На правах рукописи

Герасимов Евгений Сергеевич

Многомерные динамические сетевые модели управления инвестиционным портфелем

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2005

Работа выполнена в Томском государственном университете

Научный руководитель:
доктор технических наук,
профессор Домбровский Владимир Валентинович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических
наук, профессор Кошкин Геннадий Михайлович

кандидат физико-математических наук,
доцент Буркатовская Юлия Борисовна

Ведущая организация:
Кемеровский государственный университет (г. Кемерово)

Защита состоится:
26 мая 2005 г. в 10:30 на заседании диссертационного совета Д 212.267.08 при Томском государственном университете по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться:
В научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан: 19 апреля 2005 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.т.н., доцент А.В. Скворцов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Проблема оптимального управления инвестиционным портфелем (ИП) является одной из наиболее важных в финансовой инженерии. В виду актуальности данной проблемы как с точки зрения теории, так и практики, ей занимались многие исследователи, среди которых следует отметить работы Мельникова А. В., Первозванского А. А., Ширяева А. Н., Bielecki T. R., Black F., Browne S., Cvitanic J., Dupakova J., Elton E. J., Hakansson N. H., Hanson F. B., Karatzas I., Korn R., Li D., Linsmeier T. J., Markowitz H., Merton R.C., Mossin J., Oksendal B., Pham H., Pliska S. R., Portait R., Runggaldier W.J., Ross S. A., Stettner L., Tobin J., Scholes M., Sharp W. F., Young M.R., Zhou X. Y., Zenios S. A. и другие.

Существуют различные подходы к решению данной проблемы. В статической постановке (однопериодные модели) задача выбора оптимальной структуры портфеля (определения оптимальных долей вложения в различные виды финансовых активов) сводится к решению задач нелинейного, стохастического или линейного программирования, в зависимости от выбора функции риска и способов учета неопределенности. В результате решения задачи в статической постановке получают, так называемую, «близорукую» стратегию управления ИП, которая зависит только от текущих значений параметров, характеризующих активы портфеля, независимо от того будут изменяться эти значения в будущем или нет, и также не зависит от текущего значения капитала ИП и цен рисковых активов.

В динамической постановке определяют стратегию управления инвестиционным портфелем, максимизирующую некоторую интегральную функцию полезности, при этом динамика ИП описывается в агрегированном виде (уравнением капитала портфеля в целом), а в качестве управляющих воздействий также берут доли вложений общего капитала в тот или иной актив. За исключением весьма ограниченного набора функций полезности, для которых решение можно получить аналитически, такой подход приводит к трудной проблеме численного решения уравнений динамического программирования Беллмана.

Проведенный анализ литературы и потребности практики подтверждают актуальность настоящей диссертационной работы.

Целью данной работы является построение и исследование динамических моделей ИП, в рамках которых можно аналитически синтезировать оптимальные стратегии управления, обеспечивающие максимально гладкую заданную инвестором кривую роста капитала ИП на всем горизонте инвестирования с учетом ограничений (на объемы вложений в активы ИП и торговых операций с ними), для различных моделей цен рисковых финансовых активов (модель Блэка-Шоулса с переменными параметрами, модель со стохастической волатильностью, GARCH-модель волатильности, модель финансового рынка с переключающимися режимами).

Методика исследования. При выполнении диссертационной работы использовались понятия и методы теории оптимального формирования портфеля инвестиций, финансовой математики, теории моделей финансового рынка, теории стохастических дифференциальных уравнений, матричной алгебры, теории вероятности, теории случайных процессов и математической статистики, численные методы и методы имитационного моделирования.

Научная новизна и положения, выносимые на защиту, состоят в следующем.

1) Сетевые многомерные динамические модели управления ИП в дискретном и непрерывном времени при нестохастической волатильности финансовых активов. Предложено формулировать задачу управления ИП как динамическую задачу слежения за эталонным портфелем, доходность которого задается инвестором.

2) Уравнения для определения оптимальных стратегий управления ИП с обратной связью в непрерывном и дискретном времени. Уравнения для вычисления математического ожидания и дисперсии капитала ИП.

3) Модели управления ИП в пространстве состояний для случайной волатильности финансовых активов, скачкообразно меняющейся в соответствии с эволюцией марковской цепи. Уравнения для определения оптимальных стратегий управления ИП с обратной связью в непрерывном и дискретном времени как в условиях наблюдаемости, так и ненаблюдаемости состояния марковской цепи. Уравнения для вычисления математического ожидания и дисперсии капитала ИП.

4) Адаптивный алгоритм управления ИП на скачкообразном финансовом рынке с переключающимися режимами.

5) Модель управления ИП, волатильность рисковых активов которого описывается GARCH-процессом. Уравнения синтеза оптимальной стратегии управления ИП с обратной связью.

6) Модели активного управления ИП, целью которого является превышение в среднем капитала индексного портфеля. Уравнения синтеза оптимальных стратегий активного управления ИП с обратной связью для модели цен рисковых активов со случайной скачкообразно меняющейся волатильностью. Уравнения для вычисления математического ожидания капитала ИП.

Теоретическая ценность данной работы состоит в том, что впервые предложены и исследованы сетевые многомерные динамические модели управления ИП в непрерывном и дискретном времени для следующих моделей финансового рынка:

- модель Блэка-Шоулса, в которой параметры уравнений зависят от времени;
- модель типа геометрического броуновского движения с переменными параметрами и со случайной скачкообразно меняющейся волатильностью;
- GARCH-модель волатильности;
- модель финансового рынка с переключающимися режимами.

Синтезированы динамические стратегии управления ИП с обратной связью для всех моделей ИП. Разработан адаптивный алгоритм управления ИП на скачкообразном финансовом рынке с переключающимися режимами. Получены уравнения для вычисления математического ожидания и дисперсии капитала ИП.

Практическая ценность данной работы состоит в возможности использования полученных результатов для разработки и построения систем управления ИП на реальных финансовых рынках.

Достоверность полученных результатов подтверждается строгими аналитическими выкладками и результатами численных расчетов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях: 5-ом Корейско-Российском международном симпозиуме по науке и технологии (Томск, 2001), Всероссийской научно-практической конференции «Новые технологии и комплексные решения: наука, образование, производство» (Анжеро-Судженск, 2001), 4-ом Всероссийском экономическом форуме студентов и молодых ученых «Экономические и социальные преобразования в России: опыт и проблемы» (Санкт-Петербург, 2001), Международной научно-технической конференции «Математические методы и информационные технологии в экономике, социологии и образовании» (Пенза, 2001), Второй Международной научно-практической конференции «Методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике» (Новочеркасск, 2002), Российской конференции «Дискретный анализ и исследование операций» (Новосибирск, 2002).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 научных работ, в том числе 5 в рецензируемых журналах.

Личным вкладом диссертанта в совместные работы является вывод теоретических результатов и численное иследование предлагаемых моделей. Постановка изложенных в диссертации задач и формулировка общего подхода к их решению была сделана научным руководителем соискателя, д.т.н., проф. В.В. Домбровским.

Структура и объем диссертации. Настоящая диссертационная работа состоит из введения, основного текста, заключения, списка литературы и 3 приложений. Основной текст разбит на 3 главы и содержит 6 таблиц и 97 рисунков. Список литературы включает 129 наименований. Общий объем работы – 207 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении проведен обзор существующих подходов к проблеме оптимального управления инвестиционным портфелем и моделей финансового рынка, обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована цель работы, изложены основные научные результаты, выносимые на защиту.

В первой главе предложены сетевые многомерные динамические модели управления ИП в непрерывном и дискретном времени при нестохастической волатильности финансовых активов. Рассматривается инвестиционный портфель, состоящий из n видов рисковых активов (под рисковыми будем понимать инвестиции, доходность которых - случайная величина) и банковского счета с неслучайной, но возможно, переменной доходностью. Структура ИП описывается в виде динамической стохастической сети, узлы которой представляют собой капитал, помещенный в рисковый либо безрисковый финансовый актив, а дуги - направления и объем перераспределяемого капитала (рис. 1).

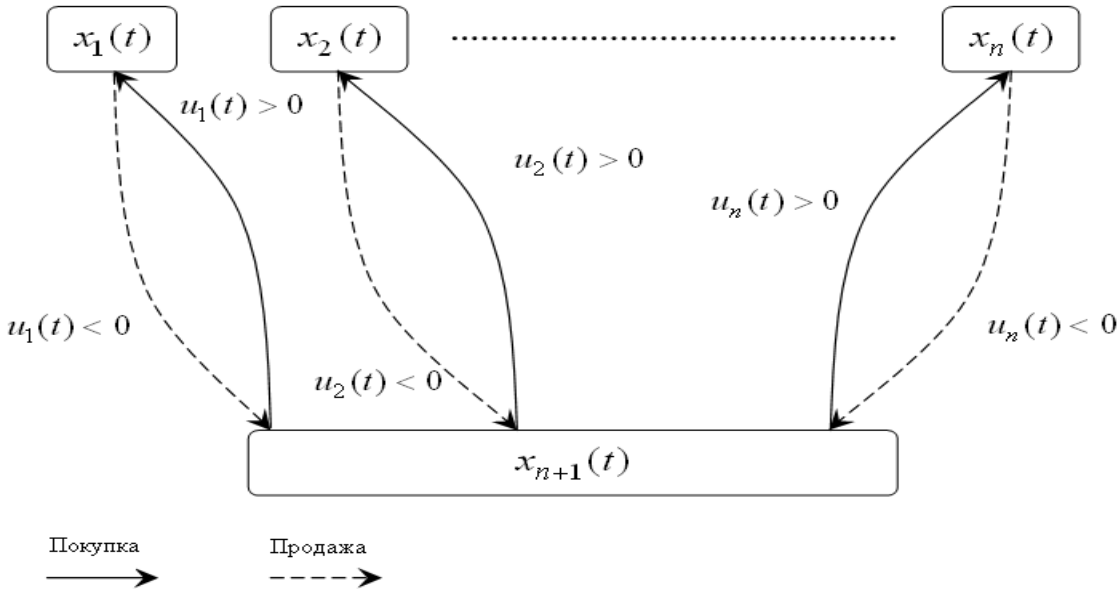

Рис. 1. Структура портфеля инвестиций

Эволюция цен рисковых активов описывается стохастическими дифференциальными уравнениями типа геометрического (экономического) броуновского движения:

$$dS_i(t) = \Big(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(t)\, dw_j(t)\Big) S_i(t),$$
$$S_i(0) = S_i^0 > 0,\ i \in \mathbb{N}_n,\ t \in \big[0, t_f\big],$$

где $S_i(t)$ - цена рискового актива i - го вида в момент времени t, параметр $\mu_i(t)$ характеризует норму возврата (мгновенная доходность), $\Sigma(t) = \big[\sigma_{ij}(t)\big]_{i,j\in\mathbb{N}_n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - матрица волатильности, $\mathbb{N}_n \triangleq \Big\{1, 2, \ldots, n\Big\}$ - множество натуральных чисел мощности n, t_f - длина периода управления (горизонт инвестирования), $w_j(t)$ - стандартные винеровские процессы.

Пусть $x(t) = \left[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{n+1}(t)\right]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ - вектор состояния ИП, компоненты которого равны объему инвестиций в i - й вид актива, $i \in \mathbb{N}_n$; компонента $x_{n+1}(t)$ описывает состояние банковского счета. Тогда динамика рисковых активов описывается стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$dx_i(t) = \Big(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(t)dw_j(t)\Big)x_i(t) + u_i(t)dt. \tag{1}$$

Состояние банковского счета подчиняется уравнению:

$$dx_{n+1}(t) = \Big(r(t)x_{n+1}(t) - \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\Big)dt, \tag{2}$$

где $r(t)$ - мгновенная ставка доходности банковского счета, $u_i(t)$ - мгновенный капитал (капитал в единицу времени), если $u_i(t) > 0$, то это означает перевод капитала в сумме $u_i(t)$ в единицу времени с банковского счета в i - й вид рисковых вложений, если $u_i(t) < 0$, то это означает перераспределение капитала с i - го вида рискового вложения на банковский счет. Заметим, что допускаются отрицательные значения переменных состояния $x_i(t), i \in \mathbb{N}_{n+1}$: если какая либо переменная $x_i(t) < 0$, $i \in \mathbb{N}_n$, то это означает участие в операции «short sale» (продажа без покрытия), если $x_{n+1}(t) < 0$, то это означает заем капитала в сумме $|x_{n+1}(t)|$.

Стратегия управления ИП определяется путем перераспределения капитала между различными видами активов так, чтобы капитал управляемого портфеля с наименьшими отклонениями (с минимально возможным риском) следовал капиталу некоторого определяемого инвестором эталонного портфеля, траектория роста капитала которого описывается дифференциальным уравнением следующего вида:

$$dV^0(t) = \mu^0(t)V^0(t)dt, \tag{3}$$

где $V^0(t)$ - капитал эталонного портфеля, $\mu^0(t) > r(t)$ - желаемая доходность портфеля, задаваемая инвестором.

В качестве меры риска предложено использовать квадратичный функционал вида:

$$J = E\Bigg\{\int_0^{t_f} \Big(\pi(t)\Big(V(t) - V^0(t)\Big)^2 + x^T(t)C(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)\Big)dt +$$

$$+ \pi(t_f)\Big(V(t_f) - V^0(t_f)\Big)^2 + x^T(t_f)C(t_f)x(t_f)\Bigg\}, \quad (4)$$

где $V(t) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i(t)$ - общий капитал управляемого портфеля, $\pi(t)$ - веса, задаваемые инвестором, $C(t) \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, $R(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - симметричные матрицы, $C(t) \geqslant 0$, $R(t) > 0$, $t \in \big[0, t_f\big]$, $u(t) = \big[u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)\big]^T \in \mathbb{R}^n$ - вектор управления ИП. Предполагается, что в начальный момент $V(0) = V^0(0)$ заданы и распределение капитала ИП между активами известно.

Посредством выбора матриц $C(t)$ и $R(t)$ во втором и третьем слагаемых функционала (4) можно регулировать объемы вложений капитала в активы ИП и торговых операций с ними, а конечная цель слежения определяется видом четвертого и пятого слагаемых.

Закон управления определяется в классе линейных с обратной связью:

$$u(t) = K_1(t)x(t) + K_2(t)V^0(t), \quad (5)$$

где $K_1(t) \in \mathbb{R}^{n\times(n+1)}$, $K_2(t) \in \mathbb{R}^n$ - матрицы коэффициентов обратной связи.

В результате, задача синтеза оптимальной стратегии управления состоит в определении матриц $K_1(t)$, $K_2(t)$, $t \in \big[0, t_f\big]$, минимизирующих критерий (4) на траекториях системы (1), (2), (3). Доказана теорема, определяющая решение данной задачи и выражение для функционала (4) на оптимальных траекториях замкнутой системы (1), (2), (3). Расчет оптимальной стратегии сводится, по существу, к решению системы обыкновенных дифференциальных матричных уравнений типа Риккатти, которые достаточно просто решаются численно на ЭВМ.

В дискретном времени динамика цен рисковых активов подчиняется стохастическим разностным уравнениям:

$$S_i(t+1) = \Big(1 + \mu_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(t)\xi_j(t)\Big)S_i(t), \quad (6)$$

$$S_i(0) = S_i^0 > 0,\ i \in \mathbb{N}_n,\ t = 0, 1, \ldots, t_f.$$

где $S_i(t)$ - цена i - го вида рискового актива на конец интервала $\big[t-1, t\big]$, параметр $\mu_i(t)$ характеризует норму возврата (коэффициент роста или средняя ожидаемая доходность на интервале $\big[t, t+1\big]$), $\Sigma(t) = \big[\sigma_{ij}(t)\big]_{i,j\in\mathbb{N}_n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - матрица волатильности на интервале $\big[t, t+1\big]$, $\xi_j(t)$, $j \in \mathbb{N}_n$ - независимые случайные процессы с нулевым средним и единичной дисперсией.

Эволюция рисковых активов ИП описывается стохастическими разностными уравнениями:

$$x_i(t+1) = \Big(1 + \mu_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(t)\xi_j(t)\Big)\Big(x_i(t) + u_i(t)\Big). \tag{7}$$

Эволюция банковского счета следует уравнению:

$$x_{n+1}(t+1) = \Big(1 + r(t)\Big)\Big(x_{n+1}(t) - \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\Big), \tag{8}$$

где $r(t)$ - доходность банковского счета.

Задача управления ИП формулируется как динамическая задача слежения по квадратичному критерию вида:

$$J = E\Bigg\{\sum_{t=0}^{t_f-1}\Big(\pi(t)\Big(V(t) - V^0(t)\Big)^2 + x^T(t)C(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)\Big) + \\ + \pi(t_f)\Big(V(t_f) - V^0(t_f)\Big)^2 + x^T(t_f)C(t_f)x(t_f)\Bigg\}, \tag{9}$$

где

$$V^0(t+1) = \Big(1 + \mu^0(t)\Big)V^0(t). \tag{10}$$

Закон управления имеет вид (5). Доказана теорема, определяющая систему разностных матричных уравнений для вычисления последовательности матриц $K_1(t)$, $K_2(t)$, $t = 0, 1, \ldots, t_f - 1$ и оптимальное значение критерия (9) на траекториях замкнутой системы (7), (8), (10).

Для моделей управления ИП получены уравнения для вычисления математического ожидания и дисперсии капитала ИП в дискретном и непрерывном времени (теоремы 1.2, 1.4 диссертации). Рассматривается обобщение на случай одновременного управления двумя ИП.

Проведено численное исследование предложенных моделей ИП с использованием как модельных, так и реальных данных о ценах финансовых активов, результаты которого вынесены в приложение 1 диссертации. Рассматривается ИП, содержащий один безрисковый актив и 10 видов наиболее ликвидных акций, торгуемых на Нью-Йоркской фондовой бирже, приводятся примеры управления этим ИП как на растущем рынке, так и на падающем, также рассмотрен пример одновременного управления двумя ИП, каждый из которых содержит по 5 видов акций и одному безрисковому активу. Некоторые результаты моделирования приведены в приложении к автореферату (см. стр. 18).

Во второй главе рассматриваются модели управления ИП в дискретном и непрерывном времени при стохастической волатильности финансовых активов. Для описания динамики цен рисковых активов портфеля используются два типа моделей: HMM (Hidden Markov Model) и GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity). Подобные модели учитывают случайные изменения волатильности, характерные для финансовых рынков и относятся к классу моделей неполного рынка, которые более адекватно описывают изменения цен, наблюдаемые на реальных финансовых рынках.

В непрерывном времени предполагается, что эволюция цен рисковых активов описывается стохастическими дифференциальными уравнениями со случайными скачкообразно меняющимися параметрами:

$$dS_i(t) = \Big(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\big(t, \theta(t)\big)dw_j(t)\Big)S_i(t), \tag{11}$$
$$S_i(0) = S_i^0 > 0,\ \theta(0) = \theta_0,\ i \in \mathbb{N}_n,\ t \in \big[0, t_f\big],$$

где $\theta(t)$ - однородная марковская цепь с конечным фазовым пространством *наблюдаемых* состояний $\Re = \Big\{\theta_1, \ldots, \theta_\nu\Big\}$ и известной матрицей вероятностей перехода $P = \big[p_{ij}\big]_{i,j\in\mathbb{N}_\nu}$. Случайные процессы $w_j(\cdot)$ и $\theta(\cdot)$ независимы.

Динамика активов портфеля описывается следующими уравнениями:

$$dx_i(t) = \Big(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\big(t, \theta(t)\big)dw_j(t)\Big)x_i(t) + u_i(t)dt, \tag{12}$$

$$dx_{n+1}(t) = \Big(r(t)x_{n+1}(t) - \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\Big)dt. \tag{13}$$

Функция риска имет вид:

$$J = E\Bigg\{\int_0^{t_f} \Big(\pi\big(t, \theta(t)\big)\Big(V(t) - V^0(t)\Big)^2 + x^T(t)C\big(t, \theta(t)\big)x(t) +$$
$$+ u^T(t)R\big(t, \theta(t)\big)u(t)\Big)dt + \pi\big(t_f, \theta(t_f)\big)\Big(V(t_f) - V^0(t_f)\Big)^2 +$$
$$+ x^T(t_f)C\big(t_f, \theta(t_f)\big)x(t_f)\Bigg\}, \tag{14}$$

где динамика капитала эталонного портфеля определяется уравнением вида (3).

Стратегия управления в классе линейных с обратной связью имеет вид:

$$u(t) = K_1\big(t, \theta(t)\big)x(t) + K_2\big(t, \theta(t)\big)V^0(t), \tag{15}$$

где $K_1\big(t, \theta(t)\big) \in \mathbb{R}^{n\times(n+1)}$, $K_2\big(t, \theta(t)\big) \in \mathbb{R}^n$ - матрицы коэффициентов обратной связи.

Получено решение задачи минимизации критерия (14) по матричным параметрам на траекториях системы (3), (12), (13) в виде системы взаимосвязанных дифференциальных матричных уравнений и оптимальное значение функции риска (14) (теорема 2.1 диссертации).

Динамика цен рисковых активов ИП в дискретном времени описывается стохастическими разностными уравнениями со случайными скачкообразно меняющимися параметрами:

$$S_i(t+1) = \Big(1 + \mu_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\big(t, \theta(t)\big)\xi_j(t)\Big)S_i(t), \tag{16}$$
$$S_i(0) = S_i^0 > 0,\ \theta(0) = \theta_0,\ i \in \mathbb{N}_n,\ t = 0, 1, \ldots, t_f,$$

где $\theta(t)$ - однородная марковская цепь с конечным фазовым пространством *наблюдаемых* состояний $\Re = \Big\{\theta_1, \ldots, \theta_\nu\Big\}$ и известной матрицей вероятностей перехода. Процессы $\xi_j(\cdot)$ и $\theta(\cdot)$ независимы.

Уравнения динамики активов ИП имеют вид:

$$x_i(t+1) = \Big(1 + \mu_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\big(t, \theta(t)\big)\xi_j(t)\Big)\Big(x_i(t) + u_i(t)\Big), \tag{17}$$

$$x_{n+1}(t+1) = \Big(1 + r(t)\Big)\Big(x_{n+1}(t) - \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\Big). \tag{18}$$

Мера риска определяется функционалом вида:

$$J = E\Bigg\{\sum_{t=0}^{t_f-1}\Bigg(\pi\big(t, \theta(t)\big)\Big(V(t) - V^0(t)\Big)^2 + x^T(t)C\big(t, \theta(t)\big)x(t) + \\ + u^T(t)R\big(t, \theta(t)\big)u(t)\Bigg) + \pi\big(t_f, \theta(t_f)\big)\Big(V(t_f) - V^0(t_f)\Big)^2 + \\ + x^T(t_f)C\big(t_f, \theta(t_f)\big)x(t_f)\Bigg\}, \tag{19}$$

где эволюция капитала эталонного портфеля подчиняется уравнению вида (10).

Определение оптимальной линейной стратегии управления с обратной связью вида (15) и оптимального значения функционала (19) на траекториях замкнутой системы (11), (17), (18) сводится к решению взаимосвязанных разностных матричных уравнений, вид которых дает теорема 2.4 диссертации.

Условием вычисления и реализации полученной стратегии управления ИП является знание либо точных значений параметров моделей цен (11), (16), либо их оценок, а также возможность наблюдения состояний марковского процесса $\theta(\cdot)$. В реальных условиях наблюдаются только цены рисковых активов, а состояния процесса $\theta(\cdot)$ не доступны прямому наблюдению. Для оценки состояния марковской цепи и параметров моделей цен (11), (16) используются адаптивные алгоритмы фильтрации, предложенные в работах Elliott R. J. Предложено состояние марковской цепи определять из условия максимума оценки апостериорной вероятности состояния.

Другим решением в данной ситуации является использование «грубых» законов управления, не требующих информации о состоянии марковской цепи. В этом случае предполагается, что матрица переходных вероятностей неизвестна, а закон управления не зависит от состояния марковской цепи и имеет вид (5). Получены уравнения для определения оптимальных стратегий управления ИП с обратной связью в непрерывном и дискретном времени (теоремы 2.2, 2.5 диссертации) в условиях ненаблюдаемости состояния марковской цепи.

Разработан адаптивный алгоритм управления ИП на скачкообразном финансовом рынке с переключающимися режимами с использованием фильтрации параметров уравнений, описывающих структуру ИП.

Для моделей ИП в дискретном и непрерывном времени доказаны теоремы, определяющие уравнения для вычисления математического ожидания и дисперсии капитала ИП.

Предложена модель управления ИП, волатильность рисковых активов которого описывается GARCH-процессом. В этом случае динамика цен рисковых активов описывается уравнениями:

$$\begin{cases} S_i(t+1) = \Big(1 + \mu_i(t) + \epsilon_i(t)\Big) S_i(t), \\ \epsilon_i(t) = \sigma_i(t)\xi_i(t), \\ \sigma_i^2(t) = \alpha_0^i + \alpha_1^i \epsilon_i^2(t-1) + \beta_1^i \sigma_i^2(t-1), \\ S_i(0) = S_i^0 > 0,\ \alpha_1^i + \beta_1^i < 1,\ i \in \mathbb{N}_n,\ t = 0, 1, \ldots, t_f, \end{cases}$$

где $\sigma_i(t)$ - волатильность i - го рискового актива на интервале $\big[t, t+1\big]$, описываемая процессом GARCH(1,1) с параметрами $\alpha_0^i, \alpha_1^i, \beta_1^i$.

Синтезированы уравнения (теорема 2.7 диссертации) для определения оптимальной стратегии управления ИП с функцией риска вида (7).

Проведено численное исследование предложенных моделей ИП, результаты которого вынесены в приложение 2 диссертации. На модельных данных проводится сравнение стратегий управления ИП, синтезированных как в условиях наблюдаемости, так и ненаблюдаемости состояния марковской цепи. На реальных данных рассматривается управление ИП с использованием адаптивного алгоритма для оценки параметров модели цен (16) и состояния марковской цепи, также приводится пример управления ИП, состоящего из безрискового актива и 7 видов акций, торгуемых на Нью-Йоркской фондовой бирже, при этом предполагается, что волатильность рисковых активов описывается GARCH процессом, для оценки параметров которого использовался пакет статистического анализа Stata 6.

В третьей главе диссертации разработаны многомерные динамические сетевые модели управления ИП, целью которого является превышение в среднем капитала индексного портфеля. Такой стиль управления называется активным. В качестве индексного портфеля обычно используется широко диверсифицированный портфель, в точности повторяющий структуру известного рыночного индекса (например, индекс S&P500), либо некоторого портфеля, стабильно дающего хорошие результаты в терминах риск-доходность, так называемого, benchmark portfolio. Им может быть, например, портфель фонда доверительного управления или паевого фонда.

Эволюция капитала индексного портфеля описывается стохастическим дифференциальным уравнением следущего вида:

$$dV^0(t) = \Big(\mu^0(t)dt + \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_j^0\big(t, \theta(t)\big) dw_j(t)\Big) V^0(t), \tag{20}$$

$$V^0(0) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i(0),\ \theta(0) = \theta_0,\ t \in \big[0, t_f\big],$$

где $V^0(t)$ - капитал индексного портфеля, $\mu^0(t)$ - мгновенная доходность индексного портфеля, $\sigma_j^0\big(t, \theta(t)\big)$, $j \in \mathbb{N}_n$ - параметры, характеризующие зависимость доходности индексного портфеля от случайных изменений доходно-

стей рисковых активов, входящих в ИП, $\sigma^0_{n+1}\big(t,\theta(t)\big)$ - волатильность индексного портфеля.

Стратегия активного управления ИП определяется так, чтобы капитал управляемого портфеля превышал в среднем капитал индексного портфеля. В качестве меры риска предложен функционал вида:

$$J = E\Bigg\{\int\limits_0^{t_f}\Big(\widetilde{V}\big(t,\theta(t)\big) + x^T(t)C\big(t,\theta(t)\big)x(t) + u^T(t)R\big(t,\theta(t)\big)u(t)\Big)dt+$$

$$+\widetilde{V}\big(t_f,\theta(t_f)\big) + x^T(t_f)C\big(t_f,\theta(t_f)\big)x(t_f)\Bigg\}, \quad (21)$$

$$\widetilde{V}\big(t,\theta(t)\big) = \pi\big(t,\theta(t)\big)\Big(V(t) - \Big(1+\beta\big(t,\theta(t)\big)\Big)V^0(t)\Big)^2,$$

где параметр $\beta\big(t,\theta(t)\big) \geqslant 0$ задается инвестором и показывает на какую долю капитала индексного портфеля управляемый ИП должен превзойти (в среднем) индексный. Посредством данного параметра инвестор может задавать уровень превышения капитала управляемого ИП над капиталом индексного портфеля не только в зависимости от момента времени, но и от состояния финансового рынка.

Доказаны теоремы, определяющие оптимальные линейные стратегии управления, минимизирующие критерий (21) на траекториях системы (12), (13), (20) как в условиях наблюдаемости состояния марковской цепи, так и ненаблюдаемости.

В дискретном времени динамика капитала индексного портфеля описывается уравнением:

$$V^0(t+1) = \Big(1+\mu^0(t) + \sum_{j=1}^{n+1}\sigma_j\big(t,\theta(t)\big)\xi_j(t)\Big)V^0(t), \quad (22)$$

$$V^0(0) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i(0),\ \theta(0) = \theta_0,\ t = 0,1,\ldots,t_f.$$

Функция риска имеет вид:

$$J = E\Bigg\{\sum_{t=0}^{t_f-1}\Big(\widetilde{V}\big(t,\theta(t)\big) + x^T(t)C\big(t,\theta(t)\big)x(t) + u^T(t)R\big(t,\theta(t)\big)u(t)\Big)+$$

$$+\widetilde{V}\big(t_f,\theta(t_f)\big) + x^T(t_f)C\big(t_f,\theta(t_f)\big)x(t_f)\Bigg\}. \quad (23)$$

Доказаны теоремы, дающие оптимальные стратегии управления ИП с обратной связью, которые минимизируют функцию риска (23) на траекториях системы (17), (18), (22) как в условиях наблюдаемости состояния марковской цепи, так и ненаблюдаемости.

Получены уравнения математического ожидания капитала ИП для моделей в непрерывном и дискретном времени (теоремы 3.3, 3.6 диссертации).

В приложение 3 диссертации вынесены результаты численного моделирования. На модельных данных рассматривается пример активного управления ИП, состоящего из 3 видов рисковых активов и одного безрискового актива и приводится сравнение стратегий управления, синтезированных как в условиях наблюдаемости марковского процесса, так и ненаблюдаемости. С использованием реальных данных приводятся примеры активного управления ИП, содержащего один безрисковый актив и 10 видов акций, торгуемых на Нью-Йоркской фондовой бирже. Рассматриваются индексные портфели, структура которых повторяет индексы Dow Jones и NYSE Composite как в периоды роста, так и падения этих индексов.

Отметим **основные преимущества** предлагаемых моделей по сравнению с известными:

- Формулировка задачи управления ИП как динамической задачи слежения за эталонным портфелем позволяет получить максимально гладкую заданную инвестором кривую роста капитала инвестиционного портфеля на всем горизонте инвестирования. На основе анализа состояния финансового рынка инвестор может выбирать желаемую доходность эталонного портфеля, а подбирая соответствующим образом коэффициенты весовой матрицы в функции риска, учитывать особенности управления различными видами ценных бумаг и ограничения как на объемы вложений в активы ИП, так и торговых операций с ними.

- Модели легко обобщаются на случай сочетания различных инвестиционных стилей, когда инвестор владеет несколькими совместно управляемыми ИП, содержащими различные классы финансовых активов, имеющих различную желаемую доходность (в смысле отслеживания соответствующих эталонных портфелей).

- Для определения оптимальной стратегии управления можно использовать весь богатый арсенал средств, разработанных в теории управления

стохастическими системами в пространстве состояний (робастные методы, адаптивные алгоритмы, управление гибридными системами и т.д.).

- Уравнения для расчета оптимальных стратегий управления достаточно просто решаются численно.

В заключении приводятся основные результаты диссертационной работы, которые состоят в следующем:

1) Разработаны сетевые многомерные динамические модели управления ИП в дискретном и непрерывном времени при нестохастической волатильности финансовых активов. Предложено формулировать задачу управления ИП как динамическую задачу слежения за эталонным портфелем, доходность которого задается инвестором.

2) Синтезированы динамические стратегии управления ИП с обратной связью для моделей ИП в непрерывном и дискретном времени. Получены уравнения для вычисления математического ожидания и дисперсии капитала ИП.

3) Разработаны модели управления ИП в пространстве состояний для случайной скачкообразно меняющейся волатильности финансовых активов. Параметры уравнений, описывающих модель цен рисковых активов ИП, изменяются в соответствии с эволюцией марковской цепи. Синтезированы динамические стратегии управления ИП с обратной связью для моделей ИП в непрерывном и дискретном времени как в условиях наблюдаемости, так и ненаблюдаемости состояния марковской цепи. Получены уравнения для вычисления математического ожидания и дисперсии капитала ИП.

4) Разработан адаптивный алгоритм управления ИП на скачкообразном финансовом рынке с переключающимися режимами.

5) Предложена модель управления ИП, волатильность рисковых активов которого описывается GARCH-процессом. Синтезированы уравнения для определения оптимальной стратегии управления ИП с обратной связью.

6) Разработаны модели активного управления ИП, целью которого является превышение в среднем капитала индексного портфеля. Получены уравнения синтеза оптимальных стратегий активного управления ИП с

обратной связью для модели цен рисковых активов со случайной скачкообразно меняющейся волатильностью. Получены уравнения для вычисления математического ожидания капитала ИП.

7) Проведено численное исследование моделей управления ИП с использованием модельных и реальных данных.

Приложение

Пример. Рассматривается ИП, состоящий из 10 видов акций, торгуемых на Нью-Йоркской фондовой бирже и одного безрискового актива (банковский счет) с доходностью $r(t) = 0.000261$. Предполагается, что поведение цен акций описывается моделью (6). Интервал $\big[t, t+1\big]$ равен одному дню. В качестве цен рисковых активов используются ежедневные цены закрытия, то есть цена последней сделки на биржевой сессии. Период управления - интервал времени с 14.03.2003 по 29.12.2003 - $t \in \big[1, 200\big]$ (200 торговых дней). Оценки средних доходностей рисковых активов, полученные по наблюдениям дневных цен закрытия на периоде управления, приводятся ниже:

Номер актива (i)	Название компании-эмитента	$\widehat{\mu}_i(t)$
1	Calpine Corp	0.003046
2	Citigroup Inc	0.001839
3	Ford Motor Co	0.004284
4	General Electric Co	0.000879
5	International Business Machines Corp	0.000672
6	Lucent Technologies Inc	0.003533
7	Motorola Inc	0.002762
8	EMC Corp	0.002827
9	Newmont Mining Corp	0.003557
10	Nortel Networks Corp	0.003735

Желаемая доходность $\mu^0(t) = 0.005$. Весовые коэффициенты в функции риска:

$$\pi(t) = \big(V^0(t)\big)^{-2},\ C(t) = 0,$$
$$R(t) = diag\Big\{0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01\Big\}.$$

Начальный капитал $V(1) = V^0(1) = 10000\$$. На рис 1.2 приводится динамика капитала управляемого ИП и эталонного портфеля, а также состояние банковского счета. Доходность ИП за весь период управления составила 163%.

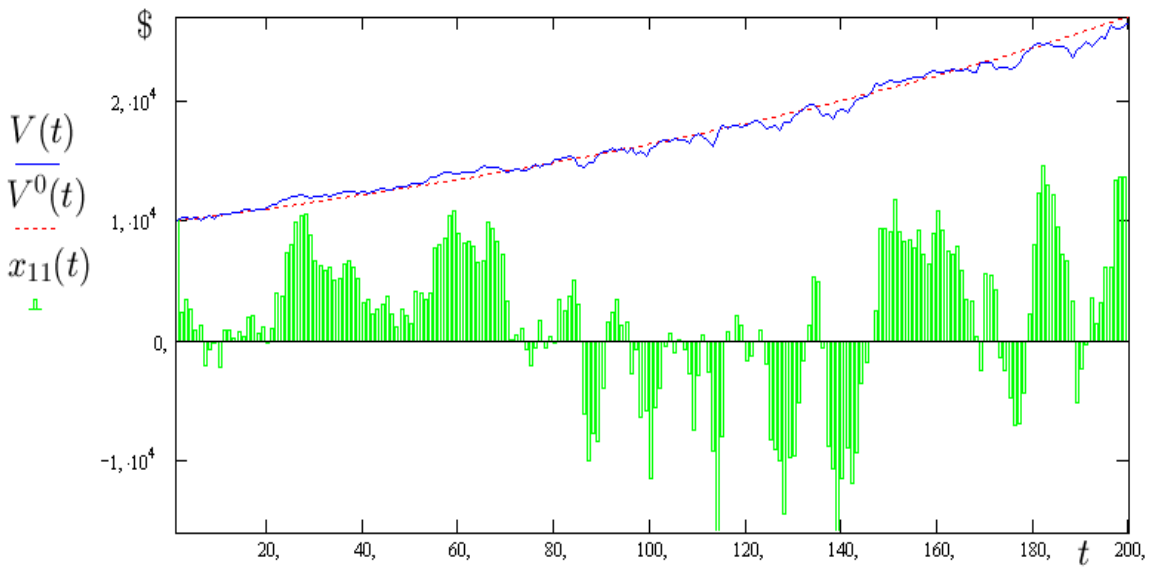

Рис. 1.2. Динамика капитала эталонного портфеля, управляемого ИП и состояния банковского счета

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1) **Герасимов Е. С., Домбровский В. В.** Динамическая сетевая модель управления инвестиционным портфелем при квадратичной функции риска // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 2. – С. 119-128.

2) **Герасимов Е. С., Домбровский В. В.** Динамическая сетевая модель управления инвестиционным порфелем при случайном скачкообразном изменении волатильностей финансовых активов // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 7. – С. 77-87.

3) **Домбровский В. В., Герасимов Е. С.** Динамическая сетевая модель управления порфелем ценных бумаг в непрерывном времени при квадратичной функции риска // Вестник Томского государственного университета. – 2000. – № 269. – С. 70-73.

4) **Герасимов Е. С., Домбровский В. В.** Адаптивное управление инвестиционным портфелем // Вестник Томского государственного университета. – 2003. – № 280. – С. 118-123.

5) **Герасимов Е. С., Домбровский В. В., Федосов Е. Н.** Модель управления инвестиционным портфелем в пространстве состояний на диффузионно-скачкообразном финансовом рынке со стохастической волатильностью // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2003. – Т. 8, – № 2. – С. 719-720.

6) **Dombrovsky V. V., Gerasimov E. S.** Dynamic Network Model of Control Investment Portfolio in Continuous Time // Proceedings of the 5th Korea-Russia International Symposium on Science and Technology. – Tomsk, – Russia, – 2001, – V. 2. – pp. 304-308.

7) **Герасимов Е. С., Домбровский В. В.** Сетевая динамическая модель оптимизации портфеля ценных бумаг в условиях стохастической волатильности // Новые технологии и комплексные решения: наука, образование, производство: Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Анжеро-Судженск: КемГУ, 2001. – Часть II (Математика). – С. 8-10.

8) **Герасимов Е. С., Домбровский В. В.** Динамические модели управления инвестиционным портфелем // Экономические и социальные преобразования в России: опыт и проблемы: Материалы 4-го Всероссийского форума студентов и молодых ученых. – Санкт-Петербург: СПбГУЭФ, 2001. – Часть 2. – С. 92-93.

9) **Герасимов Е. С., Домбровский В. В.** Динамическая модель оптимизации портфеля ценных бумаг при случайном скачкообразном изменении волатильности // Математические методы и информационные технологии в экономике, социологии и образовании: Сборник материалов международной научно-технической конференции. – Пенза: ПТИ, 2001. – Ч. 1. – С. 158-160.

10) **Герасимов Е. С., Домбровский В. В.** Активное управление инвестиционным портфелем при случайном скачкообразном изменении волатильностей финансовых активов. // Труды Второй Международной научно-практической конференции: Методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике. – Новочеркасск, 2002. – Ч. 3. – С. 45-50.

11) **Герасимов Е. С., Домбровский В. В.** Динамическая сетевая модель активного управления инвестиционным портфелем при случайном скачкообразном изменении волатильностей цен финансовых активов // Дискретный анализ и исследование операций: Материалы Российской конференции. – Новосибирск: Издательство института математики, 2002. – С. 188.