \qquad (4)$$

Находя явный вид вероятностей $p_{ij}(\tau)$ и подставив их в (4), получаем выражения для p_{ij}:

$$p_{11}=\frac{\lambda_1(\lambda_2+\alpha_2)}{z_1z_2}\,,\ p_{12}=\frac{\lambda_2\alpha_1}{z_1z_2}\,,\ p_{21}=\frac{\lambda_1\alpha_2}{z_1z_2}\,,\ p_{22}=\frac{\lambda_2(\lambda_1+\alpha_1)}{z_1z_2}\,, \qquad (5)$$

где $z_{1,2}=\frac{1}{2}\left[\left(\lambda_1+\lambda_2+\alpha_1+\alpha_2\right)\mu\sqrt{\left(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2\right)^2+4\alpha_1\alpha_2}\right],\ 0<z_1<z_2$.

В силу марковости процесса $\lambda(t)$ выписываем выражения для переходных вероятностей π_{ij} в виде $\pi_{ij}=q_{i1}(T)p_{1j}+q_{i2}(T)p_{2j},\ i,j=1,2$, где $q_{ij}(T)$ определены формулами (3), в которых $t=T$; p_{ij} определены в (5). Осуществляя соответствующие подстановки в формулу для π_{ij}, находим явный вид переходных вероятностей π_{ij}. После чего, подставляя выражения для π_{ij} в (2), получаем явный вид финальных вероятностей $\tilde{\pi}_1(T)$, $\tilde{\pi}_2(T)$:

$$\tilde{\pi}_1(T)=\frac{\lambda_1\alpha_2+\lambda_1\lambda_2\pi_1\left[1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]}{\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\alpha_1+\lambda_1\lambda_2\left[1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]},\ \tilde{\pi}_2(T)=\frac{\lambda_2\alpha_1+\lambda_1\lambda_2\pi_2\left[1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]}{\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\alpha_1+\lambda_1\lambda_2\left[1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]}\ . \quad (6)$$

Тем самым находим

$$\pi_1(t,T)=\pi_1-\left(\pi_1-\tilde{\pi}_1(T)\right)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\,t}\ ,\ \pi_2(t,T)=\pi_2-\left(\pi_2-\tilde{\pi}_2(T)\right)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\,t}\ . \quad (7)$$

Рассмотрим временной интервал длительности $\tau=T+t$, состоящий из двух смежных интервалов: первый длительности T, второй – длительности t. Началом первого интервала является момент наступления события в наблюдаемом потоке, началом второго интервала – момент окончания мертвого времени. Обозначим $P_i(t)$ – вероятность того, что в момент времени t процесс $\lambda(t)$ будет находиться в i-м состоянии (i=1,2) и на интервале $(0,t)$ событий наблюдаемого потока не произойдет. Тогда $p(t)$ – плотность вероятностей длительности интервала между моментами окончания мертвого времени и следующим событием наблюдаемого потока, запишется в виде

$$p(t)=\lambda_1P_1(t)+\lambda_2P_2(t). \quad (8)$$

Выпишем систему уравнений для определения вероятностей $P_1(t)$, $P_2(t)$:

$$P_1'(t)=-(\lambda_1+\alpha_1)P_1(t)+\alpha_2P_2(t)\ ,\quad P_2'(t)=\alpha_1P_1(t)-(\lambda_2+\alpha_2)P_2(t)\ , \quad (9)$$

с граничными условиями $P_1(0)=\pi_1(t=T,T)$, $P_2(0)=\pi_2(t=T,T)$, где вероятности $\pi_j(t=T,T)$ определены выражением (7) для $t=T$, $P_i(0)$ – вероятность того, что процесс $\lambda(t)$ в момент времени t=0 находится в i-м состоянии (i=1,2).

Решая систему уравнений (9), находим

$$P_1(t)=\frac{\lambda_2+\alpha_2-z_1}{(\alpha_1+\alpha_2)(z_2-z_1)}\left\{z_2-\lambda_2+\frac{\alpha_2(\lambda_1-\lambda_2)(z_1-\lambda_1)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}}{\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\alpha_1+\lambda_1\lambda_2\left[1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]}\right\}e^{-z_1t}-$$

$$-\frac{\lambda_2+\alpha_2-z_2}{(\alpha_1+\alpha_2)(z_2-z_1)}\left\{z_1-\lambda_2+\frac{\alpha_2(\lambda_1-\lambda_2)(z_2-\lambda_1)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}}{\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\alpha_1+\lambda_1\lambda_2\left[1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]}\right\}e^{-z_2t}\ , \quad (10)$$

$$P_2(t)=\frac{\alpha_1}{(\alpha_1+\alpha_2)(z_2-z_1)}\left\{z_2-\lambda_2+\frac{\alpha_2(\lambda_1-\lambda_2)(z_1-\lambda_1)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}}{\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\alpha_1+\lambda_1\lambda_2\left[1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]}\right\}e^{-z_1t}-$$

$$-\frac{\alpha_1}{(\alpha_1+\alpha_2)(z_2-z_1)}\left\{z_1-\lambda_2+\frac{\alpha_2(\lambda_1-\lambda_2)(z_2-\lambda_1)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}}{\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\alpha_1+\lambda_1\lambda_2\left[1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]}\right\}e^{-z_2t}\ .$$

Подставляя (10) в (8), и учитывая при этом, что $\tau=T+t$, находим явный вид плотности вероятностей:

$$p(\tau)=\begin{cases}0, & \text{если } 0\le\tau<T,\\ \gamma\ z_1\exp\{-z_1(\tau-T)\}+(1-\gamma)\ z_2\exp\{-z_2(\tau-T)\}\ , & \text{если } \tau\ge T,\end{cases} \quad (11)$$

где $\gamma=\frac{z_2-\lambda_1}{(z_2-z_1)(\alpha_1+\alpha_2)}\left\{z_2-\lambda_2+\frac{\alpha_2(\lambda_1-\lambda_2)(z_1-\lambda_1)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}}{\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\alpha_1+\lambda_1\lambda_2\left[1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]}\right\}$,

z_1, z_2 определены в (5).

Вид плотности вероятностей (11) позволяет сделать вывод о том, что принципиально возможна оценка параметров распределения γ, z_1, z_2, T. Это означает, что оценить четыре неизвестных параметра λ_1, λ_2, α_1, α_2 асинхронного потока событий и длительность мертвого времени T, имея только информацию о плотности вероятностей $p(\tau)$, не

представляется возможным. В дальнейшем будем рассматривать частный случай асинхронного потока событий, когда $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$. Оценки неизвестных параметров λ_1, λ_2, α, T предполагается искать, используя метод моментов. Непосредственно методом моментов находятся оценки параметров γ, z_1, z_2 и мертвого времени *T*, от которых явно зависит найденная плотность распределения вероятностей $p(\tau)$. После чего находятся оценки параметров асинхронного потока λ_1, λ_2, α.

Оценки γ, z_1, z_2, *T* находятся путем решения уравнений моментов:

$$M\left\{\tau^k\right\} = C_k\,,\ k = \overline{1,4}\,, \qquad (12)$$

где $M\left\{\tau^k\right\} = \gamma z_1 e^{z_1 T}\int\limits_T^{+\infty}\tau^k e^{-z_1\tau}d\tau + (1-\gamma)z_2 e^{z_2 T}\int\limits_T^{+\infty}\tau^k e^{-z_2\tau}d\tau$, $C_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\tau_i^{\,k}$.

Взяв интегралы в (12) и произведя необходимые преобразования, получаем систему уравнений для определения оценок $\hat{\gamma}$, $\hat{z}_1$, $\hat{z}_2$, $\hat{T}$:

$$T^k + \gamma\sum_{i=1}^{k}\frac{k!}{(k-i)!}\frac{T^{k-i}}{z_1^i} + (1-\gamma)\sum_{i=1}^{k}\frac{k!}{(k-i)!}\frac{T^{k-i}}{z_2^i} = C_k\,,\quad k = \overline{1,4}\,. \qquad (13)$$

Решая систему уравнений (13), находим:

- оценка $\hat{T}$ длительности мертвого времени *T* является корнем алгебраического уравнения шестой степени

$$T^6 - 6C_1T^5 + 3\left(6C_1^{\,2} - C_2\right)T^4 + 4\left(C_3 - 6C_1^{\,3}\right)T^3 + 3\left(C_4 - 8C_1C_3 + 12C_1^{\,2}C_2\right)T^2 +$$
$$+\,6\left(4C_1^{\,2}C_3 - C_1C_4 + 2C_2C_3 - 6C_1C_2^{\,2}\right)T + (4C_3^{\,2} + 6C_1^{\,2}C_4 - 24C_1C_2C_3 - 3C_2C_4 + 18C_2^{\,3}) = 0,$$

что приводит к неоднозначности в выборе $\hat{T}$;

- оценки $\hat{z}_1$ и $\hat{z}_2$ являются корнями квадратного уравнения

$$\left(\hat{T}^4 - 4C_1\hat{T}^3 + 6C_1^2\hat{T}^2 - 6C_1C_2\hat{T} + 2C_3\hat{T} - 2C_1C_3 + 3C_2^2\right)\hat{z}^2 +$$
$$+\,2\left(2\hat{T}^3 - 6C_1\hat{T}^2 + 6C_1^2\hat{T} + C_3 - 3C_1C_2\right)\hat{z} + 6\left(\hat{T}^2 - 2C_1\hat{T} - C_2 + 2C_1^2\right) = 0\ ;$$

- оценка $\hat{\gamma}$ определяется из соотношения $\hat{\gamma} = \frac{\hat{z}_1\hat{z}_2}{\hat{z}_2 - \hat{z}_1}\left(C_1 - \hat{T} - \frac{1}{\hat{z}_2}\right)$.

Оценки параметров $\left\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\alpha}\right\}$, определяются через $\left\{\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}, \hat{T}\right\}$ как решение системы уравнений:

$$\frac{1}{2}\left[(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\alpha) - \sqrt{\left((\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\alpha^2\right)}\right] = \hat{z}_1\,,\ \frac{1}{2}\left[(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\alpha) + \sqrt{\left((\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\alpha^2\right)}\right] = \hat{z}_2\,,$$

$$\frac{\hat{z}_2 - \lambda_1}{2\alpha\left(\hat{z}_2 - \hat{z}_1\right)}\left[\hat{z}_2 - \lambda_2 + \frac{\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)\left(\hat{z}_1 - \lambda_1\right)e^{-2\alpha\hat{T}}}{\lambda_1\alpha + \lambda_2\alpha + \lambda_1\lambda_2\left(1 - e^{-2\alpha\hat{T}}\right)}\right] = \hat{\gamma}\,.$$

Далее рассматривается ситуация, когда мертвое время случайная величина. По-прежнему считается, что события, наступившие в течение мертвого времени, не вызывают продления его периода и недоступны наблюдению. По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T_i, где T_i – реализация случайной величины (длительности мертвого времени) с плотностью распределения вероятностей $p(T)$ и т.д. Вариант возникающей ситуации показан на рис.2. По наблюдениям $\{t_1,\ t_2, \ldots, t_n\}$ на конечном интервале времени необходимо построить оценки (в момент окончания наблюдений) параметров λ_1, λ_2, α_1, α_2 случайного процесса $\lambda(t)$ и параметров распределения $p(T)$.

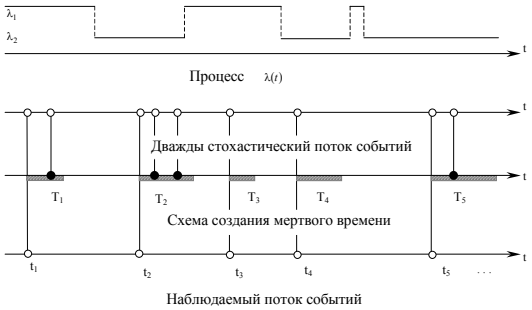

Рис.2

Плотность распределения вероятностей интервала времени между соседними событиями в наблюдаемом потоке $p(\tau) = p(\tau/T)$, в случае когда период мертвого времени имеет фиксированную длительность T выписана в (11). Тогда

$$p(\tau) = \int_0^{\tau} p(\tau/T)p(T)dT \ . \qquad (14)$$

Наиболее приемлемой моделью случайного мертвого времени является экспоненциально распределенная случайная величина. Зададим вид плотности вероятностей $p(T) = \beta e^{-\beta T}$, где β - параметр экспоненциального распределения. Подставляя (11) в (14), получаем

$$p(\tau) = \beta z_1 e^{-z_1\tau}\int_0^{\tau}\gamma(T)e^{-(\beta-z_1)T}dT + \beta z_2 e^{-z_2\tau}\int_0^{\tau}\gamma(T)e^{-(\beta-z_2)T}dT \ . \qquad (15)$$

Выразить через элементарные функции первообразные для подынтегральных выражений в (15) не представляется возможным. Вследствие этого построение оценок параметров λ_1, λ_2, α_1, α_2 и параметра β представляется затруднительным.

Далее рассматриваются частные случаи асинхронного потока событий. Для альтернирующего потока событий, когда $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 0$, методом моментов строятся оценки неизвестных параметров λ, z_1, z_2, β. В результате достаточно трудоемких вычислений получаем систему уравнений для определения оценок параметров β, z_1, z_2, a (где $a = \alpha_1 + \alpha_2$).

$$-\frac{1}{z_1^2}\beta(z_2 - z_1 + \beta)(z_1 - a) = z_1\beta(a+\beta)(C_4 z_1 z_2 - C_3(z_1+z_2) + C_2) -$$

$$-\left((z_1-\beta)(a+2\beta)+\beta^2\right)(C_3 z_1 z_2 - C_2(z_1+z_2)+C_1) + (z_1-\beta)(z_1-a-\beta)(C_2 z_2 - C_1) \ ,$$

$$\frac{1}{z_2^2}\beta(z_2 - z_1 - \beta)(z_2 - a) = z_2\beta(a+\beta)(C_4 z_1 z_2 - C_3(z_1+z_2) + C_2) -$$

$$-\left((z_2-\beta)(a+2\beta)+\beta^2\right)(C_3 z_1 z_2 - C_2(z_1+z_2)+C_1) + (z_2-\beta)(z_2-a-\beta)(C_2 z_1 - C_1) \ ,$$

$$\beta\frac{(z_1-a)(z_2-a)}{(\beta+a)^4} = -\beta(C_4 z_1 z_2 - C_3(z_1+z_2)+C_2) + (C_3 z_1 z_2 - C_2(z_1+z_2)+C_1) \ ,$$

$$\frac{z_1 z_2(a-\beta)}{\beta^4} = (a+\beta)(C_4 z_1 z_2 - C_3(z_1+z_2)+C_2) - (C_3 z_1 z_2 - C_2(z_1+z_2)+C_1) \ .$$

Решение данной системы возможно только численно. Оценки $\hat{\beta}$, $\hat{z}_1$, $\hat{z}_2$, $\hat{a}$, позволяют выписать систему уравнений для определения оценок параметров λ, α_1, α_2: $\hat{\lambda} = \hat{z}_1 + \hat{z}_2 - \hat{a}$, $\hat{\alpha}_2 = \hat{z}_1\hat{z}_2/\hat{\lambda}$, $\hat{\alpha}_1 = \hat{a} - \hat{\alpha}_2$.

В случае, когда параметры асинхронного потока событий описаны как $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = \alpha$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 0$, необходимо построить оценки параметров исходного потока λ и α. Аналогично предыдущему случаю, используя метод моментов, записываем систему уравнений для определения оценок параметров λ, α:

$$2(3\alpha + 2\lambda) - 3\lambda\alpha C_1 = 0 \ , \ 4\left(\lambda^3 - 12\alpha^3 + 3\lambda\alpha^2 + 2\lambda^2\alpha\right) + \lambda^2\alpha(3\alpha - 2\lambda)(C_2\alpha - C_1) = 0 \ .$$

Очевидно, что решение систем возможно только численно.

Во второй главе дается определение исследуемого асинхронного потока событий в схеме с продлевающимся мертвым временем фиксированной длительности. Решается задача оценивания длительности мертвого времени и параметров асинхронного потока событий методом моментов.

Рассматривается асинхронный поток событий (определен в первой главе) в схеме с продлевающимся мертвым временем фиксированной длительности, когда каждое событие асинхронного потока влечет за собой ненаблюдаемость последующих событий в течение мертвого времени, что приводит к увеличению общего периода ненаблюдаемости и, следовательно, к еще большей потере информации. Возникающая ситуация показана на рис.3.

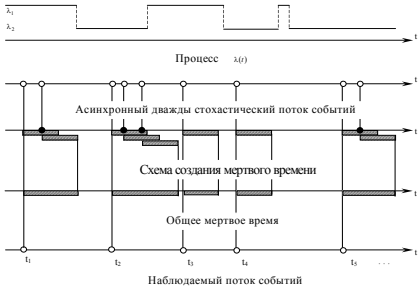

Рис.3

По наблюдениям $\{t_1,t_2,...,t_n\}$ на конечном интервале времени требуется построить оценки параметров λ_1, λ_2, α_1, α_2 случайного процесса $\lambda(t)$ и длительности мертвого времени T, а также исследовать их свойства.

Основой для исследования является преобразование Лапласа $g_\tau(s)$ плотности вероятностей $p(\tau)$ временного интервала между соседними событиями наблюдаемого потока. Изложим кратко вывод формулы для $g_\tau(s)$. Обозначим общую длительность периода ненаблюдаемости через ξ. Наблюдаемое событие создало период ненаблюдаемости длительности T. Тогда $\xi = T$, если в течение этого времени события исходного асинхронного потока не наступят. При этом вероятность того, что на интервале $(0,T)$ событий исходного потока не наступит при условии, что в начальный момент времени событие наступило, равна $\varphi_0(T) = \int_T^\infty \tilde{p}(\tau)d\tau$, где $\tilde{p}(\tau)$ – определена в (11) для T=0. Однократное продление периода ненаблюдаемости на какое-то время будет в том случае, если в некоторый момент времени x_1 ($0 < x_1 < T$) наступит событие в исходном асинхронном потоке, а затем после момента x_1 на интервале длиной T событий больше не наступит. Вероятность описанной ситуации равна $\tilde{p}(x_1)dx_1\varphi_0(T)$, при этом $\xi = x_1 + T$ $(T < \xi < 2T)$. Аналогично рассматривается двукратное, трехкратное и т.д. продление мертвого времени. Объединяя все эти случаи, плотность распределения вероятностей $p(\xi)$ можно записать в виде

$$p(\xi) = \varphi_0(T)\delta(\xi - T) + \varphi_0(T)\int_0^T \delta(\xi - x_1 - T)\tilde{p}(x_1)dx_1 +$$
$$+ \varphi_0(T)\int_0^T\int_0^T \delta(\xi - x_1 - x_2 - T)\tilde{p}(x_1)\tilde{p}(x_2)dx_1dx_2 + ...,$$

где $\tilde{p}(\tau)$ определена в (11) для T=0, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция.

Переходя к преобразованию Лапласа функции $p(\xi)$, в результате преобразований, получаем

$$g_\xi(s) = \varphi_0(T)\exp\{-sT\}\left\{1 - \frac{\gamma z_1}{z_1 + s}[1 - \exp\{-(z_1 + s)T\}] - \frac{(1-\gamma)z_2}{z_2 + s}[1 - \exp\{-(z_2 + s)T\}]\right\}^{-1}, \qquad (16)$$

где $\varphi_0(T) = \gamma\exp\{-z_1T\} + (1-\gamma)\exp\{-z_2T\}$, γ определена в (11) для T=0.

Рассмотрим теперь интервал времени между событиями в наблюдаемом потоке, он равен $\tau = \xi + \eta$. Тогда по формуле свертки $p(\tau) = \int_0^\tau p(\xi)p(\tau - \xi \mid \xi)d\xi$. Выражение для $p(\tau - \xi \mid \xi)$ находим по той же методике, что и $p(\tau)$ для случая непродлевающегося мертвого времени, описанной на стр.9-12 автореферата.

В результате выражение для $p(\tau - \xi \mid \xi)$ находится в виде

$$p(\tau-\xi\mid\xi)=\Gamma(\xi)z_1\exp\{-z_1(\tau-\xi)\}+[1-\Gamma(\xi)]z_2\exp\{-z_2(\tau-\xi)\},$$

$$\Gamma(\xi)=\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)(z_2-z_1)}\left[(z_2-\lambda_1)(z_2-\lambda_2)-\frac{\alpha_1\alpha_2(\lambda_1-\lambda_2)^2\exp\{-(\alpha_1+\alpha_2)\xi\}}{z_1z_2-\lambda_1\lambda_2\exp\{-(\alpha_1+\alpha_2)\xi\}}\right].$$

Преобразование Лапласа плотности $p(\tau)=\int\limits_0^\tau p(\xi)\,p(\tau-\xi\mid\xi)d\xi$ с учетом (16), запишется в виде

$$g_\tau(s)=\left[\frac{z_2}{z_2+s}-\frac{(z_2-\lambda_1)(z_2-\lambda_2)s}{(\alpha_1+\alpha_2)(z_1+s)(z_2+s)}\right]g_\xi(s)+$$

$$+\frac{\alpha_1\alpha_2(\lambda_1-\lambda_2)^2 s}{(\alpha_1+\alpha_2)z_1z_2(z_1+s)(z_2+s)}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda_1\lambda_2}{z_1z_2}\right]^{m-1}g_\xi[m(\alpha_1+\alpha_2)+s],$$

где $g_\xi(s)$ определена формулой (16),

$$g_\xi[m(\alpha_1+\alpha_2)+s]=\frac{\gamma e^{-(z_1+m(\alpha_1+\alpha_2)+s)T}+(1-\gamma)e^{-(z_2+m(\alpha_1+\alpha_2)+s)T}}{1-\dfrac{\gamma z_1\left[1-e^{-(z_1+m(\alpha_1+\alpha_2)+s)T}\right]}{z_1+m(\alpha_1+\alpha_2)+s}-\dfrac{(1-\gamma)z_2\left[1-e^{-(z_2+m(\alpha_1+\alpha_2)+s)T}\right]}{z_2+m(\alpha_1+\alpha_2)+s}},$$

z_1, z_2 определены в (5), γ определена в (11) для T=0.

Как отмечалось в первой главе, даже в случае непродлевающегося мертвого времени принципиально возможна оценка только четырех параметров из пяти λ_1, λ_2, α_1, α_2, T. В случае продлевающегося мертвого времени ситуация очевидно не изменится. Явный вид преобразования Лапласа позволяет получить аналитический вид начальных моментов: $g_\tau^{(k)}(s)|_{s=0}=(-1)^k M\left(\tau^k\right)$, k=1,2,.... Для оценки четырех неизвестных параметров имеем уравнения моментов: $M\left(\tau^k\right)=C_k$, $k=\overline{1,4}$, где $M\left(\tau^k\right)=(-1)^k g_\tau^{(k)}(s)|_{s=0}$. Если имеется априорная информация о параметрах исходного асинхронного потока событий, то для оценки длительности мертвого времени T достаточно одного уравнения моментов (κ=1). Рассматривается частный случай исходного асинхронного потока, когда $\alpha=\alpha_1=\alpha_2$. Тогда первое уравнение моментов (κ=1) примет вид:

$$\frac{1}{z_2}+\frac{(z_2-\lambda_1)(z_2-\lambda_2)}{2\alpha z_1z_2}+\frac{z_2\gamma(1-\exp\{-z_1T\})+z_1(1-\gamma)(1-\exp\{-z_2T\})}{z_1z_2[\gamma\exp\{-z_1T\}+(1-\gamma)\exp\{-z_2T\}]}-\frac{\alpha(\lambda_1-\lambda_2)^2}{2(z_1z_2)^2}\times$$

$$\times\frac{\gamma\exp\{-(z_1+2\alpha)T\}+(1-\gamma)\exp\{-(z_2+2\alpha)T\}}{1-\dfrac{\gamma z_1}{z_1+2\alpha}[1-\exp\{-(z_1+2\alpha)T\}]-\dfrac{(1-\gamma)z_2}{z_2+2\alpha}[1-\exp\{-(z_2+2\alpha)T\}]}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i,$$

где z_1, z_2 определены в (5), γ определена в (11). Уравнения моментов можно решить только численно.

Третья глава посвящена исследованию полученных оценок параметров асинхронного потока для случаев непродлевающегося и продлевающегося мертвого времени. Исследования проводятся с использованием имитационной модели асинхронного потока и программной реализации расчета оценок параметров и их характеристик. В главе описаны особенности имитационного моделирования, реализации расчета оценок параметров, приводятся и обсуждаются результаты статистических экспериментов.

Статистический эксперимент по оценке параметров асинхронного потока событий в схеме с непродлевающимся и продлевающимся мертвым временем заключается в построении доверительных интервалов для математических ожиданий оценок параметров $\left\{\hat\lambda_1,\hat\lambda_2,\hat\alpha,\hat T\right\}$. Результаты экспериментов приведены в таблицах и графиках. В качестве иллюстрации на рис.4 приведены графики для случая непродлевающегося мертвого времени для набора параметров $\{T=0.05,\lambda_1=10.0,\lambda_2=0.2,\alpha=0.5\}$. На рис.5 в качестве иллюстрации приведены графики для случая продлевающегося мертвого времени для набора параметров $\{T=1.0,\lambda_1=10.0,\lambda_2=2.0,\alpha=0.5\}$; на рис.6 – для набора параметров

$\{T = 1.5, \lambda_1 = 10.0, \lambda_2 = 2.0, \alpha = 0.5\}$. На графиках использованы следующие обозначения: $\hat{\bar{\lambda}}_1$, $\hat{\bar{\lambda}}_1$, $\hat{\bar{\alpha}}$, $\hat{\bar{T}}$ – выборочные средние оценок параметров λ_1, λ_1, α, T; T_{mod} – время моделирования.

Анализируя численные результаты, представленные в диссертации, можно сделать следующие выводы:

1) С ростом объема выборки доверительные интервалы для математических ожиданий оценок неизвестных параметров $\{\lambda_1, \lambda_2, \alpha, T\}$ сужаются, что является естественным, и можно сказать, что стационарный режим устанавливается при $T_{\text{mod}} \geq 1400$ ед. времени.

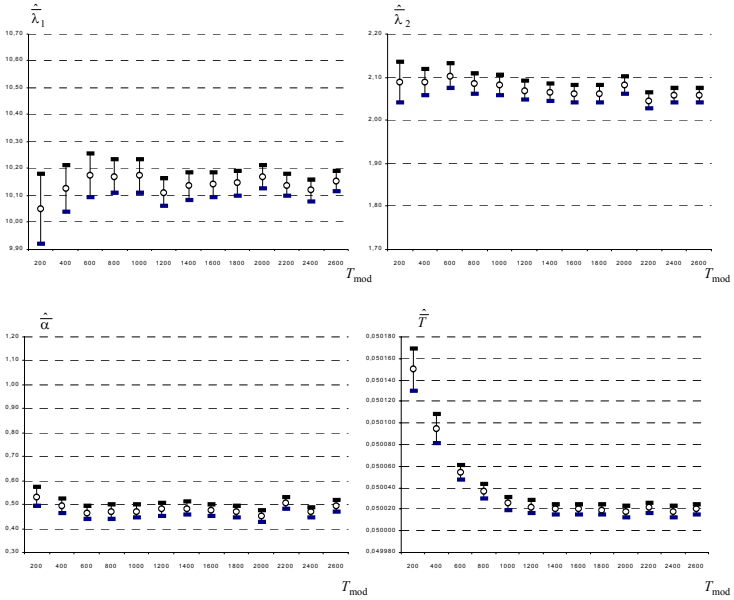

Рис.4

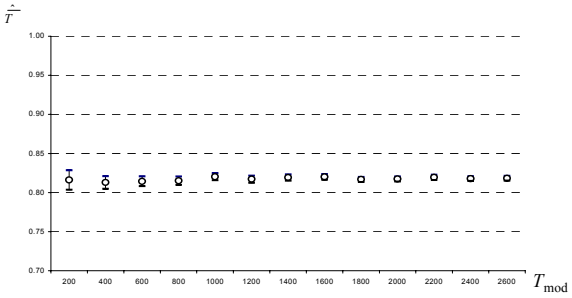

Рис.5

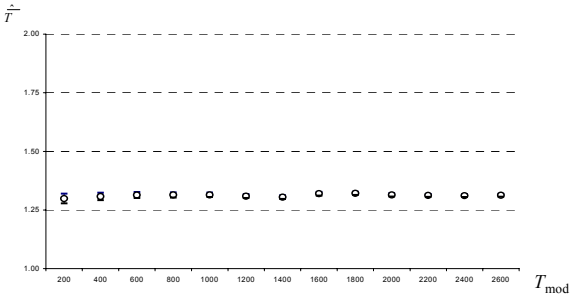

Рис.6

2) При использовании метода моментов, оценки неизвестных параметров получаются смещенными относительно истинных значений, но в большинстве случаев это смещение не велико.

3) В целом из анализа приведенных результатов статистического эксперимента вытекает, что метод моментов дает удовлетворительные результаты по оценке длительности мертвого времени и оценке параметров асинхронного потока событий.

В заключении содержатся выводы о новом решении задачи оценивания длительности мертвого времени и параметров асинхронного потока событий по наблюдениям за потоком и формулируются основные научные и практические результаты, которые состоят в следующем:

– получен явный вид плотности распределения вероятностей интервала между соседними событиями наблюдаемого потока в схеме с непродлевающимся мертвым временем;

– получен явный вид плотности распределения вероятностей интервала между соседними событиями наблюдаемого потока в схеме с непродлевающимся мертвым временем, когда мертвое время – случайная величина;

– получен явный вид преобразования Лапласа плотности распределения вероятностей интервала между соседними событиями наблюдаемого потока в схеме с продлевающимся мертвым временем;

– разработаны алгоритмы оценивания параметров асинхронного потока событий и длительности мертвого времени по наблюдениям за потоком, основанные на решении уравнений моментов;

– проведено имитационное моделирование асинхронного потока событий как в схеме с непродлевающимся, так и в схеме с продлевающимся мертвым временем; получены и интерпретированы численные результаты.

Список публикаций по теме диссертации

1. Васильева Л.А. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях присутствия мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2002.–№1(I). – С. 9–13.
2. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание параметров МС-потока при условии его частичной наблюдаемости//Математическое моделирование. Кибернетика. Информатика. – Томск: ТГУ, 1999.– С.34–41.
3. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости//Материалы Всероссийской научно-практической конференции “Новые технологии и комплексные решения: наука, образование, производство”. Часть II (математика). – Кемерово: Изд-во Кемеровского университета, 2001.– С.14–16.
4. Васильева Л.А. Оценивание параметров МС-потока событий при условии его частичной ненаблюдаемости //Сборник материалов конференции СФТИ при Томском госуниверситете, посвященной 70-летию образования института: 29сентября-2 октября 1998г. Тезисы докладов.– Томск: Изд-во СФТИ, 1998.–С. 46–47.
5. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости //Автоматика и телемеханика. – 2002. – №3. – С.179–184.
6. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости //Автоматика и телемеханика. – 2003. – №12. – С.69–79.