На правах рукописи

Ляшенко Елена Александровна

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ С ПРИМЕНЕНИЕМ К ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

05.13.01 - системный анализ, управление и обработка информации

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск - 2005

Работа выполнена в Томском государственном университете

Научный руководитель:
доктор технических наук,
профессор Домбровский Владимир Валентинович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Васильев Вячеслав Артурович

кандидат физико-математических наук,
доцент Буркатовская Юлия Борисовна

Ведущая организация:
Красноярский государственный технический университет.

Защита состоится:
«27» октября 2005 г. в «10-30» на заседании диссертационного совета Д 212.267.12 при Томском государственном университете по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться:
В научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан « » сентября 2005г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.т.н., профессор В.И. Смагин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Широкий класс реальных систем описывается линейными моделями со случайными параметрами и мультипликативными шумами, зависящими от состояния и управления; примерами могут служить сложные производственно-технологические, энергетические, технические и экономические системы. Проблемой синтеза регуляторов для систем со случайными параметрами занимались многие исследователи, среди которых следует отметить таких ученых, как Казаков И.Е., Красовский Н.Н., Малышев В.В., Пакшин П.В., Параев Ю.И., Смагин В.И., Bielecki T., Boukas E.K., Costa O.L.V., Hopkins W.E., De Koning W.L., Li X., Pliska S.R., Runolfsson T., Sworder D.D., Wonham W.M. и других. В большинстве работ предполагается, что параметры представляют собой цепь Маркова, при этом оптимальное управление зависит от текущего состояния марковской цепи, которое на практике часто недоступно наблюдению, таким образом недостаток информации о случайных параметрах обуславливает необходимость разработки робастных алгоритмов управления. Также во многих работах предполагается, что ограничения на переменные состояния и управления отсутствуют, однако на практике к системам часто предъявляются некоторые требования, которые обычно носят форму ограничений.

Важной областью приложений теории управления системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами, зависящими от состояний и управлений, является финансовая инженерия, где подобные модели используются для описания эволюции инвестиционного портфеля (ИП) на финансовом рынке со стохастической волатильностью. В большинстве работ по управлению ИП предполагается, что трансакционные издержки несущественны, также в них не учитываются ограничения на доли вложений в отдельные виды финансовых активов, это приводит к субоптимальному управлению, но позволяет использовать более простые алгоритмы при синтезе управляющих воздействий. Модели, учитывающие трансакционные издержки и ограничения на доли вложений в финансовые активы, более точно описывают ситуацию, сложившуюся на реальных финансовых рынках, но процедуры поиска оптимальных управлений в этом случае значительно усложняются.

Проведенный анализ литературы и потребности практики подтверждают актуальность настоящей диссертационной работы, **целью** которой является:

1. синтез регуляторов для систем со случайными параметрами и аддитивными и мультипликативными шумами, зависящими от состояния и управлений;

2. синтез стратегий управления с прогнозированием с обратной связью для систем со случайными параметрами и аддитивными и мультипликативными шумами, зависящими от состояния и управлений, при явных ограничениях на управляющие переменные;

3. синтез стратегий управления ИП в условиях стохастической волатильности доходностей рисковых финансовых активов;

4. синтез стратегий управления с прогнозированием ИП в условиях стохастической волатильности доходностей рисковых финансовых активов с учетом пропорциональных трансакционных издержек и ограничений на объемы торговых операций.

Методика исследования. При выполнении диссертационной работы использовались понятия и методы теории автоматического управления (метод динамического программирования, матричный принцип максимума), методология управления с прогнозированием, численные методы (метод квадратичного программирования) и методы имитационного моделирования.

Научная новизна и положения, выносимые на защиту.

1. Уравнения синтеза линейных оптимальных по квадратичному критерию статического и динамического регуляторов по выходу для систем со случайными параметрами, возмущенных аддитивными и мультипликативными шумами, зависящими от состояния и управлений.

2. Метод определения стратегий управления с прогнозированием с обратной связью для систем со случайными параметрами, возмущенных аддитивными и мультипликативными шумами, зависящими от состояния и управлений, при ограничениях на управляющие переменные.

3. Уравнения синтеза стратегий управления ИП в условиях стохастической волатильности доходностей рисковых финансовых активов.

4. Динамические модели управления ИП в условиях стохастической волатильности, с учетом трансакционных издержек, ограничений на объемы торговых операций и различия ставок безрискового вклада и кредитования.

5. Метод синтеза стратегий управления с прогнозированием ИП в условиях стохастической волатильности доходностей рисковых финансовых активов с учетом пропорциональных трансакционных издержек и ограничений на объемы торговых операций.

Теоретическая ценность. Решена задача синтеза статического и динамического регуляторов по выходу для систем с аддитивными и мультипликативными шумами и со случайными параметрами, для которых известны только первые два момента распределения. Разработан метод синтеза оптимальных стратегий управления для таких систем с учетом явных ограничений на управляющие воздействия. Построены модели и предложен метод управления ИП в условиях стохастической волатильности с учетом трансакционных издержек и ограничений на объемы торговых операций.

Практическая ценность данной работы состоит в возможности применения полученных результатов при решении задач оптимального управления широким классом объектов, динамика которых описывается системами со случайными параметрами и шумами, зависящими от состояния и управления, такими как, летательные аппараты, химические процессы, ИП в условиях стохастической волатильности.

Достоверность полученных результатов подтверждается строгими аналитическими выкладками и результатами численных расчетов. В вырожденном случае (когда параметры системы не случайны) получаются известные формулы для систем с аддитивными и мультипликативными шумами.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях: Всероссийской научно-практической конференции "Новые технологии и ком-

плексные решения: наука, образование, производство" (Анжеро-Судженск, 2001), Всероссийской научно-практической конференции "Информационные технологии и математическое моделирование" (Анжеро-Судженск, 2002), I Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам (Красноярск, 2002), Второй международной конференции "Проблемы актуарной и финансовой математики" (Минск, Беларусь, 2002), IV Всероссийской конференции с международным участием "Новые информационные технологии в исследовании сложных структур" (Томск, 2002), Ежегодной конференции "SICE Annual Conference 2003" (Фукуи, Япония, 2003), Международной конференции "Математическое моделирование социальной и экономической динамики" (Москва, 2004), 8-ом Корейско-Российском международном симпозиуме по науке и технологии (Томск, 2004), III Всероссийской конференции "Финансово-актуарная математика и смежные вопросы" (Красноярск, 2004), Российской конференции "Дискретный анализ и исследование операций" (Новосибирск, 2004).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 15 работ.

Личным вкладом диссертанта в совместные работы является вывод теоретических результатов и их численное исследование. Постановка изложенных в диссертации задач и формулировка общего подхода к их решению была сделана научным руководителем соискателя, д.т.н., проф. В.В. Домбровским.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, основного текста, заключения и списка литературы. Основной текст разбит на 4 главы и содержит 48 рисунков. Список литературы включает 141 наименование. Общий объем работы – 130 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована цель работы, изложены основные научные результаты, выносимые на защиту.

В первой главе рассматривается линейно-квадратичное управление системами со случайными параметрами и аддитивными и мультипликативными шумами, зависящими от состояния и управления.

Предполагается, что объект управления описывается уравнениями

$$x(k+1) = \left(A_0[\theta(k),k] + \sum_{j=1}^{m} A_j[\theta(k),k]v_j(k) \right) x(k) +$$
$$+ \left(B_0[\theta(k),k] + \sum_{j=1}^{m} B_j[\theta(k),k]v_j(k) \right) u(k) + D_1[\theta(k),k]w_1(k), \quad (1)$$

$$y(k) = \left(C_0[\theta(k),k] + \sum_{j=1}^{m} C_j[\theta(k),k]v_j(k) \right) x(k) + D_2[\theta(k),k]w_2(k), \quad (2)$$

где $x(k)$ – n_x-мерный вектор состояния; $y(k)$ – n_y-мерный вектор наблюдений ($n_y \leq n_x$); $u(k)$ – n_u-мерный вектор управления; $v(k)$, $w_1(k)$ и $w_2(k)$ – векторы белых шумов размерностей m, m_1 и m_2 с нулевыми средними и единичными матрицами ковариаций, причем $\mathrm{M}\{w_1(k)w_2^{\mathrm{T}}(s)\} = 0$, $\mathrm{M}\{v(k)w_1^{\mathrm{T}}(s)\} = 0$, $\mathrm{M}\{v(k)w_2^{\mathrm{T}}(s)\} = 0$, для $\forall k, s$; $\theta(k)$ – последовательность независимых l-мерных случайных векторов с известными первым и вторым моментами: $\mathrm{M}\{\theta(k)\} = \bar{\theta}(k)$, $\mathrm{M}\{\theta(k)\theta^{\mathrm{T}}(k)\} = \Theta(k)$, причем $\mathrm{M}\{\theta(k)v^{\mathrm{T}}(s)\} = 0$, $\mathrm{M}\{\theta(k)w_1^{\mathrm{T}}(s)\} = 0$, $\mathrm{M}\{\theta(k)w_2^{\mathrm{T}}(s)\} = 0$ для $\forall k, s$; $A_j[\theta(k),k]$, $B_j[\theta(k),k]$, $C_j[\theta(k),k]$ ($j = \overline{0,m}$), $D_1[\theta(k),k]$, $D_2[\theta(k),k]$ – матрицы соответствующих размерностей зависят от $\theta(k)$ линейно; $v_j(k)$ – j-я компонента вектора $v(k)$; M – оператор математического ожидания; символ T означает транспонирование. Начальный вектор $x(0)$ предполагается случайным с известными характеристиками $\mathrm{M}\{x(0)\} = x^0$ и $\mathrm{M}\{x(0)x^{\mathrm{T}}(0)\} = P_x^0 \geq 0$. Предполагается также, что $\mathrm{M}\{x(0)v^{\mathrm{T}}(k)\} = 0$, $\mathrm{M}\{x(0)w_1^{\mathrm{T}}(k)\} = 0$, $\mathrm{M}\{x(0)w_2^{\mathrm{T}}(k)\} = 0$, $\mathrm{M}\{x(0)\theta^{\mathrm{T}}(k)\} = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Определим оптимальный линейный закон управления системой (1)-(2) в виде **статической** обратной связи по выходу

$$u(k) = K(k)y(k), \quad (3)$$

где $K(k)$ – матричный коэффициент усиления регулятора.

Задача синтеза статического регулятора состоит в определении последовательности матриц $K(k)$ ($k = \overline{0, N-1}$), минимизирующей критерий

$$J = \mathrm{M}\left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \left[x^{\mathrm{T}}(k)R_1(k)x(k) + u^{\mathrm{T}}(k)R_2(k)u(k) \right] + x^{\mathrm{T}}(N)R_1(N)x(N) \right\}, \quad (4)$$

где $R_1(k) \geq 0$ и $R_2(k) > 0$ – заданные симметричные весовые матрицы.

Доказана теорема, определяющая вид матриц $K(k)$ и функционала (4) на оптимальных траекториях замкнутой системы (1)-(3).

Структуру **динамического** регулятора определим соотношениями:

$$u(k) = K(k)\hat{x}(k), \tag{5}$$

$$\hat{x}(k+1) = \overline{A}_0(k)\hat{x}(k) + \overline{B}_0(k)u(k) + G(k)\left[y(k) - \overline{C}_0(k)\hat{x}(k)\right], \tag{6}$$

где $\hat{x}(k)$ – оценка вектора состояния системы (1)-(2), $\hat{x}(0) = \mathrm{M}\{x(0)\} = x^0$; $K(k)$, $G(k)$ – матрицы соответствующих размерностей; для любой матрицы $\Psi\left[\theta(k), k\right]$, зависящей от $\theta(k)$, $\overline{\Psi}(k) = \mathrm{M}\left\{\Psi\left[\theta(k), k\right]\right\}$.

Необходимо определить параметры регулятора – последовательности матриц $K(k)$, $G(k)$ $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$, минимизирующие критерий

$$J = \mathrm{M}\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\left[x^{\mathrm{T}}(k)R_1(k)x(k) + u^{\mathrm{T}}(k)R_2(k)u(k)\right] + \right.$$
$$\left. + x^{\mathrm{T}}(N)R_1(N)x(N) + e^{\mathrm{T}}(N)\Pi e(N)\right\}, \tag{7}$$

где $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ – ошибка оценки вектора состояния.

Доказана теорема, определяющая вид матриц $K(k)$, $G(k)$ и функционала (7) на оптимальных траекториях замкнутой системы (1)-(2), (5)-(6).

Теоремы первой главы дают необходимые условия оптимальности статического и динамического регуляторов в виде дискретных двухточечных краевых задач, для решения которых приведена итерационная схема. Решения задач синтеза статического и динамического регуляторов получены в виде систем взаимосвязанных матричных уравнений. Правые части этих уравнений включают слагаемые, появление которых обусловлено как необходимостью учета флуктуаций параметров относительно их средних значений, так и присутствием мультипликативных шумов.

Во второй главе рассматривается управление с прогнозированием для систем со случайными параметрами и аддитивными и мультипликативными шумами, зависящими от состояния и управления.

Пусть объект управления описывается уравнением (1), предполагается, что вектор состояния полностью доступен наблюдению. На каждом шаге k

вычисляется последовательность прогнозирующих управлений, минимизирующих критерий со скользящим горизонтом управления

$$J(k+p/k) = \mathrm{M}\left\{\sum_{i=0}^{p-1} x^{\mathrm{T}}(k+i)R_1(k,i)x(k+i) + u^{\mathrm{T}}(k+i)R_2(k,i)u(k+i) + \right.$$
$$\left. + x^{\mathrm{T}}(k+p)R_1(k,p)x(k+p) \Big/ x(k)\right\}, \quad (8)$$

где $\mathrm{M}\{a/b\}$ – оператор условного математического ожидания, $k = 0, 1, 2, \ldots$ – текущий момент времени, $R_1(k,i) \geq 0$ и $R_2(k,i) > 0$ – весовые матрицы соответствующих размерностей. Отметим, что последовательность прогнозирующих управлений зависит от состояния системы в текущий момент времени k. В качестве управления в момент k выбирают первую компоненту последовательности, тем самым получая управление как функцию текущего состояния, т. е. управление с обратной связью. Чтобы получить управление на следующем шаге, процедура повторяется для текущего момента $k+1$, при этом горизонт управления сдвигается на один шаг.

Синтезируем стратегию прогнозирующего управления с **замкнутой** обратной связью. Такая стратегия предполагает, что будущие управления на горизонте прогнозирования зависят от будущих состояний $u(k+i) = \varphi[x(k+i)]$, $i = \overline{1, p-1}$, т. е. учитывается будущая обратная связь.

Теорема 1. *Оптимальная стратегия прогнозирующего управления с замкнутой обратной связью системой* (1), *минимизирующая критерий* (8) *при фиксированном горизонте прогнозирования* p, *определяется уравнениями*

$$u(k) = K(p/k)x(k),$$
$$K(p/k) = -\Big[L_{22}(p-1) + R_2(k,0)\Big]^{-1} L_{12}^{\mathrm{T}}(p-1),$$
$$L_{11}(s) = \sum_{j=0}^{m} \overline{A}_j^{\mathrm{T}}(t-s)Q(s)\overline{A}_j(t-s) + \mathrm{M}\left\{\sum_{j=0}^{m} \widetilde{A}_j^{\mathrm{T}}(t-s)Q(s)\widetilde{A}_j(t-s)\right\},$$
$$L_{12}(s) = \sum_{j=0}^{m} \overline{A}_j^{\mathrm{T}}(t-s)Q(s)\overline{B}_j(t-s) + \mathrm{M}\left\{\sum_{j=0}^{m} \widetilde{A}_j^{\mathrm{T}}(t-s)Q(s)\widetilde{B}_j(t-s)\right\},$$
$$L_{22}(s) = \sum_{j=0}^{m} \overline{B}_j^{\mathrm{T}}(t-s)Q(s)\overline{B}_j(t-s) + \mathrm{M}\left\{\sum_{j=0}^{m} \widetilde{B}_j^{\mathrm{T}}(t-s)Q(s)\widetilde{B}_j(t-s)\right\}.$$

$$Q(s+1) = L_{11}(s) - L_{12}(s)\left[L_{22}(s) + R_2(k, p-1-s)\right]^{-1} L_{12}^{\mathrm{T}}(s) + \\ + R_1(k, p-1-s),$$

с начальным условием $Q(0) = R_1(k,p)$, *где* $t = k+p-1$, *для любой матрицы* $\Psi\left[\theta(k), k\right]$, *зависящей от* $\theta(k)$, $\widetilde{\Psi}(k) = \Psi\left[\theta(k), k\right] - \overline{\Psi}(k)$.

Выражение для оптимального значения функционала (8) *имеет вид*

$$J^{opt}(k+p/k) = x^{\mathrm{T}}(k)\left[Q(p) - R_1(k,0)\right]x(k) + \mathrm{tr}\left\{\sum_{i=0}^{p-1} Q(i)W(k+p-1-i)\right\},$$

где tr *– означает след матрицы,*

$$W(i) = \overline{D}_1(i)\overline{D}_1^{\mathrm{T}}(i) + \mathrm{M}\left\{\widetilde{D}_1(i)\widetilde{D}_1^{\mathrm{T}}(i)\right\}.$$

Рассмотрим задачу синтеза прогнозирующего управления **разомкнутого** типа для системы (1). Такая стратегия основана на предположении, что будущие прогнозирующие управления на всем горизонте прогноза зависят только от текущего состояния системы, т. е. не используется будущая обратная связь.

Теорема 2. *Оптимальная стратегия прогнозирующего управления разомкнутого типа системой* (1), *минимизирующая критерий* (8) *при фиксированном горизонте управления* p **без учета ограничений** *на управление, определяется уравнениями:*

$$u(k) = \left[\begin{array}{cccc} I & 0 & \dots & 0 \end{array}\right] U(k),$$
$$U(k) = -H^{-1}(k)G^{\mathrm{T}}(k)x(k),$$

где I *– единичная матрица размерности* n_u, 0 *– квадратная нулевая матрица размерности* n_u; $H(k)$, $G(k)$ *– блочные матрицы вида*

$$H(k) = \left[\begin{array}{cccc} H_{11}(k) & H_{12}(k) & \dots & H_{1p}(k) \\ H_{21}(k) & H_{22}(k) & \dots & H_{2p}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{p1}(k) & H_{p2}(k) & \dots & H_{pp}(k) \end{array}\right],$$
$$G(k) = \left[\begin{array}{cccc} G_1(k) & G_2(k) & \dots & G_p(k) \end{array}\right],$$

блоки которых равны

$$H_{is}(k)=\begin{cases} \overline{B}_0^{\mathrm{T}}(k+i-1)\left\{\prod_{j=i}^{s-2}\overline{A}_0^{\mathrm{T}}(k+j)\right\}\widehat{L}_{12}(k+s-1), & i<s,\\ \widehat{L}_{22}(k+s-1)+R_2(k,s-1), & i=s,\\ H_{si}^{\mathrm{T}}, & i>s,\end{cases}$$

$$G_i(k)=\left\{\prod_{s=0}^{i-2}\overline{A}_0^{\mathrm{T}}(k+s)\right\}\widehat{L}_{12}(k+i-1),$$

$$\prod_{s=0}^{-1}\overline{A}_0^{\mathrm{T}}(k+s)=1,$$

$$\widehat{Q}(s)=\widehat{L}_{11}(s)+R_1(k,s-k),\quad \widehat{Q}(k+p)=R_1(k,p),$$

$$\widehat{L}_{11}(s)=\sum_{j=0}^{m}\left[\overline{A}_j^{\mathrm{T}}(s)\widehat{Q}(s+1)\overline{A}_j(s)+\mathrm{M}\left\{\widetilde{A}_j^{\mathrm{T}}(s)\widehat{Q}(s+1)\widetilde{A}_j(s)\right\}\right],$$

$$\widehat{L}_{12}(s)=\sum_{j=0}^{m}\left[\overline{A}_j^{\mathrm{T}}(s)\widehat{Q}(s+1)\overline{B}_j(s)+\mathrm{M}\left\{\widetilde{A}_j^{\mathrm{T}}(s)\widehat{Q}(s+1)\widetilde{B}_j(s)\right\}\right],$$

$$\widehat{L}_{22}(s)=\sum_{j=0}^{m}\left[\overline{B}_j^{\mathrm{T}}(s)\widehat{Q}(s+1)\overline{B}_j(s)+\mathrm{M}\left\{\widetilde{B}_j^{\mathrm{T}}(s)\widehat{Q}(s+1)\widetilde{B}_j(s)\right\}\right].$$

Оптимальное значение критерия (8) *определяется выражением*

$$\widehat{J}^{opt}(k+p/k)=x^{\mathrm{T}}(k)\left[\widehat{Q}(k)-G(k)H^{-1}(k)G^{\mathrm{T}}(k)\right]x(k)+$$
$$+\operatorname{tr}\left\{\sum_{r=0}^{p-1}\widehat{Q}(k+r+1)W(k+r)\right\},$$

где

$$W(i)=\overline{D}(i)\overline{D}^{\mathrm{T}}(i)+\mathrm{M}\left\{\widetilde{D}(i)\widetilde{D}^{\mathrm{T}}(i)\right\}.$$

С учетом ограничений *на управление вида*

$$u_{min}(k+i)\le S_i(k)u(k+i)\le u_{max}(k+i),\quad (i=\overline{0,p-1}),$$

где $S_i(k)$ *– матрицы соответствующих размерностей, вектор прогнозирующих управлений* $U(k)$ *на каждом фиксированном шаге* k *определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием вида*

$$Y(k+p/k)=2x^{\mathrm{T}}(k)G(k)U(k)+U^{\mathrm{T}}(k)H(k)U(k),$$

при ограничениях

$$U_{min}(k) \leq S(k)U(k) \leq U_{max}(k),$$

где

$$S(k) = diag\left(S_0(k), ..., S_{p-1}(k)\right),$$
$$U_{min}(k) = \left[u_{min}^{\mathrm{T}}(k), ..., u_{min}^{\mathrm{T}}(k+p-1)\right]^{\mathrm{T}},$$
$$U_{max}(k) = \left[u_{max}^{\mathrm{T}}(k), ..., u_{max}^{\mathrm{T}}(k+p-1)\right]^{\mathrm{T}}.$$

В третьей главе рассматриваются задачи управления ИП на финансовом рынке со стохастической волатильностью.

Рассматривается ИП, состоящий из n видов рисковых вложений и безрискового вложения. Динамика портфеля в пространстве состояний описывается уравнениями:

$$x_i(k+1) = \left[1 + \eta_i(k)\right]\left[x_i(k) + u_i(k)\right], (i = \overline{1,n}), \tag{9}$$

$$x_{n+1}(k+1) = \left[1 + r(k)\right]\left[x_{n+1}(k) - \sum_{j=1}^{n} u_j(k)\right], \tag{10}$$

где $x_i(k)$ $(i = \overline{1,n})$ – капитал, помещенный в рисковый актив i-го вида, $\eta_i(k)$ – доходность рискового актива i-го вида, $x_{n+1}(k)$ – капитал, помещенный в безрисковый актив, $r(k)$ – доходность безрискового актива, $u_i(k)$ – объем перераспределяемого капитала (если $u_i(k) > 0$, то капитал в размере $u_i(k)$ переводится из безрискового актива в i-й рисковый, если $u_i(k) < 0$, то капитал в размере $|\,u_i(k)|$ переводится из i-го рискового актива в безрисковый). Если какая-либо переменная $x_i(k) < 0$ $(i = \overline{1,n})$, то это означает участие в операции "продажа без покрытия" (short sale) на сумму $|\,x_i(k)|$, если $x_{n+1}(k) < 0$, то это означает заем безрискового капитала в сумме $|\,x_{n+1}(k)|$.

Для описания динамики цен рисковых финансовых активов используются два типа моделей со стохастической волатильностью: модель цен со стохастической волатильностью, описываемой SV-моделью и многомерная модель цен со стохастической волатильностью, линейно зависящей от случайных параметров.

Модель цен со стохастической волатильностью, описываемой SV-моделью, имеет вид:

$$S_i(k+1) = S_i(k)\left[1 + \mu_i(k) + \sigma_i(k)v_i(k)\right], \tag{11}$$

где $S_i(k) \geq 0$ $(i = \overline{1,n})$ – цена ценной бумаги i-го вида в момент времени k; $\mu_i(k)$ – ожидаемая доходность – характеризует среднюю норму возврата (коэффициент роста) на интервале k; $v_i(k)$ – последовательность белых гауссовских шумов с единичной дисперсией, $\mathrm{M}\{v_i(k)v_j(s)\} = \delta_{ij}\delta_{ks}$, где δ_{ks} – символ Кронекера; $\sigma_i(k)$ – волатильность, которая является мерой разброса значений цены и описывается базовой SV-моделью:

$$\sigma_i(k) = \exp\left\{\frac{h_i(k)}{2}\right\}, \tag{12}$$

где $h_i(k)$ выполняет роль скрытых факторов (латентной структуры) и имеет авторегрессионную природу

$$h_i(k+1) = \gamma_{0i} + \gamma_{1i}h_i(k) + \varepsilon_i(k), \tag{13}$$

здесь γ_{0i} и γ_{1i} – коэффициенты авторегрессии, $|\gamma_{1i}| < 1$, $\varepsilon_i(k)$ – белые гауссовские шумы с дисперсиями $\sigma^2_{\varepsilon i}$, случайные последовательности $v_i(k)$ и $\varepsilon_i(k)$ некорелированны между собой.

Многомерная модель цен со стохастической волатильностью, линейно зависящей от случайных параметров, описывается следующим образом:

$$S_i(k+1) = S_i(k)\left[1 + \mu_i(k) + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\left[\theta(k), k\right] v_j(k)\right], \tag{14}$$

где $S_i(k) \geq 0$ – цена ценной бумаги i-ого вида $\left(i = \overline{1,n}\right)$ в момент времени k; $\mu_i(k)$ – ожидаемая доходность на интервале k; $\sigma_{ij}\left[\theta(k), k\right]$ – элементы матрицы стохастической волатильности $||\sigma_{ij}\left[\theta(k), k\right]||$ размерности $n \times n$, причем $\sigma_{ij}[\theta(k), k]$ зависит от $\theta(k)$ линейно, где $\theta(k)$ – последовательность независимых l-мерных случайных векторов с известными первым и вторым моментами: $\mathrm{M}\{\theta(k)\} = \bar{\theta}(k)$, $\mathrm{M}\left\{\theta(k)\theta^{\mathrm{T}}(k)\right\} = \Theta(k)$; $v_j(k)$ – белые шумы с нулевым средним и единичной дисперсией, $\mathrm{M}\{v_i(k)v_j(s)\} = \delta_{ij}\delta_{ks}$; причем $\mathrm{M}\left\{v(k)\theta^{\mathrm{T}}(k)\right\} = 0$, где $v(k) = [v_1(k), ..., v_n(k)]^{\mathrm{T}}$.

Для обеих моделей цен задача управления ИП решается в двух постановках: слежение за эталонным ИП и активное управление.

Рассмотрим задачу **слежения** за эталонным портфелем. Необходимо определить стратегию управления ИП путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций так, чтобы капитал реального портфеля с

наименьшими отклонениями следовал капиталу $V^0(k)$ некоторого определяемого инвестором гипотетического эталонного портфеля, эволюция которого описывается уравнением

$$V^0(k+1) = [1 + \mu_0(k)]\, V^0(k), \tag{15}$$

где $\mu_0(k)$ – заданная желаемая доходность портфеля. В начальный момент $V^0(0) = V(0)$ и распределение капитала по активам известно $x(0) = x^0$. Критерий качества управления (функция риска) имеет вид

$$J = \mathrm{M}\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\left[\delta(k)\left[V(k) - V^0(k)\right]^2 + u^{\mathrm{T}}(k)R(k)u(k)\right] + \right.$$
$$\left. + \delta(N)\left[V(N) - V^0(N)\right]^2\right\}, \tag{16}$$

где общий капитал портфеля $V(k) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i(k)$, $R(k) > 0$ и $\delta(k) > 0$ – весовые коэффициенты.

Определим стратегию управления в виде линейной обратной связи

$$u(k) = K_1(k)x(k) + K_2(k)V^0(k), \tag{17}$$

которая минимизирует функционал (16) при динамических ограничениях (9), (10), (15), где $x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) & \dots & x_{n+1}(k) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $K_1(k)$ и $K_2(k)$ – матричные коэффициенты усиления регулятора.

Доказаны теоремы, определяющие оптимальные последовательности матриц $K_1(k)$ и $K_2(k)$ и вид функционала (16), на оптимальных траекториях замкнутой системы (9), (10), (15), (17) для обеих моделей цен рисковых финансовых активов. Определены уравнения для математического ожидания и дисперсии управляемого ИП. При доказательстве теорем используются результаты, полученные в главе 1. Приведены результаты численного моделирования.

Рассмотрим задачу **активного** управления. Предположим, что задан некоторый базовый (индексный) портфель, который содержит набор финансовых активов в заданных долях в соответствии со структурой и состоянием рынка в целом. Активное управление заключается в том, чтобы превосходить доходность индексного портфеля путем перераспределения инвестиций.

Динамика капитала индексного портфеля $\widetilde{V}(k)$ описывается уравнением

$$\widetilde{V}(k+1) = \left[1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\mu_i(k) + \sigma_i(k) v_i(k)\Big) + \alpha_{n+1} r(k)\right] \widetilde{V}(k), \qquad (18)$$

где $\alpha_i \geq 0$ $\left(i = \overline{1, n+1}\right)$ – доля капитала индексного портфеля, вложенного в актив i-го вида, $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$. В начальный момент $\widetilde{V}(0) = V(0)$ заданы и распределение капитала по активам известно $x(0) = x^0$. Функция риска в случае активного управления имеет вид:

$$J = \mathrm{M}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} \left[\delta(k)\left[V(k) - (1+\beta)\widetilde{V}(k)\right]^2 + u^{\mathrm{T}}(k) R(k) u(k)\right] + \right.$$
$$\left. + \delta(N)\left[V(N) - (1+\beta)\widetilde{V}(N)\right]^2\right\}, \quad (19)$$

где $R(k) > 0$ и $\delta(k) > 0$ – весовые коэффициенты, параметр $\beta \geq 0$ характеризует склонность инвестора к риску.

Определим стратегию управления в виде линейной обратной связи

$$u(k) = K_1(k) x(k) + K_2(k) \widetilde{V}(k), \qquad (20)$$

которая минимизирует функционал (19) при динамических ограничениях (9), (10), (18), где $K_1(k)$ и $K_2(k)$ – матричные коэффициенты усиления регулятора.

Доказаны теоремы, определяющие оптимальные последовательности матриц $K_1(k)$ и $K_2(k)$, минимизирующие критерий (19) на траекториях замкнутой системы (9), (10), (18), (20) для обеих моделей цен рисковых финансовых активов. Определены уравнения для математического ожидания и дисперсии управляемого ИП. При доказательстве теорем используются результаты, полученные в главе 1. Проведено численное исследование предложенных моделей управления ИП с использованием модельных данных.

Разработана модификация модели активного управления ИП на случай, когда индексный и инвестиционный портфели содержат различные виды акций. Если i-й вид акций не включен в ИП, то в критерий вводится штраф за использование акций i-го вида, то есть $R(k) = \mathrm{diag}(R_1(k), ..., R_n(k))$, где $R_i(k) = M >> 1$; в начальный момент $x_i(0) = 0$. Если i-й вид акций не

включен в индексный портфель, то $\alpha_i = 0$. Проведено численное исследование модифицированного подхода с использованием модельных данных.

В четвертой главе рассматривается задача управления ИП в условиях стохастической волатильности с учетом трансакционных издержек и ограничений на объемы торговых операций, а также различия ставок вклада и займа безрискового актива.

Рассмотрим ИП, состоящий из n рисковых активов и одного безрискового актива. Динамика портфеля в пространстве состояний описывается уравнениями:

$$x_i(k+1) = \left[1+\eta_i(k)\right]\left[x_i(k)+u_i^+(k)-u_i^-(k)\right], (i=\overline{1,n}), \tag{21}$$

$$x_{n+1}(k+1) = \left[1+r_1(k)\right]\times$$
$$\times\left[x_{n+1}(k)+g(k)-\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda_i^+)u_i^+(k)+\sum_{i=1}^{n}(1-\lambda_i^-)u_i^-(k)\right], \tag{22}$$

$$x_{n+2}(k+1) = \left[1+r_2(k)\right]\left[x_{n+2}(k)-g(k)\right], \tag{23}$$

где $x_i(k)$ $(i=\overline{1,n})$ – капитал, помещенный в рисковый актив i-го вида, $\eta_i(k)$ – доходность рискового финансового актива i-го вида, $u_i^+(k) \geq 0$ – капитал, переводимый из безрискового вложения в i-ый рисковый актив, $u_i^-(k) \geq 0$ – капитал, переводимый из i-го рискового вложения в безрисковый актив, $x_{n+1}(k)$ – капитал, помещенный в безрисковый актив, $r_1(k)$ – ставка доходности безрискового актива, $\lambda_i^+ \geq 0$ – доля капитала $u_i^+(k)$, отчисляемая на оплату трансакционных издержек при покупке рискового актива i-го вида, $\lambda_i^- \geq 0$ – доля капитала $u_i^-(k)$, идущая на оплату трансакционных издержек при продаже рискового актива i-го вида, переменная $g(k) > 0$ означает заем безрискового капитала в размере $g(k)$, если $g(k) < 0$, то происходит возврат безрискового долга в размере $|\,g(k)|$, переменная $x_{n+2}(k)$ означает, что на сумму равную $|\,x_{n+2}(k)|$ сделан заем безрискового актива, $r_2(k)$ – ставка займа безрискового актива $(r_1(k) < r_2(k))$.

При управлении портфелем также учитываются следующие ограничения:

$$x_i^{min}(k) \leq x_i(k)+u_i^+(k)-u_i^-(k) \leq x_i^{max}(k), \quad \left(i=\overline{1,n}\right), \tag{24}$$

$$0 \leq x_{n+1}(k)+g(k)-\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda_i^+)u_i^+(k)+\sum_{i=1}^{n}(1-\lambda_i^-)u_i^-(k) \leq x_{n+1}^{max}(k), \tag{25}$$

$$x_{n+2}^{min}(k) \leq x_{n+2}(k) - g(k) \leq 0. \tag{26}$$

Соотношения (24)-(26) ограничивают объемы вложений в финансовые активы, а также гарантируют, что переменная x_{n+1} не может быть отрицательной, а переменная x_{n+2} принимает только неположительные значения. Общий капитал портфеля $V(k) = \sum_{i=1}^{n+2} x_i(k)$.

Для описания цен рисковых финансовых активов используется многомерная модель (14). Задача управления ИП решается в двух постановках: слежение за эталонным ИП и активное управление. Доказаны теоремы, определяющие оптимальные стратегии прогнозирующего управления ИП при ограничениях. При доказательстве теорем используются результаты, полученные в главе 2. Проведено численное исследование предложенных моделей управления ИП с использованием как модельных, так и реальных данных.

В заключении приводятся основные научные результаты, полученные в диссертационной работе, которые состоят в следующем:

1. Синтезированы линейные оптимальные по квадратичному критерию статический и динамический регуляторы по выходу для систем со случайными параметрами, возмущенных аддитивными и мультипликативными шумами, зависящими от состояния и управлений.

2. Предложен метод определения стратегий управления с прогнозированием с обратной связью замкнутого типа для систем со случайными параметрами, возмущенных аддитивными и мультипликативными шумами, зависящими от состояния и управлений.

3. Предложен метод определения стратегий управления с прогнозированием с обратной связью разомкнутого типа для систем со случайными параметрами, возмущенных аддитивными и мультипликативными шумами, зависящими от состояния и управлений, при ограничениях на управляющие переменные.

4. Синтезированы динамические стратегии управления ИП с обратной связью в условиях стохастической волатильности доходностей рисковых финансовых активов.

5. Разработаны динамические модели управления ИП в условиях стохастической волатильности, с учетом трансакционных издержек, ограничений на объемы торговых операций и различия ставок безрискового вклада и кредитования.

6. Синтезированы стратегии управления с прогнозированием ИП в условиях стохастической волатильности доходностей рисковых финансовых активов с учетом пропорциональных трансакционных издержек и ограничений на объемы торговых операций.

7. Проведено численное исследование моделей управления ИП с использованием модельных и реальных данных в системе MATLAB.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Домбровский В.В., Ляшенко Е.А.** Линейно-квадратичное управление дискретными системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами с применением к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 10. – С. 50-65.

2. **Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А.** Управление с прогнозированием системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 4. – С. 84-97.

3. **Домбровский В.В., Ляшенко Е.А.** Динамическая модель управления инвестиционным портфелем на финансовом рынке со стохастической волатильностью // Автоматика и вычислительная техника. – 2003. – № 5. – С. 12-21.

4. **Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А.** Стратегии прогнозирующего управления инвестиционным портфелем с учетом трансакционных издержек и ограничений на объемы торговых операций // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2004. – Т. 11, № 2. – С. 331-332.

5. **Домбровский В.В., Ляшенко Е.А.** Робастное управление линейными системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами с применением к оптимизации инвестиционного портфеля // Вестник Томского государственного университета. – 2002. – № 1(I) – С. 154-159.

6. **Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А.** Прогнозирующее управление системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами // Вестник Томского государственного университета. – 2004. – № 284 – С. 148-151.

7. **Dombrovsky V.V., Lashenko E.A.** Dynamic Model of Active Portfolio Management with Stochastic Volatility in Incomplete Market // Proceedings of SICE Annual Conference in Fukui. Fukui: Fukui university, 2003. – P. 636-641.

8. **Dombrovsky V.V., Lashenko E.A.** Robust Control of Linear Systems with Random Parameters and Multiplicative Disturbances with Application to the Investment Portfolio Management // Proceedings of SICE Annual Conference in Fukui. Fukui: Fukui university, 2003. – P. 1109-1114.

9. **Dombrovsky V.V., Dombrovsky D.V., Lyashenko E.A.** Dynamic Feedback Strategies Of Investment Management Under Transaction Costs And Portfolio Constraints // Proceedings of the International Conference "Mathematical Modelling of Social and Economical Dynamics. Moscow: RSSU, 2004. – P. 105-107.

10. **Dombrovsky V.V., Dombrovsky D.V., Lyashenko E.A.** Investment Portfolio Optimisation With Transaction Costs And Constraints Using Model Predictive Control // Proceedings of the 8-th Korea-Russia International Symposium on Science and Technology. Tomsk: TPU, 2004. – P. 202-205.

11. **Домбровский В.В., Ляшенко Е.А.** Управление дискретными системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами // Материалы Всероссийской научно-практической конференции "Информационные технологии и математическое моделирование". Томск:

"Твердыня", 2002. – С. 96-98.

12. **Домбровский В.В., Ляшенко Е.А.** Робастное управление инвестиционным портфелем в условиях стохастической волатильности доходностей финансовых активов // Труды первой Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2002. – Ч. I. – С. 181-186.

13. **Домбровский В.В., Ляшенко Е.А.** Активное управление инвестиционным портфелем на финансовом рынке со стохастической волатильностью // Материалы Всероссийской научно-практической конференции "Информационные технологии и математическое моделирование". Томск: Твердыня, 2002. – С. 99-101.

14. **Dombrovsky V.V., Dombrovsky D.V., Lyashenko E.A.** Dynamic Asset Management With Stochastic Volatility Under Transaction Costs And Portfolio Constraints // Материалы Российской конференции "Дискретный анализ и исследование операций". Новосибирск: издательство института математики, 2004. – С. 200.

15. **Домбровский В.В., Ляшенко Е.А.** Робастное управление дискретными системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами // Труды десятого юбилейного симпозиума по непараметрическим и робастным статистическим методам в кибернетике. Томск: ТГУ, 2003 – С. 119-124.

Тираж 100 экз. Заказ № 2

———————————————

Отпечатано в ООО "НИП", г.Томск