

На правах рукописи

Бондаренко Анатолий Николаевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕРАЗРУШАЮЩЕГО  
КОНТРОЛЯ МЕЗОСКОПИЧЕСКИХ СРЕД И МЕТОДЫ  
ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ (АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ)

Специальность 05.13.18 –  
Математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ.

Автореферт

диссертации на соискание ученой степени доктора  
физико-математических наук

Новосибирск – 2005

Официальные оппоненты:

1. д.ф-м.н., проф. Блохин А.М.,
  2. д.ф-м.н., проф. Кошкин Г.М.,
  3. д.ф-м.н., проф. Лопатин В.Н.

Ведущая организация:

Институт вычислительной математики и математической геофизики, Новосибирск, СО РАН.

Защита состоится 17 марта 2005 года в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.08 при Томском государственном университете по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Томского государственного университета.

Отзывы на автореферат (2 экз.), заверенные печатью, высыпать по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, ученому секретарю ТГУ.

Автореферат разослан февраля 2005 года.

Ученый секретарь диссертационного совета  
доктор технических наук, доцент

Скворцов А.В.

## **Актуальность**

Изучениеnanoструктур знаменует новый этап развития естественных наук. Наноструктуры - это структуры, по своим размерам занимающие промежуточное положение между молекулами и микроскопическими объектами, т.е. объектами размером порядка 1 мкм. Они содержат конечное число атомов и, следовательно, подходят для решения современных технологических задач на атомном уровне. Следует особо отметить широту и разнообразие возможностей, создаваемых этим научным направлением. Это особенно справедливо для материаловедения, где нанотехнология в ближайшие десятилетия должна привести к подлинной революции.

В этой связи в последнее время значительно усилился интерес к построению моделей среды на nanoуровне, иначе называемым мезоскопическим моделям сплошной среды. Это объясняется так же тем, что при создании новых технологий неразрушающего контроля среды, обычно сталкиваются с проблемой создания адекватной как математической, так и физической модели исследуемого объекта. При этом часто получаемая математическая модель не описывается дифференциальными уравнениями в частных производных. Одной из первых таких математических моделей, созданной для описания рассеяния излучения, можно считать уравнение переноса. Примерами сред, для которой часто рассматривается мезоскопическая модель, являются, например, среды с временной или пространственной дисперсией и уставший металл.

Ситуация с описанием физических процессов на мезоуровне начала меняться после после принятия физическим сообществом идей Мандельброта о структурном самоподобии (фрактальности). Многочисленные примеры физических структур, обладающих самоподобием на уровне промежуточном между микро и макроуровнями (на мезоуровне), стали объектами пристального внимания со стороны физиков - экспериментаторов. Оказалось, что материалы, мезоскопическая структура которых обладает свойством масштабной инвариантностью (скейлинга) всего 5-8 порядков, имеют уникальные физические свойства, являющиеся результатом его внутренней самоподобной "архитектуры". Заметим, что для такого материала нельзя определить такое основное понятие физики сплошной среды как "плотность" и, соответственно, для него нет адекватной математической модели.

Наибольший вклад в развитие этого направления внесли: Смирнов Б.М., Соколов Д.Д., Полякарпов М.И., Бершадский А.Г., Зосимов В.В., Потапов А.А., Нигматулин Р.Р., Чукбар К.В., Учайкин В.В., Кобелев В.Л., Романов Е.П., Оксогоев А.А., Бунин Е.Ж., Иванова В.С., Васильев Л.Н., Андреев Г.А., Галкина Т.В., Опаленов Ю.В., Милованов А.В., Засовин Э.А., Соколов А.Ф., Кравченко В.Ф., Bande A., Halvin S., Lauwerier H., Niemeyer L., Pietronero L., Wiesmann H.J., Davaney R.L., Ramstyein A.S., Schaefer D.W., Keefer K.D., Pfeifer P., Jakeman E., Allain C., Cloitre M., Tsallis C., Alexandrowicz Z.,

Для всех этих математических моделей большой интерес представляют задачи неразрушающего контроля. Эти обратные задачи, состоящие в определении характеристик среды по известным параметрам реакции этой среды на внешнее воздействие, не являются, как правило, классическим коэффициентными обратными задачами для уравнений в частных производных.

Поэтому на первом этапе постановки обратной задачи актуальной становится задача нахождения параметров, несущих наиболее значимую информацию об интересующих нас внутренних характеристиках среды. В этом случае выделение этих параметров и исследования характера зависимости этих параметров от характеристик среды является основной задачей компьютерного моделирования и может привести к созданию новых технологий неразрушающего контроля среды.

## **Состояние проблемы**

Одной из основных задач неразрушающего контроля я мезоскопических сред, ставшей актуальной в последнее десятилетие, являются задача оптической (лазерной) томографии. Задачи лазерной томографии возникли в результате отказа от использования сильно ионизирующего гамма излучения при ранней диагностики рака головного мозга. Применение классической

ния оптического излучения видимого диапазона. Как известно классическая схема томографии основана на обращении преобразования Радона, при этом рассеянное излучение воспринимается как шум. Использование уравнения переноса для описания рассеяния фотонов в оптически плотных средах делает обратную задачу более адекватной физической проблеме и снимает ряд проблем, однако, математическая сложность такой обратной задачи возрастает. Это связано с переходом от задачи обращения преобразования Радона к обратной задаче для уравнения переноса. Большой вклад в развитие теории обратных задач для уравнения переноса внесли Амиров А.Х., Аниконов Ю.Е., Аниконов Д.С., Иванков А.Л., Нижник Л.П., Орловский Д.Г., Прилепко А.И., Романов В.Г., Тараков В.Г., Case K.M., Larsen E.W., McCormick N.J., Sanches R., Grunbaum A., Dorn O., Natterer F. Автору известна единственная работа Wang Z.-S., Lu B.-W. в которой рассматривалась обратная задача рассеяния для фрактальной среды.

Исследования структуры фундаментального решения стационарного уравнения переноса, результаты которого приведены в диссертации, привело к созданию принципиально новой технологии дистанционного зондирования оптически плотных сред. Эту схему будем называть *спектроскопией с высоким пространственным и угловым разрешением*. (Space-domain spectroscopy) Для этой схемы автором разработаны простые численные алгоритмы решения возникающей обратной задачи. Эти алгоритмы являются более устойчивыми и позволяют определять дополнительные параметры среды. В предложенной схеме, использование рассеянного излучения, как источника дополнительной информации о среде, дало возможность восстанавливать одновременно не один, а два параметра, характеризующих среду.

Однако, практическая реализация этой схемы для объектов размером порядка  $10^3$  длин свободного пробега, натолкнулась на определенные трудности. Как показали совместные с группой проф. Наттерера компьютерные Монте-Карло эксперименты, это было связано со следующим обстоятельством. Угловые особенности рассеянного излучения, порожденные сосредоточенным, мононаправленным источником, быстро затухая в оптически плотной среде, становились не доступными для регистрации современной аппаратурой. Для биологических объектов размером в несколько десятков длин свободного пробега, таких как молочная железа, эта схема давала желаемый результат. Но для объектов типа головного мозга ( $10^3$  длин свободного пробега) эта схема не могла быть практически реализована.

Для решения этого проблемы рассматриваются два подхода.

1. *Подход, предполагающий создание новой математической модели, описывающей рассеяние излучения в оптически плотной среде.*

В этом направлении в диссертации, на основе подхода, используемого в современной теории поля, было выведено интегральное уравнение напоминающее уравнение Липпмана-Швингера. После анализа структуры сингулярностей его решения был предложен метод решения обратной задачи, состоящей в восстановлении двух параметров среды по измерениям плотности модуля вектора Пойнтинга на границе области. Как показало компьютерное моделирование, этот метод позволяет исследовать внутреннюю структуру объектов порядка  $10^2$  длин свободного пробега. Основная проблема заключалась в том, что для лазерной томографии головного мозга требуются методы, работающие с объектами порядка  $10^3$  длин свободного пробега фотона видимого спектра.

2. *Подход, основан на таком статистическом явлении, как диффузионные волны.*

На сегодняшний день, в зависимости от конфигурации экспериментальной установки и используемой теоретической модели распространения света в исследуемой среде, принято различать две базовых методики определения искомых оптических характеристик:

*Спектроскопия с высоким времененным разрешением* (в англоязычной литературе "Time-resolved" или "Time-domain spectroscopy"). На поверхность исследуемой сильно-рассеивающей среды падает короткий (обычно пикосекундный) лазерный импульс. Интенсивность рассеянного света регистрируется приемником, расположенным на известном расстоянии от точки падения лазерного излучения на поверхность среды. Выражение для интенсивности, как функции

онарного уравнения диффузии света в исследуемой среде. Искомые оптические характеристики среды входят в полученное выражение в качестве параметров. Наибольший вклад в разработку этого направления внесли Patterson M.S., Chance B., Wilson B.C., Kienle A., Wang R.K., Wikramasinghe Y.A.

*Модуляционный метод ("Frequency-domain technique").* Одним из самых перспективных направлений в области неразрушающего контроля среды, является исследование свойств диффузионных волн в регулярных средах и в средах с временной дисперсией. Диффузионные волны, как физическое явление, являются основой для создания одной из самых перспективных технологий неразрушающего контроля сплошной среды. Разработка технологии "Frequency-domain technique" привела, после многочисленных физических экспериментов, к исследованию нового типа волн - волн фотонной плотности. Эти волны являются сильно затухающими волнами огибающей плотности фотонов и порождаются периодическим источником излучения в оптически плотной среде. Микроскопически отдельные электроны совершают случайные блуждания в рассеивающей среде, но коллективно они формируют волну фотонной плотности на частоте модуляции  $\omega$ , которая распространяется от источника излучения. Диффузные волны такого типа хорошо известны в различных областях физики, например, они возбуждаются при поглощении модулированного лазерного излучения различными средами, в том числе и биологическими.

Модуляционный метод развивался в работах: Tuchin B.B., Arridge S.R., Patterson M.S., Chance B., Kienle A., Cubeddu R., Pifferi A., Taroni P., Torricelli A., Valentini G., O'Leary M.A., Arjun G., Tromberg B.J., Coquoz O., Fiskin J.B., Schweiger M. В качестве источника света использовалось непрерывное лазерное излучение, модулированное по амплитуде. Падение амплитудно-модулированного излучения на поверхность исследуемой сильно-рассеивающей среды приводит к возникновению в ней небольшого, но доступного для измерения возмущения плотности энергии света в среде, которое распространяется в среде в виде бегущих волн. Эти волны являются частным случаем диффузионных волн. Выражение для плотности энергии света в рассеивающей среде, как функции координаты и времени, обычно получают из решения нестационарного уравнения диффузии с соответствующим граничным условием. Как показал Arridge, амплитуда и фаза переменной составляющей плотности энергии света в рассеивающей среде зависят от оптических характеристик среды - коэффициента поглощения и приведенного коэффициента рассеяния света. Это дает возможность определить искомые оптические характеристики среды, измерив амплитуду и фазу, зависящую от времени составляющей плотности энергии света в исследуемой оптически плотной среде.

Отметим, что под диффузионными волнами понимаются физически различные явления. Например, слабую локализацию нососекундного светового импульса в оптически плотной среде и волны плотности фотонов, возбуждаемые периодическим по времени источником. Фурье называл тепловыми волнами решения параболического уравнения с периодическим источником в бесконечной среде. Свойства этого решения известны теперь как законы Фурье. Зоммерфельд рассмотрел обратную задачу определения коэффициента теплопроводности стержня, по измерению амплитуды и фазы диффузионной волны. Для описания диффузии в средах с аномальной диффузией или с временной дисперсией Нигматулиным было предложено уравнение с дробной производной по времени, носящее его имя.

Прямые физические эксперименты, результаты которых приведены в работах Tromberg B.j., Svaasand L.O., Tsay T.-T., Haskell R.C., O'Leary M.A., Boas D.A., Chance B., Yodh A., показали, что волны фотонной плотности обладают типичными для волн свойствами: они преломляются, дифрагируют, обладают дисперсией и затухают. Автору не известны результаты исследований оптических свойств диффузионных волн методом прямого компьютерного моделирования.

В последнее время большое внимание физиков привлекли, так называемые, решетчатые модели мезоскопических сред. Как было замечено выше, исследование неупорядочных систем факторизуется на задачу исследования дискретной модели и проблему предельного перехода. Первая решается путем многочасовых компьютерных экспериментов, вторая - ренормгруппо-

дования открытых нелинейных систем и считается одним из самых эффективных. При этом в современной физике, моделям использующим самоподобные (фрактальные) решетки уделяется особое внимание. В этом направлении следует отметить работы Pai-Yi Hsiao, Burioni R., Gassi D., Donnetti L., Carmona J.M., Mariconi U.M., Ruiz-Lorenzo J.J., Taracon A.

Однако автору не известны работы посвященные исследованию обратных задач для таких моделей.

## Цель работы

Целью работы является разработка новых математических моделей и численных методов решения задач неразрушающего контроля мезоскопических сред, возникающих в рамках этих моделей. Компьютерное моделирования работы построенных на основе этих математических моделей измерительных схем с целью исследования их эффективности, точности и границ применимости.

В рамках указанной цели были поставлены следующие задачи:

1. Исследовать структуры фундаментальных решений стационарного и нестационарного уравнения переноса с переменными коэффициентами с целью решения методом сингулярных разложений обратных задач теории переноса излучения, возникающих в задачах томографии с рассеянием. Разработать на этой основе новые схемы томографии, использующих рассеянное излучение, как дополнительную информацию о среде.
2. Разработать новые математические модели для описания процессов рассеяния излучения в оптически плотных средах. Построить новые схемы измерения в томографии для сред с сильным рассеянием, использующих информацию только о распределении плотности энергии излучения на границе.
3. Разработать математические методы моделирования всех предлагаемых схем томографии с рассеянием с целью исследования их эффективности, точности и границ применимости.
4. Провести компьютерное моделирование процессов рассеяния диффузионных волн, с целью сравнительного анализа их оптических свойств в различных моделях и разработка на основе этого исследования рекомендаций для создания новых технологий неразрушающего контроля мезоскопических сред, основанных на регистрации диффузионных волн.
5. Разработать математические модели, описывающие процесс отражения волн от границ раздела регулярной и фрактальной среды. Провести компьютерное моделирование критических явлений в модели Изинга на самоподобных решётках, с целью определения влияния параметров этих решёток на величину критических экспонент.
6. Разработать математические методы моделирования для нахождения высокочастотной асимптотики малые поперечных колебания этих решёток, с целью нахождения параметров, несущих наибольшую информацию о структуре решёток.

## Научная новизна

1. Впервые получены аналитические результаты о сингулярной и регулярной структуре фундаментальных решений стационарного и нестационарного уравнений переноса с переменными коэффициентами, доказаны теоремы единственности решения возникающих в томографии с рассеянием обратных задач, построены численные алгоритмы их решения, разработаны новые схемы томографии в оптически плотных средах, проведено моделирование работы этих схем и даны выводы об их эффективности и границах применимости.
2. Впервые дан феноменологический вывод интегрального уравнения (Липпмана-Швингера) для эволюции плотности энергии рассеянного электромагнитного излучения в оптически плотных средах, получены две теоремы об асимптотическом разложении решения этого

томографии и построены численные алгоритмы ее решения. На этой основе, впервые, разработана новая схема томографии с рассеянием, проведено моделирование переднего фронта решения уравнения ЛШ и сделаны выводы об эффективности предложенной схемы. Впервые, путем сведения к задаче интегральной геометрии для семейства эллипсоидов, получена теорема единственности и алгоритм решения линеаризованной постановки задачи томографии с рассеянием.

3. Впервые, с помощью техники фейнмановских диаграмм, была получена теорема о структуре особенностей решения уравнения ЛШ с сингулярными неоднородностями в потенциале и разработаны алгоритмы решения задачи томографии с рассеянием, состоящей в определении координат сингулярных неоднородностей по следу решению уравнения (ЛШ) на границе исследуемой области. Впервые разработан метод сведение этой задачи к обратной задачи рассеяния для уравнения Шредингера на полном графе, получена теорема единственности и разработаны численные алгоритмы решения этой задачи.
4. Впервые, с помощью разработанного метода локальной оценки потока излучения вфиксированный момент времени, путем компьютерного моделирования диффузионных волн для различных моделей мезоскопических сред, обнаружены явления дифракции, рефракции, выполнение принципа Гюйгенса-Френеля и явление разогрева неоднородностей. На основе этого моделирования, впервые дан анализ перспективности различных схем диффузионной томографии.
5. Впервые получены аналитические решения одномерных обратных задач для уравнения Нигматулина с постоянными коэффициентами, состоящих в определении коэффициента теплопроводности и порядка дифференциального оператора по измерениям в нескольких точках и на разных частотах. Впервые получено обобщение законов Фурье для сред с временной дисперсией.
6. Впервые, с помощью компьютерного моделирования, как классическим, так и квантовым методами Монте-Карло, исследованы различные решетчатые математические модели отражения волн от полуплоскости замощенной решетками Серпинского. В качестве решетчатых моделей распространения волны впервые выбирались модель Каца, модель предложенная Фейнманом для уравнения Дирака (спинорная модель) и модель квантового блуждания.
7. Впервые, путем компьютерного моделирования критических явлений на самоподобных решетках, исследовано влияния параметров самоподобной решетки на величину температуры Кюри и сделаны выводы о перспективности использования значения критических экспонент в задаче неразрушающего контроля уставших ферромагнетиков в рамках модели фрактальной параметризации материала.
8. Впервые, методом теплового ядра, сводящего исследование спектральной асимптотики малых собственных колебаний решетки к моделированию некоторого случайного процесса на этой решетке, исследована высокочастотная асимптотика самоподобных решеток. Результаты компьютерного моделирования дают возможность сделать выводы о перспективности технологий неразрушающего контроля среды на основе измерения параметров высокочастотной асимптотики спектра её малых колебаний.
9. Впервые разработаны основы техники спектральной хирургии квантовых графов, используя которую впервые удалось получить функциональное уравнение для  $\mathbb{S}$ -матрицы конечно разветвленной салфетки Серпинского. Впервые доказаны теоремы единственности решения для обратной задаче рассеяния для уравнения Шредингера на иррациональном

## **Теоретическая значимость**

1. Аналитические результаты о сингулярной структуре фундаментальных решений стационарного уравнения переноса, нестационарного уравнения переноса и уравнения Липпмана-Швингера могут использованы для создания новых численных алгоритмов решения задач неразрушающего контроля среды.
2. Уравнение типа Липпмана-Швингера, предложенное в работе для описания эволюции плотности вектора Пойнтинга электромагнитного поля в оптически плотной среде, является более удобным чем уравнение переноса и не имеет артефакта - бесконечной скорости распространения возмущений, присущего уравнению теплопроводности. Предложенный подход, может использован для вывода новых уравнений для описания рассеяния излучения в средах с аномальной диффузией.
3. Точные решения обратных задач аномальной диффузии, полученные в работе, могут быть использованы при построении численных алгоритмом решения обратных задач аномальной диффузии.

## **Практическая значимость**

1. Разработана новая схема томографии с рассеянием, в которой рассеянное излучение воспринимается не как шум, а как источник дополнительной информации, позволяющей определять одновременно две характеристики среды. Эта схема была положена в основу проекта, принятого правительством России к финансированию и уже частично реализована западными фирмами. Алгоритмы и пакеты программ, разработанные для моделирования работы этой схемы, позволяют исследовать ее эффективность в различных ситуациях.
2. Разработаны алгоритмы численного решения обратной задачи томографии с сингулярными неоднородностями, позволяющие находить их координаты в неоднородной среде.
3. Результаты численного моделирования, на основе разработанных алгоритмов, поведения диффузионных волн для различных моделей распространения излучения позволили сделать выводы о перспективности различных схем оптической томографии.
4. Явление разогрева неоднородностей, выявленное в результате компьютерного моделирования поведения диффузионных волн в различных моделях рассеяния излучения дает теоретическую возможность для создания новых технологий для раннего лечения злокачественных новообразований.
5. Результаты компьютерного моделирования новых моделей процессов отражения электромагнитных волн от "фрактальных" поверхностей, позволяют сделать ряд выводов об их адекватности реальным процессам.
6. Полученные компьютерным моделированием, проведенным на основе комплекса разработанных программ, выводы о перспективности использования значения критических экспонент в задаче неразрушающего контроля уставших ферромагнетиков и высокочастотной асимптотики малых колебаний в рамках модели фрактальной параметризации материала, дают основу создания новых технологий неразрушающего контроля мезоскопических сред.

**Достоверность** результатов диссертации подтверждаются их совпадением в частных случаях с результатами расчетов выполненных другим авторами и с помощью других методов. Теоретические результаты опубликованы в ведущих зарубежных журналах, докладывались на крупных международных конференциях и представлены в их публикациях. Они известны в научном сообществе и цитируются в работах других авторов.

## На защиту выносятся

1. Результаты исследования сингулярной структуре фундаментальных решений стационарного и нестационарного уравнений переноса с переменными коэффициентами и решений уравнения Липпмана-Швингера.
2. Алгоритмы решения (аналитические и численные) решения обратных задач рассеяния в оптически плотных средах и новые схемы томографии, построенные на этой основе. Выводы об их эффективности и границах применимости, основанные на результатах компьютерного моделирования работы этих схем.
3. Методы решения задач оптической томографии, основанные на описании эволюции плотности энергии рассеянного электромагнитного излучения в оптически плотных средах с помощью предложенного в работе интегрального уравнения типа Липпмана-Швингера.
4. Метод исследования сингулярной структуры уравнения (ЛШ), основанный на технике фейнмановских диаграмм и результаты исследования структуры решения уравнения (ЛШ) с сингулярными включениями в потенциале. Методы решения задачи томографии с рассеянием, состоящей в определении координат сингулярных неоднородностей по следу решению уравнения (ЛШ) на границе исследуемой области. Метод сведение этой задачи к обратной задаче рассеяния для уравнения Шредингера на полном графе.
5. Метод локальной оценки потока излучения в фиксированный момент времени и результаты численного моделирования диффузионных волн в различных моделях мезоскопических сред. Обнаружение явлений дифракции, рефракции и выполнение принципа Гюйгенса-Френеля для диффузионных волн в различных моделях. Комплекс программ и результаты компьютерных экспериментов по исследованию свойств диффузионных волн, порожденных периодическим по времени источником в модели параболического уравнения. Обнаружение явления "разогрева" неоднородностей диффузионной волной. Данный, на основе этого моделирования, анализ перспективности различных схем диффузионной томографии. Аналитические результаты, полученные для обратных задач для уравнения Нигматулина с постоянными коэффициентами.
6. Методы моделирования в задаче отражения электромагнитной волны от полуплоскости замощенной решетками Серпинского. Сравнительный анализ различных моделей, основанный на результатах компьютерных экспериментов, полученных как классическим, так и квантовым методами Монте-Карло.
7. Результаты моделирования критических явлений на самоподобных решетках и анализ влияния параметров самоподобной решетки на величину температуры Кюри. Выводы о перспективности использования значения критических экспонент в задаче неразрушающего контроля уставших ферромагнетиков в рамках модели фрактальной параметризации материала.
8. Метод исследования высокочастотной асимптотики малых собственных колебаний самоподобных решеток методом теплового ядра, сводящий исследование этой асимптотики к моделированию некоторого случайного процесса на этой решетке. Выводы о перспективности технологий на основе измерения параметров высокочастотной асимптотики спектра малых колебания среды.

## Апробация

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- Международном симпозиуме по теории обратных задач (Самарканд-1987)
- Заседании рабочей группы по разработке рекомендаций правительству по создания оптического томографа (Санкт-Петербург-1991, 3-8 мая.).
- International Symposium on Computerized Tomography, ( Novosibirsk-1993).
- International workshop "Computational Radiology and Imaging: Therapy and Diagnostic", Minneapolis, Institute for Mathematical and its Applications, 3-17 march, 1997.
- International Conference "ILL-POSED AND INVERSE PROBLEMS" dedicated to Prof. M.M. Lavrent'ev, Novosibirsk-1999.
- 6th International Symposium on science and technology, Novosibirsk State Technical University, 24-30 June 2002.
- 7 th International Symposium on science and technology, Ulsan Technical University, Korea, June 24-July 30, 2003.
- 8 th International Symposium on science and technology, Tomsk State University, Tomsk, June 26-July 3, 2004.

Основные результаты докладывались также на семинарах Института Математики, Вычислительного Центра СО РАН, Института Гидродинамики и Новосибирского Государственного Технического Университета.

## Публикации

По теме диссертации автором опубликовано 58 печатных работ, в том числе 20 - в рекомендованных ВАКом журналах и в центральных зарубежных изданиях, 10 работ опубликовано без соавторов.

## Личный вклад автора

Диссертационная работа и все результаты, лежащие в её основе, выполнена и получены при непосредственном участии автора на всех этапах. Ему полностью принадлежат постановки задач исследования, теоретические исследования и анализ численных экспериментов.

Работа выполнялась в Институте Математики им. С.Л. Соболева СОРАН и Новосибирском Государственном Техническом Университете в период с 1985 по 2004 год.

## Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, шести глав, и заключения, изложенных на 319 страницах машинописного текста.

Во **Введении** изложен краткий обзор современного состояния теории мезоструктур. Очерчены основные понятия, постановки задач и методы решения задач неразрушающего контроля мезоскопических сред. Дано структура диссертации по главам, оценена научная новизна и практическая ценность полученных результатов и приведен список основных публикаций по теме диссертации.

В **главе 1** диссертации рассмотрено нестационарное уравнение переноса:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial U}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla_x U + \sigma(x)U = \frac{\sigma_s(x)}{4\pi} \int_{S^2} \eta(x, \Omega, \Omega^*) U(x, t, \Omega^*) d\Omega^* + Q(x, t, \Omega).$$

ства бесконечно-дифференцируемых функций с компактным носителем в  $\mathbb{R}^4 \times \mathcal{S}^2$ .

В дальнейшем мы будем называть пару(систему)  $(\sigma, \sigma_s \eta)$  допустимой если:

- Функции  $\sigma_s(x), \sigma(x)$  являются неотрицательными функциями из  $\mathcal{D}$  и  $\eta(x, \Omega, \Omega^*)$  - неотрицательная из пространства  $C_0^\infty$  функция.
- Рассматриваемую систему будем называть подкритической если :

$$0 \leq \sigma_s(x) \leq \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Пусть  $B$  будет замкнутый конус  $B = \{x \in \mathbb{R}^3, t \in \overline{\mathbb{R}_+^1} : vt \geq |x - x^0|\}$  и  $K^+ = B \times \mathcal{S}^2$  область в  $\mathbb{R}^4 \times \mathcal{S}^2$ . Обозначим через

$$\begin{aligned} K^+(\tau) &= K^+ \cap \{0 \leq t \leq \tau\}, D(\tau) = \{|x - x^0| < v\tau\} \subset \mathbb{R}^3 \\ K &\equiv K^+(T) \text{ и } D \equiv D(T), \end{aligned}$$

для некоторой фиксированной константы  $T > 0$ .

Мы обозначим через  $\beta = \frac{v}{4\pi} \sup_{\Omega^* \in \mathcal{S}^2} \|\sigma_s \eta\|_\infty$ . Здесь  $\|\cdot\|_\infty$  норма в  $L^\infty(K)$   $\|f\|_\infty = \text{esssup}_K |f(x, t, \Omega)|$ . Нам понадобятся следующие условия :

**УА** Пусть существует выпуклая, связанная область  $D_0 \subset D$  с  $\text{diam } D_0 = R_0$  такая, что  $(x \in \mathbb{R}^3; |x - x^0| < vT_1) \subset D_0$ , для некоторого  $T_1 \leq T$  и для некоторой  $\gamma = \text{const}$ ,

$$0 < \gamma \leq \sigma_a(x), \quad x \in \overline{D_0} \quad (\text{однородность поглощения}).$$

Пусть выполнено неравенство

$$\text{WS} \quad \sup_{(x, t, \Omega) \in K} \int_\alpha^t \rho(x, x - v(t-\tau)\Omega) dt < \frac{1}{v\beta} \quad (\text{слабое рассеяние}).$$

Здесь  $\alpha = |x - x^0 - vt\Omega|^2 (2v(vt - \Omega \cdot (x - x^0)))^{-1}$  и через  $\rho(x, y)$  обозначена оптическая длина пути

$$\rho(x, y) = \exp \left( -|x - y| \int_0^1 \sigma(x + s(y - x)) ds \right).$$

Задача Коши для уравнения переноса

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial U}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla_x U + \sigma(x)U &= \lambda \frac{\sigma_s(x)}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \eta(x, \Omega, \Omega^*) U(x, t, \Omega^*) d\Omega^* + Q(x, t, \Omega) \\ U(x, t, \Omega)|_{t<0} &\equiv 0 \end{aligned}$$

может быть преобразована к интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} U(x, t, \Omega) &= \lambda \frac{v}{4\pi} \int_0^t d\tau \rho(x - v(t-\tau)\Omega, x) \sigma_s(x - v(t-\tau)\Omega) \\ &\times \left( \int_{\mathbb{S}^2} \eta(x - v(t-\tau)\Omega, \Omega, \Omega') U(x - v(t-\tau)\Omega, \tau, \Omega') d\Omega' + Q(x - v(t-\tau)\Omega, \tau, \Omega) \right). \end{aligned}$$

Это уравнение может быть представлено в виде

$$U(x, t, \Omega) = \lambda \text{KS} U(x, t, \Omega) + \text{K} Q(x, t, \Omega),$$

где  $\text{S}, \text{K}$  интегральные операторы

$$\begin{aligned} \text{S } \varphi(x, t, \Omega) &\equiv \frac{\sigma_s(x)}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \eta(x, \Omega, \Omega^*) \varphi(x, t, \Omega^*) d\Omega^*, \\ \text{K} \varphi(x, t, \Omega) &\equiv \theta(t) \int_0^t v d\tau \exp \left( - \int_{x-v(t-\tau)\Omega}^x \sigma(x) dl \right) \varphi(x - v(t-\tau)\Omega, \tau, \Omega), \end{aligned}$$

определенные на  $L^\infty(K)$ . Доказана следующая лемма:

Тогда интегральное уравнение

$$U(x, t, \Omega) = K S U(x, t, \Omega) + P(x, t, \Omega)$$

имеет единственное решение  $U(x, t, \Omega) \in L^\infty(K)$  для всех  $P(x, t, \Omega) \in L^\infty(K)$ .

На основе полученного представления Филлипса-Дайсона для фундаментального решения приведена формула Фейнмана - Каца и схема ее доказательства.

Далее в **главе 1** даны доказательства ряда вспомогательных лемм, дающие оценки некоторых сингулярных интегралов необходимые в дальнейшем. Здесь так же сформулированы и доказаны три утверждения, касающиеся структуры фундаментального решения нестационарного уравнения переноса.

**Иерархия сингулярностей фундаментального решения.** Обозначим через  $L(t, \Omega, x^0, \Omega^0)$  отрезок соединяющий точки  $x^0 + vt\Omega$  и  $x^0 + vt\Omega^0$ . Мы также обозначим через  $\Delta_\Omega(t, \Omega, x^0, \Omega^0)$  часть плоскости в  $\mathbb{R}_x^3$ , ограниченную этим отрезком и отрезками  $x = x^0 + v\tau\Omega$ ,  $x = x^0 + v\tau\Omega^0$ ,  $\tau \in [0, t]$ . Рассмотрим 4-многообразие

$$\Gamma^+ = \{x, t, \Omega, (x - x^0 - vt\Omega) \times (\Omega - \Omega^0) = 0\} \cap \{K\}.$$

Мы так же определим функцию

$$\Gamma = \Gamma(x, t, \Omega, x^0, \Omega^0) \equiv |(x - x^0 - vt\Omega^0) \times (\Omega - \Omega^0)|.$$

Точку пересечения луча  $r = x^0 + \Omega^0\tau$ ,  $\tau \in [0, t]$  и луча  $r = x - \Omega\tau$  для любой точки  $x \in \Delta_\Omega$  мы будем обозначать через  $x^*(x, \Omega, x^0, \Omega^0)$ .

Дельта функцию Дирака, сосредоточенную на  $\Gamma^+$ , определим ее действием на основную функцию из  $\mathcal{D}$  следующим образом:

$$(\delta(\Gamma^+), \phi) = \int_{\mathbb{R}_+^1} dt \int_{\mathbb{S}^2} d\Omega \int_{L(t, \Omega, x^0, \Omega^0)} \frac{dl}{|\Omega - \Omega^0|} \phi(x, t, \Omega).$$

Для фиксированных  $x^0, \Omega^0$  обозначим

$$Q^+ = \{x, t, \Omega \in K, (x - x^0 - vt\Omega) \cdot (\Omega - \Omega^0) < 0\}, \quad Q^- = K \setminus Q^+,$$

и

$$\theta_Q \equiv \theta_Q(x, t, \Omega) = \begin{cases} 1, & (x, t, \Omega) \in Q^+, \\ 0, & (x, t, \Omega) \in Q^-. \end{cases}$$

Важными результатами раздела являются следующие теоремы:

**Теорема 2** (*Структура особенностей.*) *Фундаментальное решение для регулярной системы, удовлетворяющей условию (WS), может быть представлено следующим образом:*

$$E(x, t, \Omega) = \sum_{n=0}^{n=3} S_n(x, t, \Omega) \psi_n + \theta(vt - |x - x^0|) g(x, t, \Omega). \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} S_0 &= v\theta(t)\delta(x - x^0 - vt\Omega^0)\delta(\Omega - \Omega^0), \quad \psi_0 = v\rho(x^0, x^0 + vt\Omega^0) \\ S_1 &= \delta(\Gamma^+), \quad \psi_1 = \frac{v}{4\pi}\rho(x^0, x^*)\rho(x^*, x)\sigma_s(x^*)\eta(x^*, \Omega, \Omega^0) \\ S_2 &= \theta(vt - |x - x^0|)\Gamma^{-1}, \quad \psi_2(x, t, \Omega) = \varphi(x, t, \Omega) \arctan \Phi(x, t, \Omega) \\ S_3 &= \theta(vt - |x - x^0|)|\Omega - \Omega^0|^{-1} \ln \left( \frac{ct}{\Gamma} \right), \\ S_4 &= \theta(vt - |x - x^0|) \left[ \ln \left( \frac{c}{|x - x^0 - vt\Omega|} \right) + \theta_Q \ln \left( \frac{c|\Omega - \Omega^0|}{\Gamma} \right) \right] \end{aligned}$$

Более того, пусть дополнительно выполнено условие (UA) и  $\eta(x, \Omega, \Omega^*) > 0$  для  $\Omega, \Omega^* \in \mathbb{S}^2, |x - x^0| < vT_1$ . Тогда  $0 < \varphi(x, t, \Omega)$  на  $\text{int } K^+(T_1)$ .

**Теорема 3** (*Затухание особенностей.*)

Пусть в условиях теоремы 2 дополнительно выполнено условие (UA).

Тогда существует такая константы  $\beta, \gamma$  не зависящие от  $T_1$  и  $n$  такие что

$$0 \leq \psi_n(x, t, \Omega) \leq \beta \exp(-\gamma vt), \quad \text{на } K^+(T_1).$$

для всех  $T_1 > 0$ .

Для каждого набора точек  $x^0, x^1, \dots, x^n$  на границе  $\partial D$  построим два семейства конусов

$$K_n(x^0, x^1, x^2, \dots, x^n; x, t) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ : |x - x^n| + \sum_{k=1}^{k=n} |x^k - x^{k-1}| = vt\}.$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0(x, t) &= \bigcap_{x^0 \in \partial D} \text{Int } K_0(x^0; x, t), \\ \mathcal{K}_n(x, t) &= \bigcap_{x^0, x^1, x^2, \dots, x^n \in \partial D} \text{Int } K_n(x^0, x^1, x^2, \dots, x^n; x, t). \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathcal{K}_n(x, t) \subset \dots \subset \mathcal{K}_3(x, t) \subset \mathcal{K}_2(x, t) \subset \mathcal{K}_1(x, t) \subset \mathcal{K}_0(x, t).$$

Структура заднего фронта фундаментального решения дается следующей теоремой:

**Теорема 4** (*Наличие заднего фронта.*) Для всех  $n \geq 0$

$$\text{supp } S_n \psi_n(x, t, \Omega; x^0, \Omega^0) \cap \mathcal{K}_n(x, t) = \emptyset.$$

Далее в главе рассмотрено стационарное уравнение переноса:

$$\Omega \cdot \nabla_x U + \sigma(x)U = \frac{\sigma_s(x)}{4\pi} \int_{S^2} \eta(x, \Omega, \Omega^*)U(x, \Omega^*)d\Omega^* + W(x, \Omega).$$

Мы выбираем единственное обобщенное решение  $E(x, \Omega; x^0, \Omega^0)$  этого уравнения с  $W(x, \Omega) \equiv \delta(x - x^0)\delta(\Omega - \Omega^0)$ ,  $x^0 \in D, \Omega^0 \in S^2$ , удовлетворяющее граничному условию на  $\partial D$ , которое требует отсутствия входящих из вне частиц в область  $D$ . Это решение мы будем называть фундаментальным решением нестационарного уравнения переноса (ФР).

Обычно для фундаментального решения УЧП задачи построения асимптотик при больших и малых  $|x - x^0|$  рассматриваются отдельно.

Для уравнения переноса в диссертации показано что, с точностью до регулярной части из  $L^\infty(D \times S^2)$ , сингулярная часть ФР содержит два дельта-образных распределения; одно содержит особенность на лучше

$$r = x^0 + \Omega^0 \tau, \quad \tau \geq 0,$$

второе на части 4-мерной поверхности в  $R^3 \times S^2$

$$\bar{\Sigma} = \{(x, \Omega) \in R^3 \times S^2 \mid x^0 + a\Omega^0 + b\Omega - x = 0\}, \quad a, b \geq 0,$$

а так же два слагаемых содержащих сингулярные члены из  $L^{loc}(D \times S^2) \setminus L^\infty(D \times S^2)$  имеющие степенно-логарифмическую и логарифмические оценки.

$$0 \leq \psi_n \leq \beta^n \exp(-\alpha|x - x^0|), \quad (x, x^0) \in D_0, \quad n = 0, \dots, 3,$$

$$\beta = \sup_{\Omega^* \in S^2} \|\sigma_s \eta\|_\infty, \quad \alpha = \inf_{x \in D_s \subset D} \sigma(x) > 0,$$

могут рассматриваться как оценки особенностей одно и двух кратно рассеянных потоков излучения, создаваемых точечным мононаправленным источником в дальней зоне:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \beta^{-2} \exp(\alpha|x - x^0|) E_2(x, \Omega; x^0, \Omega^0) \\ &\leq \frac{1}{|\Omega \times \Omega^0|} \ln \left( \frac{d_1 \delta}{|\omega \cdot (\Omega \times \Omega^0)|} \right), \\ 0 &\leq \beta^{-3} \exp(\alpha|x - x^0|) E_3(x, \Omega; x^0, \Omega^0) \\ &\leq \ln \frac{d_2 \delta}{|\omega \times \Omega^0|} + \Theta \ln \frac{d_2 \delta |\Omega \times \Omega^0|}{|\omega \cdot (\Omega \times \Omega^0)|}, \\ d_{1,2} &= \text{const}, \quad (x, x^0) \in D_0. \end{aligned}$$

В эти оценки входят только

$$\delta = \frac{\text{diam } D}{|x - x^0|} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{x - x^0}{|x - x^0|}$$

и они могут использоваться как асимптотики для больших  $|x - x^0|$ .

С физической точки зрения это описание всех типов особенностей  $n$ -кратнорассеянного потока радиации ( $n=0 \dots 3$ ), порожденного мононаправленным источником, сосредоточенным в точке  $x^0$  однородной среды, заполняющей компактную, связанную область  $D \subset R^3$ . Так как параметры особенностей содержат значимую информацию о среде, задача точного описания особенностей представляет большой интерес для теории обратных задач и является основой метода сингулярных разложений. На основе полученных результатов, в диссертации предложен метод, являющийся обобщением техники классической рентгеновской томографии для случая сред с сильным рассеянием.

Обозначим через  $\mathcal{C}_0^\infty(R^3 \times S^2)$  пространство всех  $\mathcal{C}^\infty$  функций с компактным носителем из  $R^3 \times S^2$ . В дальнейшем мы будем называть пару  $(\sigma, \sigma_s \eta)$  или систему *допустимой* если:

- i  $\sigma_s(x), \sigma(x)$  and  $\eta(x, \Omega, \Omega^*)$  неотрицательные  $\mathcal{C}_0^\infty$  функции.
- ii Существует компактное, выпуклое подмножество  $D \subset R^3$  с измеримой функцией границы  $s_0(x, \Omega)$  (определенной далее),  $\text{diam } D = R_c$ , такая что  $\sigma_s(x)$  обращается в ноль если  $x \in R_x^3 \setminus D$ .
- iii Рассматривая систему является *подкритической*, т.е.:

$$0 \leq \sigma_s(x) \leq \sigma(x), \quad x \in D.$$

Будем обозначать далее  $\|\cdot\|_\infty$  норму на пространстве  $L^\infty(D \times S^2)$  через

$$\|f\|_\infty = \text{esssup}_{D \times S^2} |f(x, \Omega)|$$

и

$$\beta = \sup_{\Omega^* \in S^2} \|\sigma_s \eta\|_\infty.$$

Зададим следующие условия:

(ОП) Существует выпуклое, связное подмножество  $D_s \subset D$  такое, что

$$0 < \alpha \leq \sigma_a(x), \quad x \in D_s$$

(CP)

$$\sup_{(x,\Omega) \in D \times S^2} \int_0^{s_0(x,\Omega)} \rho(x, x - R\Omega) dR < \frac{1}{\beta}$$

(Слабое Рассеяние),

где "граничнаа функция"  $s_0(x, \Omega)$  определяется как расстояние между точкой  $x$  и границей  $\partial D$  вдоль направления  $-\Omega$  и  $\rho$  есть оптическое расстояние

$$\rho(x, y) = \exp \left( -|x - y| \int_0^1 \sigma(x + s(y - x)) ds \right).$$

Мы предполагаем что  $s_0(x, \Omega)$  измерима в том смысле, что для всех  $s > 0$  подмножество  $Q_s \in Q = D \times S^2$  где  $s_0(x, \Omega) \leq s$  измеримо.

Заметим, что если i) выполняется, то

$$0 < \text{esssup}_{D \times S^2} \int_0^{s_0(x,\Omega)} \rho(x, x - R\Omega) dR \leq \text{diam } D.$$

Вектор  $\Omega'$  является *входящим* в  $x \in \partial D$  (обозначение  $\Omega' \in \mathfrak{F}(x)$ ) если и только если существует  $\epsilon = \epsilon(x, \Omega') > 0$  такое что

$$x + \tau \Omega' \in D, \quad 0 < \tau < \epsilon.$$

Пусть  $W(x, \Omega) \equiv 0$ ,  $x \in R^3 \setminus D$ , и  $\Omega \in S^2$ . Тогда решение граничной задачи для допустимой системы

$$\Omega \cdot \nabla_x U + \sigma(x)U = \frac{\sigma_s(x)}{4\pi} \int_{S^2} \eta(x, \Omega, \Omega^*) U(x, \Omega^*) d\Omega^* + W(x, \Omega) \quad (2)$$

$$U(x, \Omega) \equiv 0, \quad (x, \Omega) \in \partial D \times \mathfrak{F}(x) \quad (3)$$

может быть представлено как решение интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} U(x, \Omega) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{R_c} (dR \rho(x, x - R\Omega) \sigma_s(x - R\Omega) \\ &\times \left( \int_{S^2} \eta(x - R\Omega, \Omega, \Omega') U(x - R\Omega, \Omega') d\Omega' \right) \\ &+ W(x - R\Omega, \Omega), \quad (x, \Omega) \in Q. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение (4) может быть записано в форме:

$$U(x, \Omega) = \mathbf{K} \mathbf{S} U(x, \Omega) + \mathbf{K} W(x, \Omega), \quad (5)$$

где  $\mathbf{S}, \mathbf{K}$  обозначены интегральные операторы

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \varphi(x, \Omega) &\equiv \frac{\sigma_s(x)}{4\pi} \int_{S^2} \eta(x, \Omega, \Omega^*) \varphi(x, \Omega^*) d\Omega^*, \\ \mathbf{K} \varphi(x, \Omega) &\equiv \int_0^{s_0(x,\Omega)} dR \rho(x, x - R\Omega) \varphi(x - R\Omega, \Omega) \end{aligned}$$

определенные на  $L^\infty(D \times S^2)$ . Уравнение (4) эквивалентно краевой задаче (2) - (3) для допустимой системе и является основным для дальнейшего рассмотрения.

тогда интегральное уравнение

$$U(x, \Omega) = \mathbf{KS} U(x, \Omega) + P(x, \Omega) \quad (6)$$

имеет единственное решение  $U(x, \Omega) \in L^\infty(D \times S^2)$  для всех  $P(x, \Omega) \in L^\infty(D \times S^2)$ .

Для каждого  $\Omega \in S^2$ , обозначим через  $\delta(l_{\Omega^0}) \in \mathcal{D}'(R^3)$   $\delta$ -функцию, сосредоточенную на луче в  $R_x^3$ , с началом в точке  $x^0$  с направлением  $\Omega^0$  для всех  $\Omega \in S^2$ . Тогда, по определению, мы имеем, для всякой функции  $\phi(x, \Omega) \in \mathcal{D}$ ,

$$(\delta(l_{\Omega^0}) \cdot 1(\Omega), \phi(x, \Omega)) = \int_{S^2} d\Omega \int_0^\infty \phi(x^0 + \tau\Omega^0, \Omega) d\tau.$$

Для каждого фиксированного  $\Omega, x^0, \Omega^0$ , через  $\Sigma = \Sigma(x^0, \Omega, \Omega^0)$ , мы обозначим часть плоскости, расположенной между лучами  $r = x^0 + \Omega\tau$  и  $r = x^0 + \Omega^0\tau$ ,  $\tau \geq 0$ :

$$\Sigma := \{x \in D \mid x = x^0 + a\Omega^0 + b\Omega\}, \quad a, b \geq 0.$$

Функция

$$\frac{1}{|\Omega \times \Omega^0|} \delta(\Sigma)$$

- есть дельта функция, сосредоточенная на 4-мерной поверхности  $\Sigma$ . Ее действие на основную функцию  $\phi(x, \Omega) \in \mathcal{D}$  определяется следующим образом

$$\left( \frac{1}{|\Omega \times \Omega^0|} \delta(\Sigma), \phi(x, \Omega) \right) = \int_{S^2} \frac{d\Omega}{|\Omega \times \Omega^0|} \int_\Sigma \phi(x, \Omega) d\Sigma.$$

Точку пересечения двух лучей  $\{r = x^0 + \tau\Omega^0, \tau \geq 0\}$  и  $\{r = x^0 + \tau\Omega, \tau \leq 0\}$  мы обозначим через  $x^*$ . Обозначим так же

$$F(x, x^0; \Omega, \Omega^0) \equiv ((x - x^0) - ((x - x^0) \cdot \Omega^0)\Omega^0) \cdot \Omega = (x - x^0) \cdot (\Omega - \Omega^0(\Omega^0 \cdot \Omega))$$

и определим для фиксированного  $x^0 \in D$ ,  $\Omega, \Omega^0 \in S^2$  следующую плоскость в  $R_x^3$

$$P := \{x \in D \mid F(x, x^0; \Omega, \Omega^0) = 0\}.$$

Эта плоскость определяет разбиение области  $Q = D \times S^2$  на две части

$$Q_- = \{x \in R_x^3 \mid F(x, x^0; \Omega, \Omega^0) \leq 0\},$$

и

$$Q_+ = \{x \in R_x^3 \mid F(x, x^0; \Omega, \Omega^0) > 0\}.$$

Пусть

$$\Theta \equiv \Theta(x, \Omega; x^0, \Omega^0) = \begin{cases} 1, & (x, \Omega, x^0, \Omega^0) \in Q_+ \\ 0, & (x, \Omega, x^0, \Omega^0) \in Q_- \end{cases}.$$

Пару  $(x, x^0)$ ,  $x, x^0 \in D$ , будем называть *строго внутренней* если

$$dist(x, x^0) \leq dist(x^0, \partial D) + dist(x, \partial D).$$

Множество таких пар мы обозначим через  $D'$ , а некоторое выпуклое множество  $D' \cap (D_s \times D_s)$  через  $D_0$ .

Тогда фундаментальное решение  $E(x, \Omega; x^0, \Omega^0)$  стационарного уравнения переноса может быть представлено в  $Q \times Q$  в форме

$$E(x, \Omega; x^0, \Omega^0) = \sum_{n=0}^{n=3} S_n(x, \Omega; x^0, \Omega^0) \psi_n + g(x, \Omega; x^0, \Omega^0)$$

здесь

$$\begin{aligned} S_0 &= \delta(l_{\Omega^0}) \delta(\Omega - \Omega^0), \\ S_1 &= \frac{1}{|\Omega \times \Omega^0|} \delta(\Sigma), \\ S_2 &= \frac{1}{|\Omega \times \Omega^0|} \ln \left( \frac{d_1 R_c}{|(\Omega \times \Omega^0) \cdot (x - x^0)|} \right), \\ S_3 &= \ln \frac{d_2 R_c}{|(x - x^0) \times \Omega^0|} + \Theta \ln \frac{d_2 R_c |\Omega \times \Omega^0|}{|(x - x^0) \cdot (\Omega \times \Omega^0)|}, \\ \psi_0 &= \rho(x^0, x), \\ \psi_1 &= \frac{1}{4\pi} \rho(x^0, x^*) \rho(x^*, x) \sigma_s(x^*) \eta(x^*, \Omega, \Omega^0), \end{aligned}$$

$g(x, \Omega; x^0, \Omega^0), \psi_{2,3}(x, \Omega; x^0, \Omega^0) \in L^\infty(D \times S^2)$ , и  $R_c = \text{diam } D, d_{1,2} = \text{const.}$

И если условие (ОП) выполнено тогда

$$0 \leq \psi_n(x, \Omega; x^0, \Omega^0) \leq \beta^n \exp(-\alpha|x - x^0|)$$

$$\text{для } (x, x^0) \in D_0 \subset D \times D, (\Omega, \Omega^0) \in S^2 \times S^2, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

В главе 2 предложена новая схема спектроскопии с высоким пространственным разрешением. Эта схема основана на методе сингулярных разложений и результатах о структуре особенностей фундаментального решения стационарного уравнения переноса, полученных в диссертации. Методом спуска доказана следующая теорема:

**Теорема 7** Предположим, что все условия теоремы 6 выполнены.

Тогда основное фундаментальное решение может быть представлено в виде:

$$H(x, \Omega; x^0, \Omega^0) = G_0(x, \Omega; x^0, \Omega^0) g_0 + G_1(x, \Omega; x^0, \Omega^0) g_1 + h(x, \Omega; x^0, \Omega^0) \quad (7)$$

здесь

$$\begin{aligned} G_0(x, \Omega; x^0, \Omega^0) &= \delta(l) \delta(\Omega - \Omega^0) \\ G_1(x, \Omega; x^0, \Omega^0) &= \frac{1}{|\Omega \times \Omega^0|} \delta(\Sigma), \\ g_0 &= \rho(x^0, x) \equiv \exp \left( -|x^0 - x| \int_0^1 \sigma(x^0 + s(x - x^0)) ds \right), \\ g_1 &= \frac{1}{4\pi} \rho(x^0, x^*) \sigma_s(x^*) \eta(x^*, \Omega \cdot \Omega^0) \rho(x^*, x), \end{aligned}$$

и  $h(x, \Omega; x^0, \Omega^0) \in L^1(S^2)$   
для всех  $x^0 \in R^3, \Omega^0 \in S^2$  и  $x \in R_x^3 \setminus l_\epsilon$ .

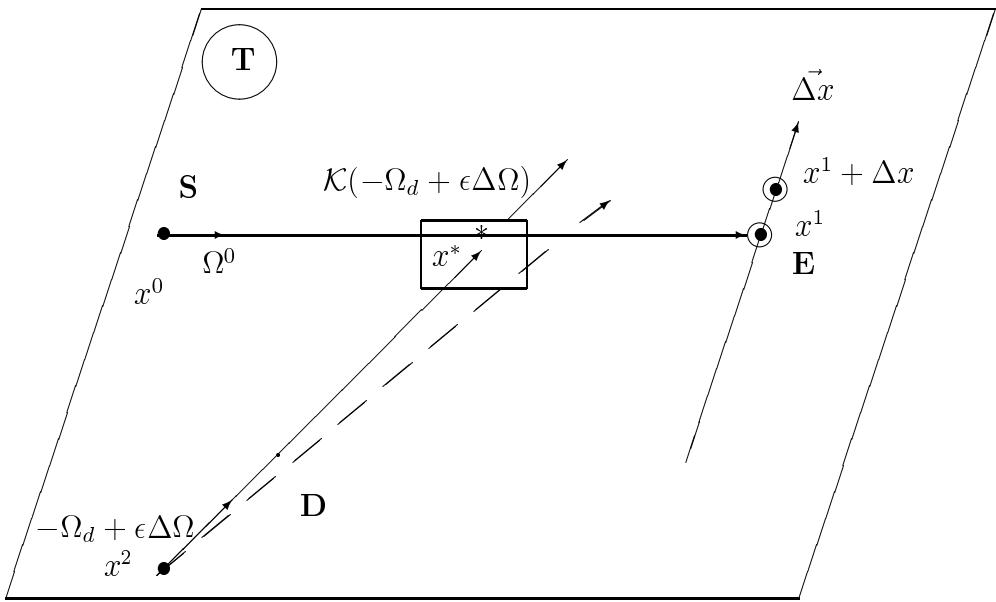


Рис. 1: Общая схема метода.

**Общая схема метода спектроскопии с высоким пространственным и угловым разрешением.** Метод основан на пространственном и угловом разделении особенностей рассеянного поля излучения и состоит в определении коэффициентов уравнения переноса в следующем порядке:

$$\sigma(x), \sigma_s(x), \eta(x, \Omega \cdot \Omega') \text{ и } \sigma_a(x).$$

Рассмотрим предлагаемую схему, устройство и расположение источников и приемников.

Мы рассматриваем два сорта приемников. Обозначаем их  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  (Рис.1). Фактически мы рассматриваем связанные приемники  $\mathbf{D} = (\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$  и  $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)$ .

В стандартной томографической схеме один приемник  $\mathbf{D}_1$  расположен в точке  $x^1$  напротив источника излучения.

Наш приемник регистрирует как рассеянное, так и не рассеянное излучение, падающее со всех направлений на элемент поверхности  $\delta Q \in R^2$  в точке  $x^1$ , где приемник  $\mathbf{D}_1$  расположен. В отличии от традиционной схемы, мы разместили добавочный источник  $\mathbf{D}_2$  в точке  $x^1 + \Delta x$  вне зоны падения прямого излучения. Мы назовем связку  $\mathbf{D} = (\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$  приемником первого типа.

Приемник второго типа  $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)$  - это два связанных мононаправленных приемника. Каждый такой приемник измеряет интенсивность излучения, входящего в точку  $x_2$  в направлении, которое лежит внутри конуса  $\mathcal{K}(\Omega)$  с направлением  $\Omega$ . Таким образом, каждый приемник определяется своим положением и вектором направленности. Зафиксируем точку  $x^*$  в лежащую на луче источника, в которой мы хотим измерить параметры среды. Выберем направление  $\Omega_d$  так, что поверхность  $\mathcal{K}(-\Omega_d)$  содержащая точку  $x^*$  и ортогональный к плоскости  $\mathbf{T}$  вектор  $\Delta\Omega$  такой, что конус  $\mathcal{K}(-(\Omega_d + \epsilon\Delta\Omega))$  не пересекает луч  $x = x^0 + \tau\Omega^0$  для некоторого  $\epsilon > 0$ .

Рассмотрим новый приемник  $\mathbf{E}_1$  с вектором направленности  $\Omega_d - \epsilon\Delta\Omega$ . Точка  $x^*$  лежит в пересечении внутренности конуса  $\mathcal{K}(-(\Omega_d - \epsilon\Delta\Omega))$  и луча  $x = x^0 + \tau\Omega^0$  для некоторого  $\epsilon > 0$ .

Второй приемник  $\mathbf{E}_2$  расположен в той же точке  $x_2$ , его вектор направленности  $\Omega_d + \epsilon\Delta\Omega$ . Конус  $\mathcal{K}(-(\Omega_d + \epsilon\Delta\Omega))$  сканирует в непосредственной близости от точки  $x^*$ , но не пересекает луч  $x = x^0 + \tau\Omega^0$  для некоторого  $\epsilon > 0$ .

Согласно доказанной теореме 7, первый приемник  $\mathbf{D}_1$  регистрирует сумму

$$\begin{aligned} I_1(x^1) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\delta Q \times S^2} H(x, \Omega; x^0, \Omega^0) d\Omega dQ = \frac{1}{4\pi} \int_{\delta Q \times S^2} (G_0 g_0 + G_1 g_1 + h) d\Omega dQ \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\delta Q \times S^2} G_0 g_0 d\Omega dQ + \frac{1}{4\pi} \int_{\delta Q \times S^2} (G_1 g_1 + h) d\Omega dQ = I'_1(x^1) + I''_1(x^1) \end{aligned}$$

не рассеянного и рассеянного потока в точке  $x^1$ . Так как  $G_0(x^1 + \Delta x, \Omega) = 0$  для некоторого  $\Omega \in S^2$ , мы получаем следующее выражение для разности сигналов двух приемников первого типа.

$$\Delta I_1 = I_1(x^1) - I_1(x^1 + \Delta x) = I'_1(x^1) + (I''_1(x^1) - I''_1(x^1 + \Delta x))$$

Функция

$$F(x) = \int_{S^2} (G_1 g_1 + h) d\Omega$$

интегрируема, и следовательно

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (I''_1(x^1) - I''_1(x^1 + \Delta x)) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta I_1 &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} (I_1(x^1) - I_1(x^1 + \Delta x)) = I'_1(x^1) + \lim_{\Delta x \rightarrow +0} (I''_1(x^1) - I''_1(x^1 + \Delta x)) \\ &= I'_1(x^1) = \frac{1}{4\pi} \int_{\delta Q \times S^2} G_0 g_0 d\Omega dQ \\ &= \frac{1}{\sin \beta} \exp \left( - \int_{x^0}^{x^1} (\sigma_s(x) + \sigma_a(x)) dx \right). \end{aligned}$$

Здесь  $\beta = \angle(\Omega^0, \vec{\Delta x})$ .

Теперь мы имеем значения измерений, полученных от  $\mathbf{D}_1$  - это  $I_1(x^1)$  и от  $\mathbf{D}_1$  - это  $I_2(x^1 + \Delta x)$ , от величины полного потока. В соответствии с вышеизложенным

$$\Delta I_1 \equiv (I_1(x^0) - I_1(x^0 + \Delta x)) \approx \frac{1}{\sin \beta} \exp \left( - \int_{x^0}^{x^1} (\sigma_s(x) + \sigma_a(x)) dx \right), \quad \Delta x \rightarrow +0.$$

Таким образом, мы получили значение ослабления не рассеянного излучения в каждой точке  $x^1$  и, следовательно, значения интегралов по всем прямым. Применяя обратное преобразование Радона, мы можем восстановить коэффициент полного ослабления

$$\sigma(x) = \sigma_s(x) + \sigma_a(x)$$

во всех точках области.

## • Шаг 2: Восстановление сечения рассеяния.

Теперь мы начнем разделять коэффициенты рассеяния и поглощения в выбранной точке. Существенным моментом в предлагаемой схеме является тот факт, что для предлагаемой схемы и конструкции, в разности показаний приемников  $\mathbf{E}_1$  and  $\mathbf{E}_2$  имеется скачок.

Сейчас мы вычислим величину этого скачка. Обозначим через  $\mathcal{K}(\Omega)$  открытый конус квадратного сечения с вектором направленности  $\Omega$ . Выбираем вектор  $\Omega_d$  так, что бы пересечение поверхности конуса  $\mathcal{K}(-\Omega_d)$  с лучом  $x = x^0 + \tau \Omega^0$  содержало интервал  $(x^* + \Delta x_1, x^* - \Delta x_2)$ .

ортогональную к  $\mathbf{T}$ , и проходящую через точки  $x^*, x^2$ .

Выбираем, так же, единичный вектор  $-\Delta\Omega$  ортогональный к плоскости  $\mathbf{T}$ .

Заметим, что  $G_1(x^2, \Omega) = 0$  для некоторого  $\Omega \in \mathcal{K}(\Omega_d + \epsilon\Delta\Omega)$  и  $\epsilon > 0$ . Следовательно, поток, регистрируемый приемником  $\mathbf{E}_1$  равен

$$\begin{aligned} I_2(x^2, \Omega_d + \epsilon\Delta\Omega) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{K}(\Omega_d + \epsilon\Delta\Omega)} (G_1(x^2, \Omega)g_1 + h(x^2, \Omega)) d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{K}(\Omega_d + \epsilon\Delta\Omega)} h(x^2, \Omega) d\Omega. \end{aligned}$$

Для некоторого фиксированного  $x \notin \{x = x^0 + \Omega^0\tau\}$  функция  $h(x^2, \Omega)$  интегрируема на  $S^2$  и, следовательно,

$$\int_{\mathcal{K}(\Omega_d - \epsilon\Delta\Omega)} h(x^2, \Omega) d\Omega \approx \int_{\mathcal{K}(\Omega_d + \epsilon\Delta\Omega)} h(x^2, \Omega) d\Omega, \quad \epsilon \rightarrow +0.$$

Таким образом, мы получаем следующее выражение для разности между показаниями приемников второго типа.

$$\begin{aligned} \Delta I_2 &= I_2(x^2, \Omega_d - \epsilon\Delta\Omega) - I_2(x^2, \Omega_d + \epsilon\Delta\Omega) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \int_{\mathcal{K}(\Omega_d - \epsilon\Delta\Omega)} G_1(x^2, \Omega) g_1 d\Omega + \int_{\mathcal{K}(\Omega_d - \epsilon\Delta\Omega)} h(x^2, \Omega) d\Omega - \int_{\mathcal{K}(\Omega_d + \epsilon\Delta\Omega)} h(x^2, \Omega) d\Omega \right) \\ &\approx \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{K}(\Omega_d - \epsilon\Delta\Omega)} G_1(x^2, \Omega) g_1 d\Omega \quad \text{при } \epsilon \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\psi(x) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{K}(\Omega_d - \epsilon\Delta\Omega)} G_1(x^2, \Omega) g_1 d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{K}(\Omega_d - \epsilon\Delta\Omega)} \frac{g_1 \delta(\Sigma)}{|\Omega \times \Omega^0|} d\Omega$$

Тогда для  $\eta(x) \in \mathcal{D}(x)$

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\equiv (\psi(x), \eta(x))_{R^3} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{K}(\Omega_d - \epsilon\Delta\Omega)} \frac{d\Omega}{|\Omega \times \Omega^0|} \int_{R^3} \delta(\Sigma) g_1 \eta(x) dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{K}(\Omega_d - \epsilon\Delta\Omega)} \frac{1}{|\Omega \times \Omega^0|} \int_{\Sigma} g_1 \eta(x) d\sigma d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{K}(\Omega_d - \epsilon\Delta\Omega)} \int_{\Sigma} \frac{g_1 \eta(x) \cos \psi}{|\Omega \times \Omega^0|} d\sigma d\psi d\varphi. \end{aligned}$$

Элемент  $dV$  of  $R_x^3$  равен

$$dV = \frac{|(x - x^0) \times \Omega^0|}{|\Omega \times \Omega^0|} d\varphi d\sigma$$

Следовательно

$$\mathcal{I} \approx \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta V} \frac{g_1 \eta \Delta \gamma dV}{|(x - x^0) \times \Omega^0|} \quad \text{при } \Delta \gamma \rightarrow +0.$$

Здесь  $\Delta V$  область в  $R_x^3$  расположенная между плоскостями  $\Sigma(x^0, \Omega_d, \Omega^0)$  и  $\Sigma(x^0, \Omega^*, \Omega^0)$ ,  $\Omega^* \in \mathbf{T}^*$  и угол между  $\mathbf{T}$  и  $\Omega^*$  равен  $\Delta\gamma$ .

Окончательно

$$\Delta I_2 \approx \frac{\sigma_s(x^*) \rho(0, x^*) \rho(x^*, x) \eta(x^*, \hat{\Omega} \cdot \Omega^0)}{4\pi \varrho(x^2, x^0, \Omega^0)} \Delta \gamma, \quad \Delta \gamma \rightarrow +0, \quad \epsilon \rightarrow +0.$$

$$\varrho(x^2, x^0, \Omega^0) = |(x^2 - x^0) \times \Omega^0|$$

есть расстояние между точкой  $x^2$  и линией, проходящей через точку  $x^0$  в направлении  $\Omega^0$

$$\hat{\Omega} \equiv \frac{x^2 - x^*}{|x^2 - x^*|}.$$

Мы можем получить точное значение величины скачка и в случае кругового конуса. Пусть  $\vartheta$  - угол между плоскостью  $\mathbf{T}$  и направляющим вектором конуса сканирования приемника. Этот угол равен  $\vartheta_0$  если конус касается плоскости  $\mathbf{T}$ .

Из вычислений, подобных предыдущим, следует, что производная  $dI_2/d\vartheta$  имеет скачок в  $\vartheta = \vartheta_0$ . Вычислим его величину

$$\Delta \left( \frac{dI_2(\vartheta)}{d\vartheta} \right) = \frac{\sigma_s(x^*) \rho(0, x^*) \rho(x^*, x) \eta(x^*, \hat{\Omega} \cdot \Omega^0)}{4\pi \varrho(x^2, x^0, \Omega^0)}.$$

Так как мы уже восстановили коэффициент  $\sigma(x)$ , величина

$$\rho(0, x^*) \rho(x^*, x)$$

нам известна. Таким образом, все параметры в этой формуле нам известны, за исключением

$$\sigma_s(x^*), \quad \eta(x^*, \hat{\Omega} \cdot \Omega^0).$$

В случае изотропного рассеяния  $\eta(x^*, \Omega \cdot \Omega^0) \equiv 1$ . Но в общем случае мы можем найти его значения до нахождения  $\sigma_s(x)$ .

Рассмотрим поточечную аппроксимацию функции  $\eta(x^*, \mu)$ . Пусть

$$-1 = \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < +1, \quad \mu_i = \cos \varphi_i \equiv (\Omega_{d_i} \cdot \Omega^0)$$

точки аппроксимации, и  $p_i$  данные, полученные измерениями.

Мы расположим  $n$  приемников в этих точках так что бы углы между источником и вектором направленности приемников были равны  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . Тогда мы получим  $n$  уравнений вида

$$\sigma_s(x^*) \eta(x^*, \mu_i) = p_i, \quad i = 1, n.$$

Это уравнения для определения неизвестных  $\sigma_s(x^*), \eta(x^*, \mu_i)$ . Функция  $\eta(x^*, \mu)$  нормирована условием

$$1 = \int_{-1}^{+1} \eta(x^*, \mu) d\mu \equiv \sum_{i=1}^n \eta(x^*, \mu_i) (\mu_{i+1} - \mu_i), \quad \mu_{n+1} \equiv 1.$$

Это условие может рассматриваться, как дополнительное линейное уравнение для неизвестных  $\sigma_s(x)$  и  $\eta(x^*, \mu_i)$ . Теперь  $\sigma_s(x)$  может быть найдено из  $n + 1$  уравнений (12),(13) (так же как значения  $\eta(x^*, \mu_i)$ , если требуется).

- **Шаг 3: Восстановление коэффициента поглощения.** Окончательно: так как  $\sigma_a(x) = \sigma(x) - \sigma_s(x)$ , то мы можем найти значения функции  $\sigma_a(x)$ , используя найденные значения функций  $\sigma_s(x)$  и  $\sigma(x)$ .

Численное решение задачи оптической томографии предлагаемым методом имеет смысл, только при наличии экспериментальных данных, причем полученных в описанной выше схеме измерений. Частично результаты таких экспериментов на реальных данных приведены в работах Dorn O.

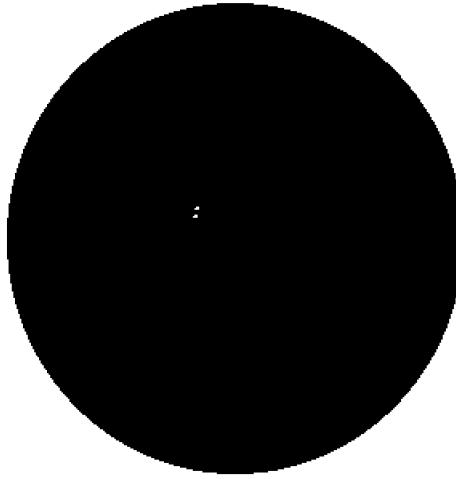


Рис. 2: Объект исследования

Наши численные исследования не связаны прямо с техникой восстановления. На модельной задаче проводились численные моделирование с целью проверки эффективности предлагаемой схемы и для демонстрации влияния эффекта рассеяния на восстановление образа сечения тела. Объект для исследования – сфера радиуса 1, разделенная на две области: концентрическая сфера радиуса 0.5 и остальная ее часть. Первая область заполнена чисто рассеивающим (непоглощающим) веществом, а вторая – чисто поглощающим. Коэффициенты рассеяния и поглощения постоянны внутри соответствующих областей и одинаковы по величине:  $\sigma_s = \sigma_a = 10$ . Таким образом величина общего коэффициента ослабления постоянна во всей большой сфере:  $\sigma = 10$ .

Данные для восстановления были получены расчетами методом Монте Карло. **Расчет скачков первого и второго типа** Кривая на Рис. 3 показывает зависимость между интенсивно-

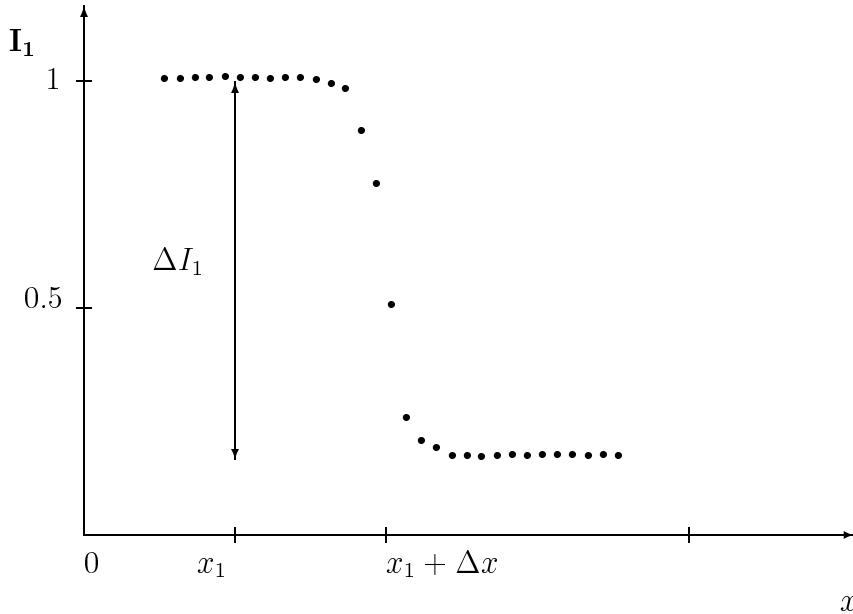


Рис. 3: Скачок первого рода

стью полного потока, приходящего в приемник первого типа и расстоянием  $x$ . Кривая на Рис. 4 показывает зависимость между интенсивностью рассеянного излучения, приходящего в точку приемника второго типа (в случае кругового конуса), и угла вращения  $\theta$  направления наблюдения  $7\omega$ .

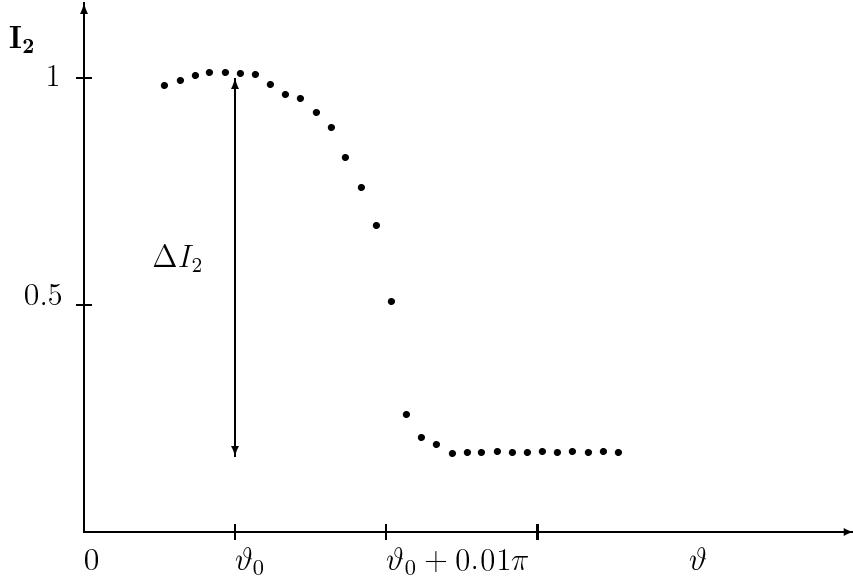


Рис. 4: Скачок второго рода

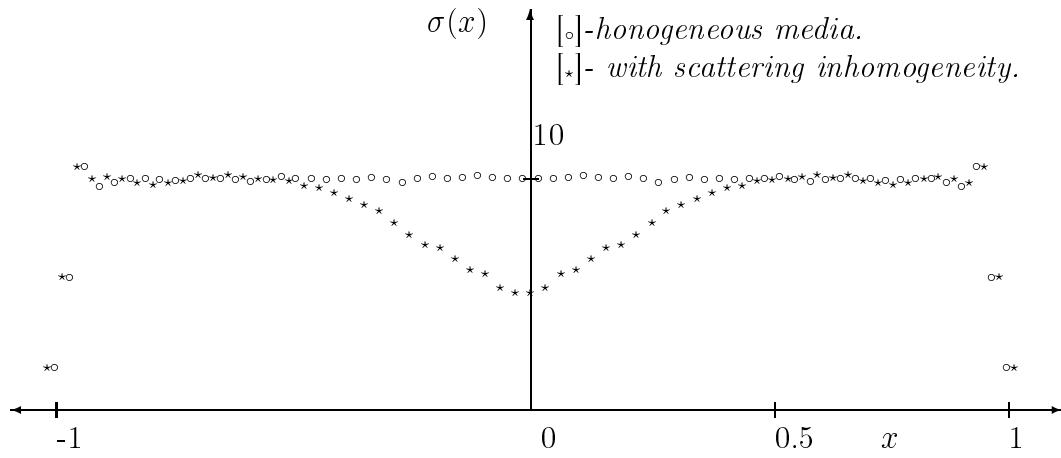


Рис. 5: Восстановленное сечение.

нерассеянного и рассеянного потока излучения составила меньше 1%.

**Влияние эффекта рассеяния на восстановление образа.** Было проведено компьютерное моделирование и дан сравнительный анализ классической и предложенной схем томографии для сред с сильным рассеянием. При моделировании вклад рассеянного потока излучения составлял до 40%, благодаря относительно большой величине коэффициента рассеяния ( $\sigma_s = 10$ ). На рис. 5 показан график восстановленного профиля на диаметре сферы.

Из графика видно, что восстановленный коэффициент внутренней области спадает в окрестности центра сферы. Это и есть искажение, вызванное эффектом рассеяния. Естественно ожидать такого же эффекта в случае произвольной области, заполненной рассеивающим веществом.

графии с рассеянием. Как указал автору проф. Хаунсфилд, приемники первого типа, предложенные в диссертации уже частично использовались экспериментаторами с целью выделения нерассеянной части излучения. Теоретических обоснований для их использования на тот момент не было. При этом использовалась классическая томографическая схема, что естественно приводило к большим искажениям.

Как показали эксперименты (Dorn), для объектов размера  $< 50$  длин свободного пробега метод дает хорошие результаты. Трудности возникают при применении предлагаемого для оптических сред размером превышающих 50 длин свободного пробега. Причиной является сильное ослабление особенностей волнового фронта рассеянного излучения в биологических тканях. Это приводит к тому, что зарегистрировать скачки первого и второго типа не представляется возможным.

Возможные подходы к решению задачи оптической томографии в этом случае будут рассмотрены в последующих разделах.

**В главе 3** дан эвристический вывод интегрального уравнения переноса плотности энергии фотонов для оптически плотной среды (Уравнения Липпмана - Швингера):

$$K(x, t, s, y) = \rho(x, y) \frac{\delta(t - s - |x - y|)}{4\pi|x - y|^2} + \frac{1}{4\pi} \int_Q \frac{\rho(\xi, x)\sigma_s(\xi)}{|x - \xi|^2} K(\xi, t - |x - \xi|, s, y) d\xi.$$

Вычислено асимптотического представления решения этого уравнения вблизи светового конуса в двух случаях:

**Теорема 8** Для всех  $t > 0, x \neq y$ .

$$K(x, t, s, y) = a_{-2}(x, y)\delta(\gamma) + a_{-1}(x, y)\ln\gamma + a_0(x, y)\gamma^0 + O(\gamma\ln^2\gamma) \quad \text{при } \gamma \downarrow 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} g(s; x, y) &= \rho(y, \zeta)\sigma_s(\zeta)\rho(\zeta, x), \\ \phi(s; x, y) &= \frac{1}{2}(g(1) - g(-1))s + \frac{1}{2}(g(1) + g(-1)), \\ \zeta &= (x + y + s(x - y))/2, \quad \gamma = t - s - |x - y|. \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} a_{-2}(x, y) &= \frac{\rho(x, y)}{4\pi|x - y|^2}, \\ a_{-1}(x, y) &= -\frac{\rho(x, y)}{\pi|x - y|^2} \frac{(\sigma_s(x) + \sigma_s(y))}{2} \\ a_0(x, y) &= \int_{-1}^1 \frac{g(s) - \phi(s)}{1 - s^2} ds + (\sigma_s(x) + \sigma_s(y))\rho(x, y)\ln\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Обозначим через  $G_\delta$   $\delta$ -окрестность носителя  $\sigma_s(x)$ . Следующее условие не является обременительным во всех задачах оптической томографии:

$$(VOD) \quad G_\delta \subset D,$$

Справедливо следующее утверждение:

**Теорема 9** Пусть условие (VOD) выполнено. Тогда функция  $K(x, t, s, y)$  имеет следующее асимптотическое разложение для  $t > 0, x \neq y$ :

$$K(x, t, s, y) = a'_{-1}(x, y)\delta(\gamma) + a'_0(x, y)\gamma^0 + O(\gamma\ln\gamma) \quad \text{при } \gamma \downarrow 0$$

$$\begin{aligned} a'_{-1}(x, y) &= \frac{\rho(x, y)}{4\pi|x-y|^2}, \\ a'_0(x, y) &= \frac{2\pi\rho(x, y)}{|x-y|} \int_0^{|x-y|} \frac{\sigma_s(z)}{z(|x-y|-z)} dz. \end{aligned}$$

На основе полученных аналитических результатов автором предложены несколько алгоритмов решения обратных задач для интегрального уравнения, выведенного в предыдущей главе. Линеаризованная обратная задача сводится к задаче интегральной геометрии по семейству эллипсоидов. В общем случае обратная задача факторизуется на две задачи интегральной геометрии по семейству прямых. Представлен подробно разработанный алгоритм численного решения в двух случаях расположения источников и приемников.

Далее рассмотрена обратная задача для ЛШ состоящая в определении координат сингулярных неоднородностей внутри среды с неизвестными характеристиками. Использование техники фейнмановских диаграмм позволило доказать теорему о структуре особенностей решения уравнения ЛШ в этом случае. На основе этой теоремы доказана единственность решения обратной задачи и приведен ряд численных алгоритмов ее решения. В случае фиксированных координат источников-приемников обратная задача сводится к обратной задаче рассеяния для уравнения Шредингера на полном графе.

В главе 4 рассмотрены различные математические модели, предназначенные для описания диффузионных волн в оптически плотных средах.

Используя, разработанный метод локальной оценки плотности по времени интегрального потока излучения, было проведено компьютерное Монте-Карло исследование структуры фундаментального решения уравнения переноса. Было обнаружено явление временной локализации импульса сразу за передним фронтом волны. Это явление, называемое так же диффузионной волной, ранее наблюдалось только в физических экспериментах.

Приведены результаты компьютерных экспериментов с различными математическими моделями, показывающими, что диффузионные волны обладают рядом "оптических" свойств. Явление разогрева неоднородности, обнаруженное в ходе этих экспериментов, проверяется для разных моделей распространения. На основе полученных результатов даны рекомендации о перспективности различных схем диффузионной томографии.

Далее исследуются диффузионные волны в средах с временной дисперсией. Для уравнения Нигматулина:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_+^\alpha u(x, t) &= \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (t > 0, -\infty < x < \infty) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) &= 0, \quad \mathcal{D}_+^{\alpha-1} u(x, t)|_{t=+0} = \varphi(x). \end{aligned}$$

Рассмотрена обратная задача, состоящая в определении порядка дифференцирования и коэффициента теплопроводности по значениям амплитуды и фазы диффузионной волны. Получены точные формулы для решения этой обратной задачи, необходимые для численных алгоритмов решений обратных задач в общем случае. Обсуждены полученные обобщения законов Фурье.

В главе 5 рассмотрены решетчатые модели мезоскопических сред. В первом разделе исследуются различные математические модели отражения электромагнитной волны от фрактальной поверхности.

Рассмотрены следующие модели распространения волн:

- **Модель классического блуждания на решетке.** Эта модель в пределе на регулярной решетке дает решение параболического уравнения и является классической решетчатой моделью диффузии. Вероятность выхода частицы из полуплоскости связана с задачей нахождения вероятности траектории броуновской частицы совершить  $n$  оборотов вокруг начала координат (wind number).

бологическое уравнение. Свойства волновой модели на фрактальной решетке исследуются впервые. Как показали компьютерные эксперименты, интенсивность рассеянной волны имеет сложный, фрактальный характер. В пределе эта функция не может являться решением какого-либо уравнения в частных производных. Эти результаты объясняют причину провала многочисленных попыток построения волновых уравнений на фрактальных структурах. Однако, наличие в структуре решения явного самоподобия, наводит на мысль, что задача описания волновых процессов на фракталах может быть решена введением понятия ренормализованной функции.

- **Спинорная модель.** Эта модель в предельном случае на регулярной одномерной решетке дает уравнение Дирака для двухкомпонентного спинора  $\vec{\Psi}(x, t)$

Уравнение Дирака для свободной, спина  $1/2$  - релятивистской частицы массы  $m$  в одномерном пространстве может быть записано:

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -i\sigma_z \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} - m\sigma_x \psi(x, t)$$

где  $\hbar = c = 1$ ,  $\sigma_x$  и  $\sigma_z$  являются матрицами Паули, а  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  имеет две компоненты. Фейнман представил случайное блуждание, которое в пределе дает фундаментальное решение уравнения Дирака.

Результаты компьютерных экспериментов этой модели, показывают, что отраженный сигнал сильно ослаблен, абсолютно не структурирован, и интенсивность отраженной волны спадает по времени гораздо быстрее, чем для волновой модели. Это объясняется интерференционными эффектами и сложной структурой предфрактальной решетки. Спинорная модель достаточно хорошо описывает физически наблюдаемые эффекты. Однако эти результаты показывают, что построить дифференциальные или интегро-дифференциальные уравнения, правильно описывающие распространения волны в фрактальной среде скорее всего не удастся. Следовательно, принципиально нужны новые подходы.

- **Квантовое блуждание.** Этот алгоритм является квантовым аналогом метода Монте-Карло. Результаты, полученные квантовым методом Монте-Карло и приведенные в диссертации показывают мультифрактальность отраженного сигнала, как функции времени. Эта модель требует дополнительных исследований, так как для нее, даже на регулярной решетке, неизвестно существование каких либо предельных дифференциальных уравнений. На нерегулярных решетках ситуация еще сложнее, так как, у узлов разная валентность и, следовательно, у частиц в этих узлах разная размерность фазового пространства.

Целью компьютерных исследований было изучение статистических свойств рассеянного излучения. Построен алгоритм квантового блуждания на решетках. Он является квантовым аналогом метода Монте-Карло, обобщенным на фрактальные решетки. Приведен сравнительный анализ моделей рассеяния от фрактальной полуплоскости.

Далее представлены результаты исследования термодинамики систем со спином на регулярных и самоподобных решетках. Для исследования поведения критических параметров модели Изинга ферромагнетика с гамильтонианом

$$E_\sigma = -J \sum_{k=1}^N \sigma_k \sigma_{k+1} - H \sum_{k=1}^N \sigma_k \quad (8)$$

и статистической суммой

$$Z_N(H, T) = \sum_{\sigma} \exp \left( K \sum_{j=1}^N \sigma_j \sigma_{j+1} + h \sum_{j=1}^N \sigma_j \right) \quad (9)$$

тоды:

- Существенной выборки Метрополиса,
- Кластерный алгоритм Swendsen-Wanga,
- Алгоритм Wolf переворота кластера.

Приведены результаты исследований, касающиеся гипотезы гиперуниверсальности, и сделаны выводы о перспективности технологий неразрушающего контроля ферромагнетиков, использующих измерение температуры Кюри.

Еще один подход, использующий метод теплового ядра, применяется для сведения задачи получения оценок высокочастотной асимптотики оператора Лапласа на самоподобной решетке к исследованию свойств некоторого случайного процесса на этой решетке.

Метод теплового ядра, применяемый в настоящей работе для исследования асимптотики оператора Лапласа на ковре Серпинского, в отличии от вариационного подхода, основан на построении  $\zeta$  - функции эллиптического оператора на многообразии.

Пусть  $P : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V)$  - эллиптический самосопряженный дифференциальный оператор порядка  $d > 0$  с положительно определенным главным символом. Тогда  $\text{spec}(P) \subseteq [-c, \infty)$  для некоторой константы  $c$ .

Будем так же предполагать, что  $P$  положительно определен, т.е.  $\text{spec } P \subseteq [\epsilon, \infty)$  для некоторого  $\epsilon > 0$ . Определим формально  $P^s$  как

$$P^s = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \lambda^s (P - \lambda)^{-1} d\lambda$$

Здесь  $\alpha$  подходящим образом выбранный путь в области  $\text{Re}(\lambda) < 0$ .  $P^s$  - сглаживающий оператор при  $\text{Re}(s) \leq 0$  с ядром вида

$$L(s, x, y, ) = \sum_n \lambda_n^s \phi_n(x) \otimes \overline{\phi_n}(y). \quad (10)$$

Определим  $\zeta$  - функцию оператора  $P$  как

$$\zeta(s, P) = \text{Tr}(P^{-s}) = \int_\Omega L(-s, x, x) dx = \zeta(s, P) = \sum_{\lambda_n > 0} \lambda_n^{-s}.$$

Обозначим через

$$K(t, x, y) = \sum_n e^{t\lambda_n} \phi_n(x) \otimes \overline{\phi_n}(y)$$

- ядро оператора действующего по правилу

$$e^{-tP} f(x) = \int_\Omega K(t, x, y) f(y) dy = \sum_n e^{t\lambda_n} \phi_n(x) \int_\Omega f(y) \phi_n(y) dy.$$

Можно показать, что *статистическая сумма*

$$Z(\beta, P) = \sum_\lambda e^{-\beta\lambda} \dim E_\lambda = \text{Tr } e^{-\beta P}$$

задается сходящимся рядом при всех  $\beta > 0$ .

Следующая формула является основой heat kernel метода и центральным моментом в нашем исследовании. Используя свойства преобразования Меллина

$$\int_0^\infty t^{s-s} e^{-\lambda t} dt = \lambda^{-s} \int_0^\infty (\lambda t)^{s-1} e^{-\lambda t} d(\lambda t) = \lambda^{-s} \Gamma(s).$$

$$\zeta(s, P) = \text{Tr}(P^s) = \Gamma(s)^{-1} \int_0^\infty t^{s-1} \text{Tr } e^{-tP} dt = \Gamma(s)^{-1} \int_0^\infty \beta^{s-1} Z(\beta, P) d\beta. \quad (11)$$

Здесь  $\Gamma(s)$ - стандартное обозначение гамма функции

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} \exp(-t) dt.$$

Таким образом мы связали  $\zeta$  - функцию эллиптического оператора  $P$  со случайнм процессом, порожденным параболической полугруппой  $e^{-tP}$ . Для вычисления асимптотики функции  $N(\lambda, P)$  используется

**Теорема 10** Тауберова теорема Карамата.

Пусть  $f(\lambda)$  – неубывающая неотрицательная функция на  $\mathbb{R}^+$  не более чем степенного роста. Пусть так же при  $t \rightarrow +0$  имеет место асимптотика

$$\int_0^\infty e^{-t\lambda} df(\lambda) \sim ct^{-\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad t \rightarrow +0.$$

Тогда  $f(\lambda) \sim c(\Gamma(\gamma + 1))^{-1}\lambda^\gamma$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Использование Монте-Карло моделирование и тауберовой теоремы Караматы позволило сделать ряд выводов о перспективности такого подхода к созданию новых технологий неразрушающего контроля мезоскопической среды.

**Глава 6** посвящена исследованию задачи рассеяния для уравнения Шредингера на графах. В этой главе развивается техника спектральной хирургии квантовых графов, представляющая самостоятельный интерес.

**Теорема 11** Данные рассеяния графа полученного склейкой графов с двумя бесконечными ребрами  $G'$  и  $G''$  ребром длины  $l$ , с нулевым потенциалом на нем, выражаются через данные рассеяния склеиваемых графов. Выражения для  $S$ -матрицы получившегося графа дают следующие формулы

$$\begin{pmatrix} -R_{11}T_{21}^{-1} & T_{21}^{-1} \\ T_{12} - R_{11}R_{22}T_{21}^{-1} & R_{22}T_{21}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_{11}''T_{21}''^{-1} & T_{21}''^{-1} \\ T_{12}'' - R_{11}''R_{22}''T_{21}''^{-1} & R_{22}''T_{21}''^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{ikl} \\ e^{-ikl} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -R_{11}'T_{21}'^{-1} & T_{21}'^{-1} \\ T_{12}' - R_{11}'R_{22}'T_{21}'^{-1} & R_{22}'T_{21}'^{-1} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

при условии, что

- $T_{12}' \neq 0$ ,  $T_{21}'' \neq 0$ ,
- $R_{11}''R_{22}' \neq e^{-2ikl}$ .

Пусть теперь перед нами стоит другая задача: по известным  $S$ -матрицам графов  $G$  и  $G''$  вычислить  $S$ -матрицу графа  $G'$  – отрезать от графа  $G$  граф  $G''$  (см. рис. ??).

**Теорема 12** Пусть  $a_1 = T_{12}''^{-1}T_{12}$ ,  $a_2 = -R_{22}''T_{12}''^{-1} + T_{12}''^{-1}R_{22}$ ,  $b_1 = R_{11}''T_{12}''^{-1}T_{12}$ ,  $b_2 = T_{21}'' - R_{11}''R_{22}''T_{12}''^{-1} + R_{11}''T_{12}''^{-1}R_{22}$ . Даные рассеяния графа, полученного отрезанием от графа  $G$  графа  $G''$  по ребру длины  $l$  с нулевым потенциалом на нем, выражаются через данные рассеяния разрезаемых графов. Выражения для  $S$ -матрицы получившегося графа дают следующая формула

$$\begin{pmatrix} -R_{11}'T_{21}'^{-1} & T_{21}'^{-1} \\ T_{12}' - R_{11}'R_{22}'T_{21}'^{-1} & R_{22}'T_{21}'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{ikl} \\ e^{-ikl} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -R_{11}''T_{21}''^{-1} & T_{21}''^{-1} \\ T_{12}'' - R_{11}''R_{22}''T_{21}''^{-1} & R_{22}''T_{21}''^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -R_{11}T_{21}^{-1} & T_{21}^{-1} \\ T_{12} - R_{11}R_{22}T_{21}^{-1} & R_{22}T_{21}^{-1} \end{pmatrix}$$

при условии, что

- $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ .

Эта техника позволила получить нелинейное функциональное уравнение для  $\mathbb{S}$  - матрицы конечно разветвленной салфетки Серпинского.

**Теорема 13** Коэффициенты  $R'$  и  $T'$  для  $n+1$ -той итерации конечно разветвленной салфетки Серпинского  $MS_{n+1}$  с помощью формул (13), (13) и (14) выражаются через коэффициенты  $R$  и  $T$   $n$ -той итерации  $MS_n$ .

$$\begin{aligned} R'(k) &= R(k/3) + [b_1(k/3)e^{ik/3} + a_2(k/3)]T(k/3), \\ T'(k) &= [a_1(k/3) + b_3(k/3)e^{ik/3}]T(k/3). \end{aligned} \quad (13)$$

Где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-Te^{ik}(e^{ik}R - 1)}{D}, \quad b_1 = \frac{-Te^{ik}(e^{ik}R^2 - e^{ik}T^2 - R)}{D}, \\ a_2 &= \frac{-Te^{2ik}(e^{ik}R^2 - e^{ik}T^2 - R)}{D}, \quad b_2 = \frac{-T(e^{ik}R - 1)}{D}, \\ a_3 &= \frac{e^{2ik}T^2}{D}, \quad b_3 = \frac{e^{ik}T^2}{D}, \end{aligned}$$

$$u \\ D = -e^{3ik}T^3 + e^{3ik}R^2T - e^{2ik}RT - e^{3ik}RT^2 + e^{3ik}R^3 - e^{2ik}R^2 - e^{ik}R + 1. \quad (14)$$

Используя результат этой теоремы, можно определить элементы матрицы рассеяния свободной частицы на конечно разветвленной салфетки Серпинского, как неподвижная точка системы итерационных уравнений (13).

Рассматривается задача восстановления координат сингулярных неоднородностей, расположенных в случайной среде. Как было показано в диссертации, она сводится задаче рассеяния на полном некомпактном графе. Рассмотрим полный метрический граф в  $\mathbb{R}^3$  с рационально независимыми длинами ребер и выберем в нем четыре вершины, не лежащие в одной плоскости. После чего приклеим к этим вершинам ребра бесконечной длины. Полученную конструкцию можно понимать как набор, состоящий из четырех "источников-приемников" волн и неоднородностей, расположенных в оставшихся вершинах графа. Теперь рассмотрим вложение этого графа в  $\mathbb{R}^3$ . Заметим, что для этого вложения "источники-приемники" можно располагать различными способами. Критерием выбора служит условие точного определения пространственного положения вершины по четырем расстояниям от нее до четырех выбранных вершин.

Возникает вопрос, как матрица рассеяния на полученном графе может характеризовать пространственное положение вершин его вложения в  $\mathbb{R}^3$ ?

Используя разложение производной фазы рассеяния

$$\Theta(k) = \frac{1}{2\pi i} \log[\det S(k)] \quad (15)$$

$$d_R(k) = \frac{d\Theta(k)}{dk} = \frac{L}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_p \left( \tilde{A}_p e^{ikl_p} + \tilde{A}_p^* e^{-ikl_p} \right), \quad (16)$$

где суммирование происходит по всем замкнутым путям в графе, B Gutkin и U Smilansky доказали теорему о единственности задачи рассеяния на графике.

Однако эта теорема не дает полного представления о том, каким образом бесконечные ребра приклеены к компактной части. В диссертации доказано, как преодолеть эту трудность.

**Теорема 14** Матрица рассеяния  $\mathbb{S}(k)$  некомпактного метрического графа определяет однозначно длины ребер компактной части и смежность графа при условии что

вершине может быть приклено не больше чем одно бесконечное ребро.

- длины ребер компактной части рационально независимы,
- элементы матрицы рассеяния в каждой вершине не обращаются в нуль.

Этот результат, в свою очередь, дал возможность доказать теорему единственности решения обратной задачи определения координат сингулярностей в задаче оптической томографии, рассмотренной выше.

### Теорема 15 Пусть

1. "Приемники-источники" с известными координатами  $y_i$ ,  $i = 1 \dots N$  не лежат в одной плоскости,
2.  $N > 3$ ,
3. Вершины  $\{x_k, y_i\}$  образуют полный иррациональный граф.

Тогда координаты всех неоднородностей  $x_i$  определяются  $\mathbb{S}$  матрицей единственным образом.

В **заключении** диссертации приводятся основные результаты проведенных исследований.

### Публикации по теме диссертации.

Основное содержание диссертационной работы отражено в следующих работах:

1. Бондаренко А.Н. Сингулярная структура фундаментального решения уравнения переноса и обратные задачи теории переноса частиц // Докл.Акад.Наук СССР. 1992. т. 322, N. 2. с. 274-276.
2. Bondarenko A. N. Mathematical problems for diffuse tomography // YI International Symposium on Computerized Tomography. 1993. Novosibirsk. P.32.
3. Bondarenko A. N. On structure of the fundamental solution of the time-independent transport equation // Ин-т Математики СО РАН. April 1996. Препринт № 31. Р. 18.
4. V.S.Antufyev, A.N.Bondarenko. X-ray tomography in scattering media // SIAM J. Appl. Math. 1996. V.56. №2. P. 573-578.
5. Anatoly Bondarenko. Singular structure of the fundamental solution of the transport equation // Inst. for Math.and Appl., Minneapolis. 1997. Preprint 1474. P. 32.
6. Anatoly Bondarenko. The structure of the fundamental solution of the time-independent transport equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1998. V.221. P.430-451.
7. А.Н. Бондаренко, Д.Н. Иванов. Компьютерный эксперимент в задаче рассеяния диффузионных волн // Наука, Техника и Инновации. Региональная научная конференция. НГТУ. 2001. Тез. докл. С.106.
8. А.Н. Бондаренко, Д.С. Иващенко. Задачи неразрушающего контроля фрактальной среды // Наука, Техника и Инновации. Региональная научная конференция. НГТУ. 2001. Тез. докл. С.107-108.
9. А.Н. Бондаренко, А.В. Кацук. Отражение волн от фрактальной среды // Наука, Техника и Инновации. Региональная научная конференция. НГТУ. 2001. Тез. докл. С.109-110.

11. А.Н. Бондаренко, Е.В. Харбанова. Методы квантовой теории поля в задачах многократного рассеяния волн // Наука, Техника и Инновации. Региональная научная конференция. НГТУ. 2001. Тез. докл. С.119-120.
12. А.Н. Бондаренко, Ерофеева Ю.А. Рассеяние волн во фрактальной среде // Наука, Техника и Инновации. Региональная научная конференция. НГТУ. 2001. Тез. докл. С.109-110.
13. Anatoly N. Bondarenko. Feynman diagrams for Lippman - Schwinger equation with singular potential // 6th International Symposium on science and technology.- Novosibirsk State Technical University. 2002. Proceedings. P. 240-245.
14. Anatoly N. Bondarenko, Dmitry S. Ivashenko, Vadim Seleznev, Inverse Sommerfeld's problem for fractal media // 6th International Symposium on science and technology.- Novosibirsk State Technical University. 2002. Proceedings. P.246-252
15. Anatoly N. Bondarenko, Andrey V. Katsuk. Quantum and wave scattering from Sierpinsky carpets tesselation // 6th International Symposium on science and technology.- Novosibirsk State Technical University, 2002. Proceedings. P. 260-266.
16. A. N. Bondarenko, Ulia Erofeeva. Back scattering electromagnetic waves from fractal nonhomogenous // 6th International Symposium on science and technology. Novosibirsk State Technical University. 24-30 June 2002. Materials. P.180.
17. A. N. Bondarenko, E.V. Harbanova. Quantum field approach to wave scattering in fractal media // 6th International Symposium on science and technology. Novosibirsk State Technical University. 24-30 June 2002. Materials. P.182
18. A. N. Bondarenko, D.N. Ivanov. Warmed up obstacle by a diffusion wave // 6th International Symposium on science and technology. Novosibirsk State Technical University. 24-30 June 2002. Materials. P.181.
19. A. N. Bondarenko. Feynman diagrams technics for Lippman-Schwinger equation with singular potential // International Conference "ILL-POSED AND INVERSE PROBLEMS" dedicated to Prof. M.M. Lavrent'ev. Materials. P.38.
20. А.Н. Бондаренко, А.В.Ломов. Модель Изинга на фрактальной решетке // Наука, Техника и Инновации. Региональная научная конференция. НГТУ. 2002. Тез. докл. С.207-208.
21. А.Н. Бондаренко, В.А. Дедок. Обратная задача рассеяния для уравнения Шредингера на полных графах // Наука, Техника и Инновации. Региональная научная конференция. НГТУ. 2002. Тез. докл. С.193-195.
22. А.Н. Бондаренко, Д.С. Иващенко. Волновые процессы в средах с временной дисперсией // Наука, Техника и Инновации. Региональная научная конференция. НГТУ. 2002. Тез. докл. С.200-202.
23. А.Н. Бондаренко, А.В. Кацук. Квантовое блуждание на ковре Серпинского // Наука, Техника и Инновации. Региональная научная конференция. НГТУ. 2002. Тез. докл. С.205-206.
24. А.Н. Бондаренко, Д.Н. Иванов. Рефракция диффузионных волн и закон Снеллиуса // Наука, Техника и Инновации. Региональная научная конференция. НГТУ. 2002. Тез. докл. С.198-199.

26. А.Н. Бондаренко, Е.В. Харбанова. Спектральная асимптотика фрактальных решеток // Наука, Техника и Инновации. Региональная научная конференция. НГТУ. 2002. Тез. докл. .С.119-120.
27. А.Н. Бондаренко, Я.В.Килин, М.В.Синенко. Построение фрактальных решеток // Наука, Техника и Инновации. Региональная научная конференция. НГТУ. 2002. Тез. докл. С.211-212.
28. Бондаренко А.Н. Структура волновых фронтов в мезоскопической теории переноса излучения // Научный вестник НГТУ. 2002. Т. 12. №1. С. 29-44.
29. Бондаренко А.Н., Иващенко Д.С., Селезнёв В.А. Диффузионные волны в средах с остаточной памятью // Научный вестник НГТУ. 2004. Т. 12. №1. С. 45-55, 2002.
30. Бондаренко А. Н. Обратные задачи для уравнения типа Липпмана-Швингера // Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Т. 15. №4. С. 18-33.
31. Бондаренко А. Н. Техника фейнмановских диаграмм для уравнения Липпмана-Швингера с сингулярным потенциалом // Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Т.VI. Т. 16. №4. С. 3-10.
32. Бондаренко А.Н., Ломов А.В. Фазовые переходы в моделях фрактальных ферромагнетиков // Научный вестник НГТУ. 2003. Т. 13. №2. С. 87-96.
33. Бондаренко А.Н., Селезнев В.А., Харбанова Е.В. Спектральная асимптотика фрактальных решеток и задачи определения степени усталости материала // Научный вестник НГТУ. 2003. Т. 13. №2. С. 97-106.
34. Anatoly N. Bondarenko, Vadim A. Seleznev, The model of forming the fractal defect in elastic continuum and its undestructive control // 7th International Symposium on science and technology.- Ulsana Technical University, Korea. 2003. Proceedings. P. 111-114.
35. Bondarenko A. N., Harbanova E.V., Ivanov D.A. High frequency asymptotic of fractal wires in nondestructive testing of material fatigue // 7 th International Symposium on science and technology. Materials. Ulsan Technical University. Korea. 2003. P.22-27.
36. Bondarenko A. N., Lomov A.V. Phase transition in ferromagnetic Ising model on multyfractal lattices // 7 th International Symposium on science and technology. Materials. Ulsan Technical University. Korea. 2003. P.65-70.
37. Bondarenko A. N., Dedok V.A. Inverse scattering problem on quantum graphs // 7 th International Symposium on science and technology. Materials. Ulsan Technical University. Korea. 2003. P. 105-110.
38. Бондаренко А.Н., Шиханова О.И. Дифракция Фраунгофера на неоднородностях с фрактальной границей // Сборник научных трудов НГТУ. 2004. 1(35). С.19-24.
39. Бондаренко А.Н., Дедок В.А. Хирургия квантовых графов // Наука, Технологии и Инновации. Региональная научная конференция. НГТУ. 2003. Материалы докладов всероссийской научной конференции молодых ученых. С. 218-219.

трической проводимости материалов // Наука, Технологии и Инновации. Региональная научная конференция. НГТУ. 2003. Материалы докладов всероссийской научной конференции молодых ученых. С. 222-223.

41. Бондаренко А.Н., Иващенко Д.С. Численное решение обратных задач аномальной диффузии // Наука, Технологии и Инновации. Региональная научная конференция. НГТУ. 2003. Материалы докладов всероссийской научной конференции молодых ученых. С. 223-224.
42. Бондаренко А.Н., Иванов Д.Н. Решение уравнения Гельмгольца с комплексным волновым числом методом конечных элементов //Наука, Технологии и Инновации. Региональная научная конференция. НГТУ. 2003. Материалы докладов всероссийской научной конференции молодых ученых. С. 225-226.
43. Бондаренко А.Н., Кацук А.В. Информативность признаков Ренье при анализе медицинских изображений // Наука, Технологии и Инновации. Региональная научная конференция. НГТУ. 2003. Материалы докладов всероссийской научной конференции молодых ученых. С. 227-228 стр.
44. Бондаренко А.Н., Ломов А.В. Сравнительный анализ алгоритмов моделирования системы спинов // Наука, Технологии и Инновации. Региональная научная конференция. НГТУ. 2003. Материалы докладов всероссийской научной конференции молодых ученых. С. 234-236.
45. Бондаренко А.Н., Кацук А.В. Двумерный Ренье анализ изображений // Сборник научных трудов НГТУ. 2004. Т.35. №1. С. 143-148
46. Бондаренко А.Н., Иванов Д.Н. Решение уравнения Гельмгольца с комплексным волновым числом методом конечных элементов // Сборник научных трудов НГТУ. 2004. Т. 35. №1. С. 59-64.
47. Бондаренко А.Н., Зинкин С.С. Критические экспоненты в перколяционной теории электрической проводимости // Сборник научных трудов НГТУ. 2004. С.
48. Бондаренко А.Н., Иващенко Д.С. Численные алгоритмы решения обратных задач аномальной диффузии // Сборник научных трудов НГТУ. 2004. Т. 34. №4. С. 50-64.
49. A. N. Bondarenko, V.A. Dedok. Surgery of quantum graphs // 8 th International Symposium on science and technology. Materials - Tomsk. 2004. P. 108-112.
50. A. N. Bondarenko, V.A. Levin. Localisation and crossover on fractal grid// 8 th International Symposium on science and technology. Materials - Tomsk, 2004, P.106-108.
51. Бондаренко А.Н., Дедок В.А. Обратная задача рассеяния на графах // Всероссийская конференция по обратным задачам. Екатеринбург. 2004. Тез. докл. С.106.
52. Бондаренко А.Н., Левин А.В. Эффект локализации колебаний на фрактальных решетках // 5- ая Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. ИВТ СОРАН. Новосибирск. 2004. Тез. докл. С.14.
53. Бондаренко А.Н., Иванов Д.Н. Решение задачи оптической томографии методом конечных элементов // 5- ая Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. ИВТ СОРАН. Новосибирск. 2004. Тез. докл. С.19.

55. Бондаренко А.Н., Иванов Д.Н. Решение задачи оптической томографии методом конечных элементов. <http://www.ict.nsc.ru/ws/YM2004/8577/index.html>
56. Бондаренко А.Н., Левин В.А. Локализация Андерсена в самоподобных структурах // Региональная научная конференция Наука, Техника, Инновации. 2004. Новосибирск. Тез. докл.
57. Бондаренко А.Н., Шиханова О.И. Дифракция Фраунгофера на неровных поверхностях фрактальной размерности // Всероссийская конференция по обратным задачам. Екатеринбург. 2004. Тез. докл. С.107.
58. Бондаренко А.Н., Дедок В.А. Спектральная хирургия квантовых графов // Сибирский журнал индустриальной математики. 2004. Т.20. №4. С.16-28.