*На правах рукописи*

Смагин Сергей Валерьевич

# СИНТЕЗ ЛОКАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ВЫХОДОМ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Специальность: 05.13.01 – «Системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)»

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Томск – 2010

Работа выполнена в государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Томский государственный университет" на кафедре прикладной математики

**Научный руководитель:** доктор технических наук, профессор Параев Юрий Иванович

**Официальные оппоненты:** доктор физ.-мат. наук, доцент Дмитриев Юрий Глебович

доктор технических наук, профессор Светлаков Анатолий Антонович

**Ведущая организация:** Сибирский федеральный университет (г. Красноярск)

**Защита состоится:**
30 сентября 2010 г. в 10.30 на заседании диссертационного совета Д 212.267.12 при Томском государственном университете по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, корп. 2, ауд. 212б.

Отзывы направляются по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.

**С диссертацией можно ознакомиться:**
в научной библиотеке Томского государственного университета по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 34.

**Автореферат разослан:** 26 августа 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент П.Ф.Тарасенко

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность проблемы.** Дискретные локально-оптимальные системы управления являются частным случаем дискретного прогнозирующего управления (Model predictive control) с прогнозом на 1 такт. Главным достоинством метода локально-оптимального управления является упрощение процедуры синтеза и возможность учета дополнительных ограничений на вектор состояния системы и вектор управления, а также возможность оптимизации по дополнительным критериям.

Локально-оптимальные управления синтезируются на основе минимизации критерия в текущий момент времени. Задачи синтеза управлений по локальному критерию рассматривались в работах Н.Н.Моисеева, В.И.Зубова, И.Е.Казакова, Г.Л.Дегтярева, Т.К.Сиразетдинова, И.С.Ризаева, А.Н.Панченко, Г.К.Кельманса, А.С.Позняка, Е.В.Бодянского, М.М.Когана, Ю.И.Неймарка, А.И.Рубана, Ю.И.Параева, В.И.Смагина, В.Д.Фурасова и др. авторов. Рассмотренные в этих работах методы синтеза локально-оптимальных систем управления недостаточно развиты для решения задач синтеза систем управления при неполной информации о возмущениях, а также при наличии запаздываний в управлении.

Важной также является проблема разработки алгоритмов калмановской фильтрации для класса систем с неизвестными аддитивными возмущениями. Методы вычисления оценок вектора состояния, использующие оценки неизвестного возмущения, рассмотрены в работах K.Astrom, P.Eykhoff, J.Chen, R. J.Patton, M.Darouach, M.Zasadzinski, S. J.Xu, B.Friedland, S.Gillijns, B.Moor, C.S.Hsieh, Д.А.Кошаев и др. Методы фильтрации, использующие оценки возмущений, могут давать плохие результаты, в тех случаях, когда не удается построить оценки возмущений с высокой точностью. Поэтому представляют также интерес и другие подходы к решению задачи фильтрации, которые не используют оценок аддитивных возмущений. Именно такой новый подход разрабатывается в настоящей диссертационной работе.

Высказанные доводы позволяют считать тему диссертационной работы актуальной.

**Объект исследования.** Управляемые стохастические нестационарные дискретные динамические системы с запаздыванием по управлению, функционирующие в условиях неполной информации о возмущении и состоянии.

**Предмет исследования.** Локально-оптимальные алгоритмы слежения выходом системы за заданной траекторией, алгоритмы фильтрации и экстраполяции.

**Цель диссертационной работы** состоит в разработке на основе оптимизации локального критерия систем управления выходом, отслеживающим заданную траекторию, при неполной информации о возмущении и состоянии объекта. Решение задач управления при наличии запаздываний в контуре управления. Разработка методов фильтрации и экстраполяции для объектов с неполной информацией о возмущениях.

Для достижения данной цели поставлены следующие **основные задачи:**

1. Построить локально-оптимальное управление выходом объекта со случайными возмущениями мультипликативного вида с контролируемой аддитивной детерминированной составляющей в условиях косвенных наблюдений за состоянием.

2. Разработать динамический локально-оптимальный закон управления выходом объекта со случайными возмущениями с неконтролируемой аддитивной детерминированной составляющей полиномиального вида.

3. Построить оценки фильтрации и экстраполяции для дискретных стохастических процессов, со случайными возмущениями с неконтролируемой аддитивной постоянной составляющей.

4. Построить локально-оптимальное управление выходом объекта с запаздыванием по управлению для систем с неполной информацией о возмущениях.

5. Выполнить апробацию алгоритмов с помощью вычислительных экспериментов.

**Методы исследования.**

Для достижения поставленных в диссертационной работе целей использовался аппарат теории управления, теории вероятностей и математической статистики, теории случайных процессов, численные методы и методы имитационного моделирования. Численные расчеты и анализ результатов проводился с помощью моделирования на ЭВМ.

**Научная новизна** полученных результатов:

1. Найдены локально-оптимальные пропорциональные и динамические законы управления нестационарными объектами, обеспечивающие отслеживание выходом объекта заданной траектории в условиях неполной информации о возмущении и состоянии, с учетом запаздывания в управлении.

2. Построены дискретные нестационарные фильтры и экстраполяторы, позволяющие вычислять оптимальные несмещенные оценки вектора состояния при неполной информации об аддитивных возмущениях с неизвестной посто-

янной составляющей.

**Теоретическая значимость** диссертационного исследования состоит в развитии теории локально-оптимального управления выходом нестационарных дискретных систем и развитии теории фильтрации и экстраполяции для объектов с неопределенностью в описании аддитивных возмущений.

**Практическая значимость работы** определяется тем, что разработанные и апробированные в рамках диссертационной работы методы и алгоритмы, могут применяться в различных областях техники и экономики, в частности, при решении задач управления запасами.

Применение методов управления и фильтрации, разработанных в диссертации, можно использовать для повышения надежности систем, так как неполнота информации о возмущениях может возникать в результате случайных отказов и сбоев.

Результаты исследований используются в учебном процессе на факультете прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета.

**Достоверность полученных результатов**, содержащихся в диссертации, подтверждается тем, что доказательства проведены на строгом математическом уровне, а также подтверждается результатами численных расчетов.

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Объем диссертации составляет 132 страницы, в том числе 35 рисунков и 1 таблица, библиография содержит 93 наименования.

**На защиту выносятся:**

1. Решение задачи синтеза локально-оптимального управления выходом объекта со случайными возмущениями аддитивного и мультипликативного типа с контролируемой детерминированной составляющей в условиях косвенных наблюдений за состоянием.

2. Динамический локально-оптимальный закон управления выходом объекта со случайными возмущениями, содержащими неконтролируемые аддитивные детерминированные составляющие полиномиального вида.

3. Алгоритмы вычисления несмещенных оценок фильтрации и экстраполяции для линейных нестационарных дискретных систем с неизвестной постоянной составляющей возмущений.

4. Алгоритм локально-оптимального управления выходом объекта с запаздыванием по управлению со случайными косвенно контролируемыми возмущениями, модели которых могут содержать неизвестные параметры.

5. Решение задач управления запасами.

**Апробация работы.** Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях:

- VI Междунар. научно-технической конф. "ИКИ-2005", "Измерение, контроль, информатизация", (Барнаул, 2005);

- II и III Всерос. научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Инноватика-2006", "Инноватика-2007", (Томск, 2006, 2007);

- X, XII Всерос. научно-практической конференции "Научное творчество молодежи" (Анжеро-Судженск, 2006, 2008);

- VII Российской конференции с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных систем» (Томск, 2008).

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертации, формулируется цель работы, изложены основные научные результаты, выносимые на защиту.

**В первой главе** диссертации приводится общая постановка задачи управления выходом по локальному критерию для нестационарного объекта (раздел.1.1). Построены алгоритмы управления выходом для систем с аддитивными и мультипликативными возмущениями. Получены аналитические выражения для коэффициентов передачи.

В разделе 1.2. рассмотрены задачи управления выходом линейной системы при точном измерении вектора состояний. Объект управления описывается разностным уравнением:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + f(k) + q(k),\ \ x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x_0$ – начальное условие; $x(k) \in \mathrm{R}^n$ – вектор состояний; $u(k) \in \mathrm{R}^m$ – вектор управления; $f(k)$ – наблюдаемая детерминированная составляющая возмущений, евклидова норма которого ограничена сверху; $q(k)$ – случайная составляющая ненаблюдаемого возмущения со следующими характеристиками:

$$\mathrm{M}\{q(k)\} = 0,\ \ \mathrm{M}\{q(k)q^{\mathrm{T}}(j)\} = Q(k)\delta_{k,j}.$$

В (1) вектор $x_0$ случайный, независящий от $q(k)$.

Локальный критерий и вектор выхода задаются формулами:

$$I(k) = \mathrm{M}\{(w(k+1) - z(k))^{\mathrm{T}} C(k)(w(k+1) - z(k)) + u^{\mathrm{T}}(k)D(k)u(k) / X_0^k\}, \tag{2}$$

$$w(k) = H(k)x(k), \tag{3}$$

где $w(k) \in \mathrm{R}^{l_1}$ – вектор выхода системы, который должен отслеживать заданный вектор $z(k)$, $C(k) > 0$, $D(k) \geq 0$ – весовые матрицы; $H(k)$ – матрица размерности $(l_1 \times n)$; $z(k)$ – отслеживаемый вектор размерности $l_1$ (евклидова норма вектора $z(k)$ ограничена сверху); $X_0^k = \{x(0),\ x(1),\ \ldots,\ x(k)\}$.

Показано, что локально-оптимальное управление имеет вид

$$u(k) = K_1(k)x(k) + K_2(k)\tilde{z}(k), \tag{4}$$

где

$$K_1(k) = -(B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}CHB + D)^{-1}B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}CHA,$$
$$K_2(k) = (B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}CHB + D)^{-1}B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}C,$$
$$\tilde{z}(k) = z(k) - H(k)f(k).$$

В разделах 1.3 и 1.4 рассмотрена задача синтеза локально-оптимального управления выходом для случая, когда наблюдению доступен вектор

$$y(k) = S(k)x(k) + v(k), \tag{5}$$

где $y(k) \in \mathrm{R}^l$ – вектор измерений; $S(k)$ – матрица размерности ($l \times n$); $v(k)$ – гауссовская случайная последовательность ошибок измерений, с характеристиками:

$$\mathrm{M}\{v(k)\} = 0,\ \ \mathrm{M}\{q(k)v^{\mathrm{T}}(j)\} = 0,\ \mathrm{M}\{v(k)v^{\mathrm{T}}(j)\} = V(k)\delta_{k,j}. \tag{6}$$

Локальный критерий записывается в виде:

$$I(k) = \mathrm{M}\{(w(k+1) - z(k))^{\mathrm{T}}C(k)(w(k+1) - z(k)) + u^{\mathrm{T}}(k)D(k)u(k)/Y_0^k, Z_0^k\}, \tag{7}$$

где $w(k) = H(k)x(k) \in \mathrm{R}^{l_1}$ – вектор выхода системы, отслеживающий заданный вектор $z(k) = \bar{H}(k)\bar{z}(k)$; $C(k) > 0$, $D(k) \geq 0$ – весовые матрицы; $Y_0^k = \{y(0),\ y(1),\ \ldots,\ y(k)\}$; $Z_0^k = \{z(0),\ z(1),\ \ldots,\ z(k)\}$; $\bar{z}(k) \in \mathrm{R}^{l_2}$ – вектор удовлетворяющий уравнению:

$$\bar{z}(k+1) = F(k)\bar{z}(k) + q_z(k),\ \bar{z}(0) = \tilde{z}_0. \tag{8}$$

В (8) $q_z(k)$ – гауссовская случайная последовательность с характеристиками:

$$\mathrm{M}\{q_z(k)\} = 0,\ \mathrm{M}\{q_z(k)q^{\mathrm{T}}(j)\} = 0,\ \mathrm{M}\{q_z(k)q_z^{\mathrm{T}}(j)\} = Q_z\delta_{k,j}.$$

Начальные условия для уравнений (1), (8) $x_0$ и $\tilde{z}_0$ – случайные векторы, независимые между собой и с векторами, $q(k)$ и $q_z(k)$ (описываются характеристиками):

$$\mathrm{M}\{x_0\} = \bar{x}_0,\ \mathrm{M}\{\tilde{z}_0\} = \bar{z}_0,\ \mathrm{M}\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^{\mathrm{T}}\} = P_{x_0},$$
$$\mathrm{M}\{(\bar{z}_0 - \tilde{z}_0)(\bar{z}_0 - \tilde{z}_0)^{\mathrm{T}}\} = P_{\bar{z}_0}.\ \mathrm{M}\{\bar{z}_0 x_0^{\mathrm{T}}\} = P_{\bar{z}_0, x_0}.$$

Задача управления выходом, отслеживающим заданный вектор $z(k)$, рассмотрена для следующего объекта с аддитивными и мультипликативными возмущениями

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + \sum_{p=1}^{m_1} A_p(k)x(k)\Theta_p(k) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{m_2} B_s(k)u(k)\Xi_s(k) + f(k) + q(k),\ x(0) = x_0, \tag{9}$$

где $\Theta_p(k)$ и $\Xi_s(k)$ – гауссовские случайные последовательности с характеристиками:

$$\mathrm{M}\left\{\Theta(k)\Theta^{\mathrm{T}}(j)\right\}=E_{m_1}\delta_{kj},\ \mathrm{M}\left\{\Xi(k)\Xi^{\mathrm{T}}(j)\right\}=E_{m_2}\delta_{kj},\ \mathrm{M}\left\{\Theta(k)\Xi^{\mathrm{T}}(j)\right\}=\Omega(k)\delta_{kj};$$

$E_{m_1}$ и $E_{m_2}$ – единичные матрицы размерности $m_1$ и $m_2$ соответственно; $\Omega(k)$ – матрица размерности $m_1 \times m_2$.

Управление объектом определяется в параметрической форме

$$u(k) = K_1(k)y(k) + K_2(k)z(k). \tag{10}$$

Решение задачи при $f(k)=0$ дает следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть динамика управляемого процесса описывается уравнением (9), модель канала – формулой (5). Тогда последовательность оптимальных матричных коэффициентов передачи закона управления (10), минимизирующих критерий (7), определяется по формулам

$$K_1^*(k) = -\bar{\bar{C}}^{-1}\left(B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}CHA\bar{P}S^{\mathrm{T}} + \sum_{s=1}^{m_2}\sum_{p=1}^{m_1}B_s^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}CHA_p\Omega_{ps}\bar{P}S^{\mathrm{T}}\right)\left(V + S\bar{P}S^{\mathrm{T}}\right)^{-1}, \tag{11}$$

$$K_2^*(k) = \bar{\bar{C}}^{-1}(B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}C\left(P_z - HAP_{xz}\right) - \bar{\bar{C}}K_1SP_{xz} - \sum_{s=1}^{m_2}\sum_{p=1}^{m_1}B_s^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}CHA_pP_{xz}\Omega_{ps})P_z^{-1}, \tag{12}$$

где $\bar{P}(k) = P_x - P_{xz}P_z^{-1}P_{zx}$, $\bar{\bar{C}}(k) = B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}CHB + D + \sum_{s=1}^{m_2}B_s^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}CHB_s$. Матрицы $P_z(k)$, $P_x(k)$, $P_{zx}(k)$ удовлетворяют матричным разностным уравнениям.

**Замечание 1.** Если $f(k) \neq 0$, то закон управления выходом имеет вид

$$u(k) = \tilde{K}_1^*(k)y(k) + \tilde{K}_2^*(k)\tilde{z}(k), \tag{13}$$

где

$$\tilde{K}_1^* = -\bar{\bar{C}}^{-1}\left(B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}CHA\tilde{P}S^{\mathrm{T}} + \sum_{s=1}^{m_2}\sum_{p=1}^{m_1}B_s^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}CHA_p\Omega_{ps}\tilde{P}S^{\mathrm{T}}\right)\left(V + S\tilde{P}S^{\mathrm{T}}\right)^{-1}, \tag{14}$$

$$\tilde{K}_2^*(k) = \bar{\bar{C}}^{-1}(B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}C\left(P_{\tilde{z}} - HAP_{x\tilde{z}}\right) - \bar{\bar{C}}K_1SP_{x\tilde{z}} - \sum_{s=1}^{m_2}\sum_{p=1}^{m_1}B_s^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}CHA_pP_{x\tilde{z}}\Omega_{ps})P_{\tilde{z}}^{-1}, \tag{15}$$

$$\tilde{P}(k) = P_x - P_{x\tilde{z}}P_{\tilde{z}}^{-1}P_{\tilde{z}x},\ \bar{\bar{C}}(k) = B^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}CHB + D + \sum_{s=1}^{m_2}B_s^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}CHB_s. \tag{16}$$

Входящие в (14)−(16) матрицы $P_{\tilde{z}}(k)$ и $P_{\tilde{z},x}(k)$ определяются из матричных разностных уравнений.

В разделе 1.5 описано применение алгоритма локально-оптимального управления для решения задачи управления запасами с учетом ограничений на управление и с минимизацией дополнительного критерия общих логистических издержек. В этом же разделе приводится пример управления клапанами смесительной колонны

**Во второй главе** разработаны методы синтеза локально-оптимальных систем управления при неизвестных аддитивных возмущениях полиномиального типа.

В разделе 2.1. рассмотрена задача управления выходом по критерию (2) для дискретной системы (1) с постоянными параметрами, где вектор $f(k)$ – полином степени $p$ относительно времени $k$:

$$f(k) = f_1 k^p + f_2 k^{p-1} + \ldots + f_p k + f_{p+1}, \qquad (17)$$

где $f_i$ – неизвестные постоянные векторы.

В разделе 2.2. исследуется задача синтеза управления для локального критерия (2) при неизвестной постоянной составляющей возмущений. Общее решение задачи для неизвестного возмущения полиномиального типа рассмотрено в разделе 2.3. Результат формулируется в виде следующей теоремы.

**Теорема 2.** Пусть динамика управляемого процесса описывается уравнением (1), с детерминированной неизвестной составляющей возмущений (17). Тогда последовательность оптимальных управлений, минимизирующих критерий (2), определится по формуле

$$u(k) = -(B^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} C H B + D)^{-1} B^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} C (H(A \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i C_{p+1}^i x(k-i) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} C_{p+1}^i x(k-i+1) + \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i C_{p+1}^i u(k-i)) - z(k)), \qquad (18)$$

где

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Закон управления (18) обладает глубиной памяти, равной $p+1$, и является динамическим. Для реализации (18) требуется задать начальные условия:

$$u(0) = u_0,\ u(1) = u_1,\ \ldots,\ u(p) = u_p.$$

В разделе 2.4. приводятся результаты вычислительного эксперимента. В п. 2.4.1. разработанный алгоритм применяется к задаче управления объектом 3-го порядка, а в п. 2.4.2. – к задаче управления запасами при не контролируемом спросе.

**В третьей главе** рассмотрены задачи фильтрации и экстраполяции для линейных дискретных систем с неизвестным постоянным возмущением. Постановка задачи описывается в разделе 3.1. Дискретная система задается следующими разностными уравнениями

$$x(k+1) = A(k)x(k) + f + q(k),\ x(0) = x_0, \qquad (19)$$

где $x(k) \in \mathrm{R}^n$ – вектор состояния; $A(k)$ – $(n \times n)$-матрица; $f$ – неизвестный постоянный вектор; $q(k)$ – гауссовская случайная последовательность с характеристиками:

$$\mathrm{M}\{q(k)\} = 0,\ \mathrm{M}\{q(k)q^{\mathrm{T}}(j)\} = Q(k)\delta_{k,j}.$$

Канал наблюдений задается формулой (5) с характеристиками (6). Для матриц $S(k)$ в (5) и $A(k)$ в (9) выполняются условия наблюдаемости. Случайный вектор $x_0$ не зависит от процессов $q(k)$ и $v(k)$, при этом

$$\mathrm{M}\{x(0)\} = \bar{x}_0,\ \mathrm{M}\{(x(0)-\bar{x}_0)(x(0)-\bar{x}_0)^{\mathrm{T}}\} = P_0.$$

В разделе 3.2. предлагается метод преобразования исходной модели, исключающий неизвестную постоянную составляющую возмущений.

Задача фильтрации для случая, когда матрицы $A, Q, V, S$ в описании объекта постоянные рассмотрена в разделе 3.3. Для переменных параметров модели задача фильтрации и экстраполяции рассмотрена в разделах 3.4 и 3.5. В этих разделах также обсуждается возможность применения, разработанных алгоритмов вычисления оценок фильтрации и экстраполяции для нестационарных управляемых объектов с неизвестной постоянной составляющей возмущений.

Алгоритм оптимальной фильтрации определяется следующей теоремой.

**Теорема 3.** Пусть процесс с неизвестным постоянным возмущением определяется уравнениями (19) и канала наблюдений описывается формулой (5). Тогда оптимальная несмещенная оценка вектора состояния определится следующими разностными уравнениями:

$$\begin{gathered}\hat{x}(k+1) = (A(k)+E_n)\hat{x}(k) - A(k-1)\hat{x}(k-1) + K_1(k)(y(k+1) - \\ -S(k+1)[(A(k)+E_n)\hat{x}(k) - A(k-1)\hat{x}(k-1)]\,.\end{gathered} \tag{20}$$

с начальными условиями

$$\hat{x}(0) = \bar{x}_0,\ \hat{x}(1) = \mathrm{M}\{x(1)\} = \bar{x}_1.$$

Матрица $K_1(k)$ в (20) определяется по формуле

$$K_1(k) = \tilde{p}_1(k)S(k+1)^{\mathrm{T}}(S(k+1)\tilde{p}_1(k)S(k+1)^{\mathrm{T}} + V(k+1))^{-1},$$

где матрица $\tilde{p}_1(k)$ определяется из системы уравнений:

$$\begin{gathered}\tilde{p}_1(k) = (A(k)+E_n)p_1(k)(A(k)+E_n)^{\mathrm{T}} - A(k-1)p_2(k)(A(k)+E_n)^{\mathrm{T}} - \\ -(A(k)+E_n)p_2^{\mathrm{T}}(k)A(k-1)^{\mathrm{T}} + A(k-1)p_3(k)A(k-1)^{\mathrm{T}} + Q(k-1)S(k)^{\mathrm{T}}K_1(k-1)^{\mathrm{T}}\times \\ \times(A(k)+E_n)^{\mathrm{T}} - Q(k-1)S(k)^{\mathrm{T}}K_2(k-1)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(k-1) + \\ +(A(k)+E_n)K_1(k-1)S(k)Q(k-1) - A(k-1)K_2(k-1)S(k)\times \\ \times Q(k-1) - (A(k)+E_n)Q(k-1) - Q(k-1)(A(k)+E_n)^{\mathrm{T}} + Q(k) + Q(k-1), \\ \tilde{p}_2(k) = p_1(k)(A(k)+E_n)^{\mathrm{T}} - p_2^{\mathrm{T}}(k)A(k-1)^{\mathrm{T}} + \\ +K_1(k-1)S(k)Q(k-1) - Q(k-1),\ \tilde{p}_3(k) = p_1(k), \\ p_1(k+1) = (E_n - K_1(k)S(k+1))\tilde{p}_1(k),\ p_1(0) = p_{1,0}, \\ p_2(k+1) = -K_2(k)S(k+1)\tilde{p}_1(k) + \tilde{p}_2(k),\ p_2(0) = p_{2,0}, \\ p_3(k+1) = -K_2(k)S(k+1)\tilde{p}_2^{\mathrm{T}}(k) + \tilde{p}_3(k),\ p_3(0) = p_{3,0}, \\ K_2(k) = \tilde{p}_2(k)S(k+1)^{\mathrm{T}}(S(k+1)\tilde{p}_1(k)S(k+1)^{\mathrm{T}} + V(k+1))^{-1}.\end{gathered} \tag{21}$$

В (21) начальные условия $p_{1,0}$, $p_{2,0}$, $p_{3,0}$, являются соответствующими блоками матрицы $\overline{P}_0$. Кроме того, для выполнения расчетов в (21) необходимо задать начальные условия для $K_1(-1)$ и $K_2(-1)$.

Алгоритм оптимальной экстраполяции определяется следующей теоремой.

**Теорема 4.** Пусть процесс с неизвестным постоянным возмущением определяется уравнениями (19) и каналом наблюдений (5). Тогда оптимальная несмещенная оценка экстраполяции на 1 такт определится следующими разностными уравнениями:

$$\hat{x}(k+1) = (A(k)+E_n)\hat{x}(k) - A(k-1)\hat{x}(k-1) + Kp_1(k)(y(k) - S(k)\hat{x}(k)) \tag{22}$$

с начальными условиями

$$\hat{x}(0) = \overline{x}_0,\ \hat{x}(1) = \mathrm{M}\{x(1)\} = \overline{x}_1.$$

Матрица $K_1(k)$ в (22) определяется по формуле

$$Kp_1(k) = [(A(k)-E_n)p_1(k) - A(k-1)p_2(k) - Q(k-1)]\times$$
$$\times S^{\mathrm{T}}(k)(S(k)p_1(k)S(k)^{\mathrm{T}} + V(k))^{-1},$$

где $p_1(k)$ находится из следующей системы уравнений:

$$p_1(k+1) = (A(k)-E_n - Kp_1(k)S(k))p_1(k)(A(k)-E_n-Kp_1(k)S(k))^{\mathrm{T}} -$$
$$-A(k-1)p_2(k)(A(k)-E_n-Kp_1(k)S(k))^{\mathrm{T}} - (A(k)-E_n-Kp_1(k)S(k))\times$$
$$\times p_2^{\mathrm{T}}(k)A^{\mathrm{T}}(k-1) + A(k-1)p_3(k)A^{\mathrm{T}}(k-1) + Kp_1(k)V(k)Kp_1^{\mathrm{T}}(k) +$$
$$-(A(k)-E_n-Kp_1(k)S(k))Q(k-1) - Q(k-1)(A(k)-E_n-Kp_1(k)S(k))^{\mathrm{T}} +$$
$$+Q(k)+Q(k-1),\ p_1(0) = p_{1,0},$$
$$p_2(k+1) = (E_n - Kp_2(k)S(k))p_1(k)(A(k)-E_n-Kp_1(k)S(k))^{\mathrm{T}} -$$
$$-(E_n-Kp_2(k)S(k))p_2^{\mathrm{T}}(k)A(k-1) - (E_n-Kp_2(k)S(k))Q(k-1) +$$
$$+Kp_2(k)V(k)Kp_1^{\mathrm{T}}(k),\ p_2(0) = p_{2,0},$$
$$p_3(k+1) = (E_n-Kp_2(k)S(k))p_1(k)(E_n-Kp_2(k)S(k))^{\mathrm{T}} +$$
$$+Kp_2(k)V(k)Kp_2^{\mathrm{T}}(k),\ p_3(0) = p_{3,0},$$
$$Kp_2(k) = p_1(k)S^{\mathrm{T}}(k)(S(k)p_1(k)S(k)^{\mathrm{T}} + V(k))^{-1}. \tag{23}$$

В разделе 3.6. приведены результаты вычислительного эксперимента для объекта со следующими значениями параметров:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,05 & 0,9 \end{pmatrix};\ Q = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,02 \end{pmatrix};\ V = 0,8;\ S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix};\ P_0 = \begin{pmatrix} 1,0 & 0 \\ 0 & 1,0 \end{pmatrix}.$$

Моделирование алгоритма фильтрации проводилось для неизвестного переменного возмущения с тремя возможными значениями для компонент вектора *f*:

$$f_1(k) = f_2(k) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \le k \le 9, \\ -1, & \text{если} \quad 9 < k < 25, \\ 1, & \text{если} \quad 25 \le k \le 50. \end{cases} \tag{24}$$

На рис.1, 2 приводятся реализации процессов и их оценок для фильтра (20), разработанного в диссертации, расширенного фильтра Калмана, построенного на основе метода расширения пространства состояний (к основной модели объекта добавляется модель ненаблюдаемого возмущения) и алгоритма двухэтапной фильтрации, который уменьшает вычислительные затраты за счет декомпозиции задачи.

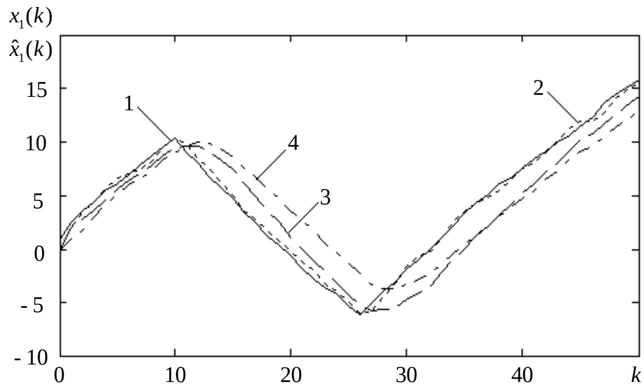


Рис 1. Реализации процессов для первой координаты (1 – реализация $x_1(k)$; 2 – оценка $\hat{x}_1(k)$, построенная по алгоритму (20); 3 – оценка $\hat{x}_1(k)$, построенная по двухэтапному алгоритму; 4 – оценка $\hat{x}_1(k)$ для расширенного фильтра Калмана)

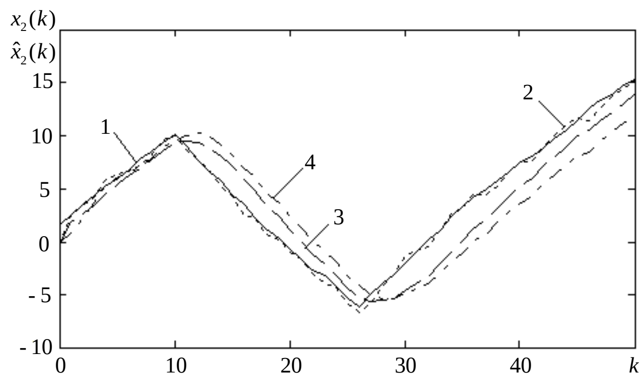


Рис 2. Реализации процессов для второй координаты (1 – реализация $x_2(k)$; 2 – оценка $\hat{x}_2(k)$, построенная по алгоритму (20); 3 – оценка $\hat{x}_2(k)$, построенная по двухэтапному алгоритму; 4 – оценка $\hat{x}_2(k)$ для расширенного фильтра Калмана)

Как видно из рисунков для рассмотренного примера, качество оценок, полученных с помощью фильтра (20) лучше, чем для двухэтапного алгоритма фильтрации и расширенного фильтра Калмана, использующих оценки неизвестного возмущения.

**В четвертой главе** рассмотрена задача локально-оптимального управления выходом при задержках в управлении и при косвенных наблюдениях за вектором возмущений, модель которого содержит неизвестные параметры.

В разделе 4.1. дана постановка задачи для следующей модели объекта:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k-h) + Fs(k)$$
$$x(0) = x_0,\ u(j) = \psi(j),\ j = -h, -h+1, \ldots, -1, \quad (25)$$

где $x(k) \in \mathrm{R}^n$ – вектор состояния; $u(k–h) \in \mathrm{R}^m$ – вектор управления; $h$ – количество тактов запаздывания; $s(k) \in \mathrm{R}^{n_1}$ – вектор возмущений $x_0$ и $\psi(j)$ ($j = –h, –h+1,…, –1$) – заданные векторы; $A$, $B$ и $F$ – заданные матрицы.

Предполагается, что модель возмущений содержит неизвестные параметры и определяется следующим разностным уравнением:

$$s(k+1) = R(\theta)s(k) + r(\theta) + q_s(k),\ s(0) = s_0, \quad (26)$$

где $\theta \in \mathrm{R}^p$ – неизвестный постоянный вектор, $R(\theta)$ – матрица, линейно зависящая от компонент вектора $\theta$, $r(\theta)$ – вектор, линейно зависящий от $\theta$. Предполагается, что имеется следующая априорная информация о векторе $\theta$:

$$\mathrm{M}\{\theta\} = \bar{\theta}_0,\ \mathrm{M}\{(\theta - \bar{\theta}_0)(\theta - \bar{\theta}_0)^{\mathrm{T}}\} = P_{\theta_0}.$$

Предполагается также, что имеются косвенные наблюдения за вектором возмущений

$$\omega(k) = \Phi s(k) + \tau(k), \quad (27)$$

где $\omega(k) \in R^{m_1}$– вектор наблюдений; $\Phi$ – ($m_1 \times n$)-матрица; $\tau(k)$ – случайные ошибки наблюдений; в (26) $s_0$ – случайный вектор начальных условий, независимый от $q_s(k)$, $\tau(k)$ ($\mathrm{M}\{s_0\} = \bar{s}_0$, $\mathrm{M}\{(s_0 - \bar{s}_0)(s_0 - \bar{s}_0)^{\mathrm{T}}\} = P_{S,0}$); $q_s(k)$, $\tau(k)$ – независимые гауссовские случайные последовательности с характеристиками:

$$\mathrm{M}\{q_s(k)\}=0,\ \mathrm{M}\{\tau(k)\}=0,\ \mathrm{M}\{q_s(k)q_s^{\mathrm{T}}(j)\}=Q_s\delta_{kj},\ \mathrm{M}\{\tau(k)\tau^{\mathrm{T}}(j)\}= \mathrm{T}\delta_{kj}.$$

Предполагается, что вектор $x(k)$ полностью доступен измерению. Требуется построить управление такое, чтобы вектор выхода системы $w(k) = Hx(k)$ отслеживал заданную траекторию $z(k) \in \mathrm{R}^n$.

Эта задача решается на основе оптимизации локального критерия

$$I(k) = \mathrm{M}\{(w(k+1) - z(k))^{\mathrm{T}} C(w(k+1) - z(k)) + u^{\mathrm{T}}(k-h)Du(k-h) / \Omega_0^k, X_0^k\}, \quad (28)$$

где $\Omega_0^k = \{\omega(0),\ \omega(1),\ \ldots,\ \omega(k)\}$, $X_0^k = \{x(0),\ x(1),\ \ldots,\ x(k)\}$.

В разделе 4.2. приводится алгоритм построения локально-оптимального управления при точном измерении возмущения.

В разделе 4.3. разработан алгоритм синтеза локально-оптимального управления при косвенных измерениях возмущений при условии, что модель возмущений известна полностью, а в разделе 4.4. – алгоритм локально-оптимального управления при косвенных измерениях возмущений, для случая, когда модель возмущений зависит от неизвестных постоянных параметров.

Для определения оценок параметров используется оптимальный дискретный фильтр Калмана. Учитывая (27), получим модель измерений в текущий момент времени $k-h$ в следующем виде:

$$\omega(k-h) = \Phi s(k-h) + \tau(k-h). \quad (29)$$

Тогда, с учетом (26), имеем

$$\omega(k-h)=\Phi R(\theta)s(k-h-1)+\Phi r(\theta)+\Phi q_s(k-h-1)+\tau(k-h). \tag{30}$$

Представим (29) в линейном относительно $\theta$ векторно-матричном виде

$$\omega(k-h)=\Gamma(s(k-h-1))\theta+g(s(k-h-1))+\Phi q_s(k-h-1)+\tau(k-h), \tag{31}$$

где $\Gamma(\cdot)$ – матрица и $g(\cdot)$ – вектор.

Рекуррентные уравнения, с помощью которых находятся оценки неизвестных параметров $\theta$, представляются в виде

$$\hat\theta(k-h)=\hat\theta(k-h-1)+K_\theta(k-h)(\omega(k-h)-\hat\Gamma\hat\theta(k-h-1)-\hat g),\ \theta(0)=\bar\theta_0, \tag{32}$$

$$K_\theta(k-h)=P_\theta(k-h)\hat\Gamma^{\mathrm T}(\hat\Gamma P_\theta(k-h)\hat\Gamma^{\mathrm T}+\Phi Q_s\Phi^{\mathrm T}+\mathrm T)^{-1}, \tag{33}$$

$$P_\theta(k-h+1)=(E-K_\theta(k-h)\hat\Gamma)P_\theta(k-h),\ P_\theta(0)=P_{\theta_0}. \tag{34}$$

где $\hat\Gamma=\Gamma(\hat s_f(k-h-1)),\ \hat g=g(\hat s_f(k-h-1))$.

Запишем уравнения, используемые для вычисления оценок фильтрации и прогноза:

$$\hat s_f(k-h)=\hat R\hat s_f(k-h-1)+\hat r+K_f(k-h)[\omega(k-h)-\Phi(\hat R\hat s_f(k-h-1)+\hat r)],\ \hat s_f(0)=\bar s_0,$$

$$K_f(k-h)=P(k-h/k-h-1)\Phi^{\mathrm T}(\Phi P(k-h/k-h-1)\Phi^{\mathrm T}+\mathrm T)^{-1},$$

$$P(k-h/k-h-1)=\hat RP(k-h-1)\hat R^{\mathrm T}+Q_s,$$

$$P(k-h)=(E-K_f(k-h)\Phi)P(k-h/k-h-1),\ P(0)=P_{S,0}.$$

$$\hat s_p(k-h+1)=\hat R\hat s_p(k-h)+\hat r+K_p(k-h)(\omega(k-h)-\Phi\hat s_p(k-h)),\ \hat s_p(0)=\bar s_0,$$

$$K_p(k-h)=\hat RP_{pr}(k-h)\Phi^{\mathrm T}(\Phi P_{pr}(k-h)\Phi^{\mathrm T}+\mathrm T)^{-1},$$

$$P_{pr}(k-h+1)=(\hat R-K_p(k-h)\Phi)P_{pr}(k-h)(\hat R-K_p(k-h)\Phi)^{\mathrm T}+Q_s+K_p(k-h)\mathrm TK_p^{\mathrm T}(k-h),$$

$$P_{pr}(0)=P_{S,0}.$$

$$\hat s_p(k-h+j)=\hat R\hat s_p(k-h+j-1)+\hat r,\ j=2,\ldots,h-1. \tag{35}$$

где $\hat R=R(\hat\theta(k-h)),\ \hat r=r(\hat\theta(k-h))$.

Управление объектом (25) определится по формуле

$$u_a(k-h)=-(B^{\mathrm T}H^{\mathrm T}CHB+D)^{-1}B^{\mathrm T}H^{\mathrm T}C(HA^{h+1}x(k-h)+\sum_{i=1}^{h}HA^iBu_a(k-h-i)+$$

$$+HA^hF\hat s_f(k-h)+\sum_{i=0}^{h-1}HA^iF\hat s_p(k-i)-z(k)). \tag{36}$$

Здесь оценки фильтрации и прогноза вычисляются по формулам (35), а для вычисления $\hat R$ и $\hat r$ используются оценки $\hat\theta(k)$ (формулы (32)).

В разделе 4.5. алгоритм управления применяется к задаче управления запасами.

Уравнения (25), (26) можно интерпретировать как модель изолированного склада и модель спроса. При этом $x(k)\in \mathrm R^n$ – вектор количества товара на складе в $k$-й такт ($x_i(k)$ – количество товара $i$-й номенклатуры), $u(k-h)\in \mathrm R^n$ – вектор заказа на поставки ($u_i$ – количество заказанного товара $i$-ой номенклатуры), $h$ – количество тактов запаздывания, $s(k) \in \mathrm{R}^n$ – вектор спроса в $k$-ом такте ($s_i(k)$ – спрос на товар $i$-й номенклатуры), $A = \mathrm{diag}(1-k_1,\ldots,\ 1-k_i,\ldots,1-k_n)$ ($k_i$ – коэффициенты потерь), $B = E_n$, $H = E_n$, $F = -E_n$.

Вектор поставок определяется с учетом дополнительных транспортных ограничений следующего вида (для поставок используется одно транспортное средство грузоподъемности $G_{\max}$):

$$\bar{u}_a(k-h) = \begin{cases} u_a(k-h), & \text{если} \quad G_{\min} \le G(u_a(k-h)) \le G_{\max}, \\ 0, & \text{если} \quad G(u_a(k-h)) < G_{\min}, \\ u_a(k-h)/\alpha(k-h), & \text{если} \quad G(u_a(k-h)) > G_{\max}. \end{cases} \tag{37}$$

Здесь $G(u_a(k)) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_{a,i}(k)$ – вес перевозимого груза ($p_i$ – вес единицы товара $i$-й номенклатуры); $u_a(k-h)$ – заказ на поставку (определяется по формулам (36)); $G_{\min} = K_{\text{г}} G_{\max}$ ($K_{\text{г}}$ – коэффициент использования грузоподъемности транспортного средства); $\alpha(k) = G_{\max} / G(u_a(k))$.

Дополнительно минимизируются издержки на хранение товара на заданном скользящем временном отрезке $k-h-N, k-h-N+1, \ldots, k-h$. Издержки определятся по формуле

$$J_{\text{изд}}(z, k-h) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=k-h-N}^{k-h} x_i(t) L_i \tag{38}$$

при ограничениях

$$x_i(j) \ge Xst_i, \quad j = k-h-N, k-h-N+1, \ldots, k-h, i = 1, 2, \ldots, n, \tag{39}$$

где $L_i$ – стоимость хранения единицы товара $i$ -й номенклатуры в единицу времени, $X\mathrm{st}_i$ – страховой запас для товара $i$ -й номенклатуры.

Минимизация критерия (38) при ограничениях (39) осуществляется по вектору $z$, при этом на каждом шаге пересчитывается вектор поставок. Найденное значение вектора $z^*$, обеспечивает минимальные издержки на временном интервале от $k-h-N$ до $k-h$ и, в результате выполнения ограничений (39), обеспечивает также высокую загруженность транспортного средства в соответствии с заданным коэффициентом $K_{\text{г}}$. По найденному вектору $z^*$ определяется объем поставок $\bar{u}_a(k-h+1)$, и далее, по аналогии, решается задача минимизации критерия $J_{\text{изд}}(z, k-h+1)$ при ограничениях (39) и определяется новый вектор $z^*$, который используется для определения поставок в момент времени $k-h+2$. Эта процедура повторяется требуемое число раз.

Моделирование системы управления запасами выполнено для двухноменклатурного склада ($n = 2$).

Исходные данные при моделировании:

$$x(0)=\begin{pmatrix}45\\40\end{pmatrix};\ u(-1)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\ s(0)=\begin{pmatrix}25\\10\end{pmatrix};\ \hat{s}_f(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\ \hat{s}_p(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix};\ R(\theta)=R=\begin{pmatrix}0&1\\0{,}1&0{,}5\end{pmatrix};\ r(\theta)=\begin{pmatrix}\theta_1\\\theta_2\end{pmatrix};\ Q_s=\begin{pmatrix}4{,}5&0\\0&1{,}5\end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}=\begin{pmatrix}1{,}5&0\\0&0{,}35\end{pmatrix};\ P_0=\begin{pmatrix}1{,}2&0\\0&1{,}4\end{pmatrix};\ P_{\theta_0}=\begin{pmatrix}10&0\\0&10\end{pmatrix};\ p=\begin{pmatrix}1{,}2\\1{,}3\end{pmatrix};\ k_1=0{,}005;\ k_2=0{,}001;$$

$$h=1;\ N=50;\ G_{\max}=150;\ K_{\text{г}}=0{,}8;\ L_1=1{,}5;\ L_2=2{,}5\ X\mathrm{st}_1=6;\ X\mathrm{st}_2=12.$$

В модели спроса использовались следующие значения параметров: $\theta_1=2{,}6,\ \theta_2=2{,}5.$

На рис. 3–5 приводятся результаты, полученные при оптимизации критерия (38) при ограничениях (39) на первом скользящем интервале.

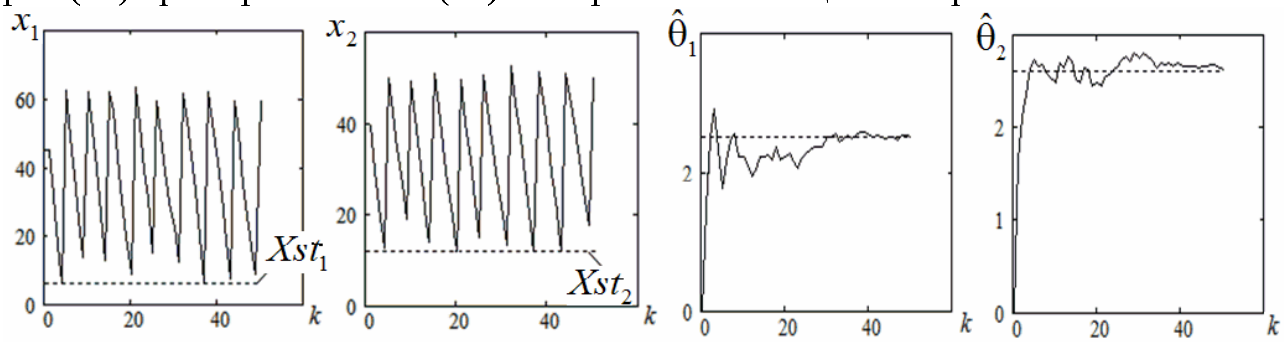


Рис. 3. Зависимость количества товаров на складе и реализации оценок параметров

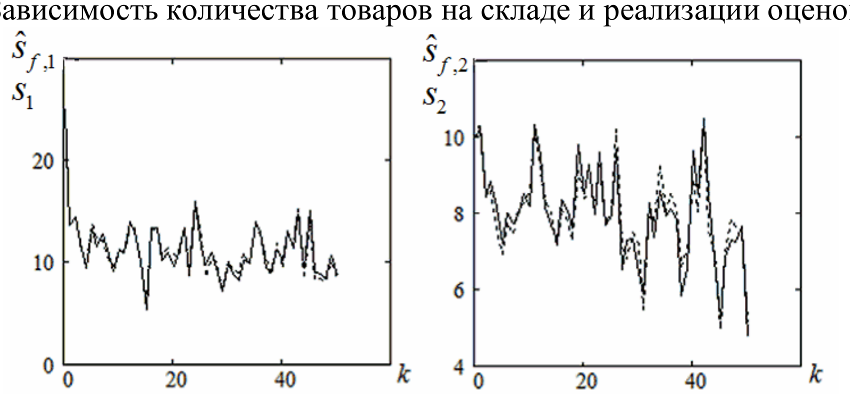


Рис. 4. Реализации спроса и оценок фильтрации

На рис. 4 приводятся графики изменения спроса (сплошная линия) и оценки фильтрации (пунктирная линия).

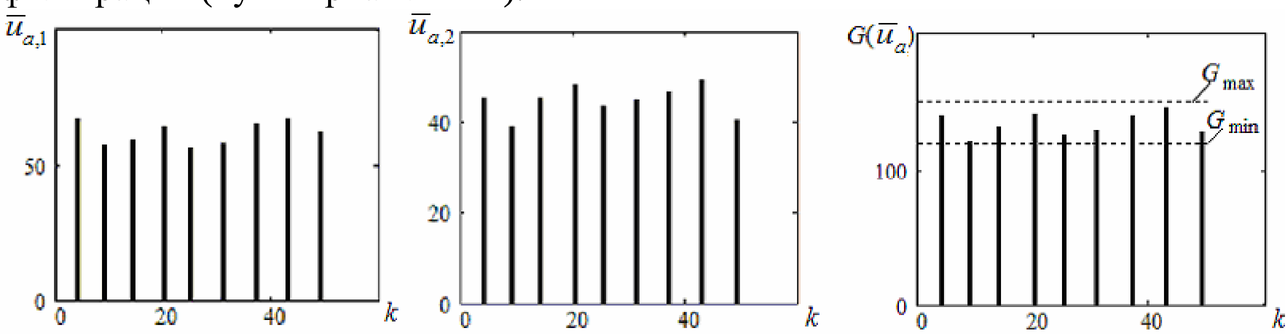


Рис. 5. Диаграммы заказов и загруженности транспортного средства

Результаты моделирования системы управления запасами подтверждают обеспечение высокой загруженности транспортного средства и минимум затрат на хранение товаров.

**В заключении** приведены основные результаты диссертационного исследования.

**В приложении** к диссертации приводится копия документа об использовании результатов диссертации в учебном процессе.

## Основные результаты работы

1. На основе оптимизации квадратичного локального критерия для дискретных объектов со случайными аддитивными и мультипликативными возмущениями с наблюдаемой детерминированной составляющей разработаны алгоритмы синтеза систем управления выходом объекта в условиях косвенных наблюдением за вектором состояния.
2. Разработан алгоритм синтеза систем управления выходом дискретного объекта с неизвестным возмущением полиномиального типа. Алгоритм управления имеет структуру динамической системы управления с глубиной памяти по состоянию объекта.
3. Разработаны алгоритмы синтеза дискретных оптимальных фильтров и экстраполяторов для линейных объектов, возмущения которых содержат неизвестную постоянную составляющую.
4. Разработан алгоритм синтеза локально-оптимальных управлений для объектов с запаздыванием в контуре управления при косвенных измерениях возмущений, модель которого содержит неизвестные параметры. Предложенный алгоритм не требует увеличения размерности вектора состояния, является динамическим и построен с использованием фильтров и экстраполятора.
5. Решены практические задачи управления запасами с учетом дополнительных ограничений и дополнительных критериев.

## ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

**1. Смагин С.В. Фильтрация в линейных дискретных системах с неизвестными возмущениями // Автометрия. 2009. – Т.45. – № 6. – С. 29–37.**

**2. Смагин С.В. Экстраполяция в линейных дискретных системах с неизвестными возмущениями // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. – № 2(11). – С. 90–95.**

**3. Смагин В.И., Смагин С.В. Управление запасами по двум критериям с учетом ограничений // Вестник Томского государственного университета. Математика, кибернетика, информатика. 2006. – № 290. – С. 244–246.**

**4. Смагин С.В. Управление выходом линейной дискретной системы с мультипликативными возмущениями // Вестник Томского государственного университета. Математика, кибернетика, информатика. 2006. – № 293. – С. 126–128.**

5. Смагин В.И., Смагин С.В. Минимизация затрат при переменном спросе в задаче управления запасами с учетом ограничений // Материалы VI Междунар. научно-технической конф. "ИКИ–2005", "Измерение, контроль, информатизация", Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2005. – С. 108–109.

6. Смагин С.В. Управление выходом дискретной динамической системы // Материалы X Всерос. научно-практической конф. "Научное творчество молодежи". Ч.1. Изд-во ТГУ, 2006. – С. 178–179.

7. Смагин С.В. Управление выходом дискретной системы с мультипликативными возмущениями // Материалы II Всерос. научно-практической конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. "Инноватика-2006", Изд-во ТГУ, 2006. – С. 114–115.

8. Смагин С.В. Динамические следящие системы управления выходом объекта при неизвестных возмущениях // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2008. – № 1(2). – С. 25–31.

9. Смагин В.И., Смагин С.В. Адаптивное управление запасами с учетом ограничений и транспортных запаздываний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2008. – № 3(4). – С. 19–26.

10. Смагин С.В. Дискретная фильтрация для объекта с неизвестными возмущениями // Материалы XII Всерос. научно-практической конф. "Научное творчество молодежи". Ч.1. Изд-во ТГУ, 2008. – С. 39–40.

11. Смагин С.В. Динамические следящие системы управления при неизвестных полиномиальных возмущениях // Тез. докл. VII Российской конф. с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных систем». Томск: Изд-во НТЛ, 2008. – С. 103.

12. Смагин С.В. Синтез динамических следящих систем управления по критерию со скользящим интервалом оптимизации при неизвестных возмущениях полиномиального типа // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. – № 1(6). – С. 5–13.