На правах рукописи

Гриншпон Ирина Эдуардовна

Определяемость абелевых групп своими голоморфами и подобие абелевых групп

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск 2010

Работа выполнена на кафедре алгебры ГОУ ВПО
"Томский государственный университет"

Научный руководитель доктор физико-математических наук, профессор А.Р. Чехлов

Официальные оппоненты доктор физико-математических наук, профессор Я.Н. Нужин

кандидат физико-математических наук, доцент И.Л. Фаустова

Ведущая организация ГОУ ВПО "Санкт-Петербургский государственный политехнический университет"

Защита состоится "27" декабря 2010 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.267.21 ГОУ ВПО "Томский государственный университет" по адресу: 634050, Томск, пр. Ленина, д. 36, корпус 2, ауд. 304.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ГОУ ВПО "Томский государственный университет" по адресу: 634050, Томск, пр. Ленина, д. 34а.

Автореферат разослан " " ноября 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета А.Н. Малютина

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Известно, что множество всех автоморфизмов алгебраической системы образует группу относительно операции умножения (композиции) автоморфизмов. Вопросы, связанные с изучением групп автоморфизмов алгебраических систем, занимают видное место в алгебре. В работах, посвященных этим вопросам, изучаются структурные свойства группы автоморфизмов, связь между группой автоморфизмов алгебраической системы и самой системой, а также конструкции, в которых используются группы автоморфизмов.

При исследовании свойств группы G и ее группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$ удобно рассматривать такую алгебраическую систему, в которую изоморфно вкладывались бы как сама группа G, так и группа ее автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$. Одной из таких систем является голоморф группы G — полупрямое расширение группы G с помощью группы ее автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$. Структурные свойства голоморфа, поведение групп G и $\mathrm{Aut}(G)$ в голоморфе дают информацию о свойствах группы и ее группы автоморфизмов.

В исследованиях по теории голоморфов абелевых групп сформулированы и решаются задачи, связанные как со свойствами самого голоморфа группы, так и со свойствами его подгрупп.

Совершенность голоморфов абелевых групп исследовалась в работах Д. Харви [41], В. Переманс [49], Ю. А. Гольфанда [10]. И. Х. Беккер в работах [1] и [2] нашел необходимые и достаточные условия совершенности голоморфа в некоторых классах абелевых групп.

Свойства голоморфов групп изучали Г. Миллер [45], В. Миллс [46], [47], Л. Редеи [51], Д. Харви [41], Дж. Клей [36], Ху Нао [42], [43], М. Д. Кузенний [21], А. В. Ягжев [34] и другие. Связь примитивных групп подстановок и голоморфов групп изучалась Р. И. Тышкевич [26]. Голоморфы полугрупп рассматривались в [17].

Среди вопросов, связанных с голоморфами абелевых групп, важное место занимает вопрос об определяемости группы своим голоморфом. Две группы называются *голоморфно изоморфными*, если голоморфы этих групп изоморфны. Говорят, что группа A *определяется своим голоморфом* в некотором классе групп $\mathfrak{A}$, если любая группа B из этого класса, голоморфно изоморфная группе A, изоморфна группе A. Известны примеры неизоморфных конечных

некоммутативных групп, голоморфы которых изоморфны [45]. Однако ситуация меняется при переходе к абелевым группам. В [46] В. Миллс показал, что всякая конечно порожденная абелева группа определяется своим голоморфом в классе всех конечно порожденных абелевых групп. Ряд интересных результатов о свойствах голоморфов абелевых групп и об определяемости абелевых групп своими голоморфами получен И. Х. Беккером [1] – [5].

Обзор некоторых результатов о голоморфах абелевых групп и определяемости абелевых групп своими относительными голоморфами приведен в [7]. В [8] доказано, что всякая смешанная μ-разложимая абелева группа с периодической группой автоморфизмов определяется своим голоморфом. Связь между определяемостью абелевой группы своим голоморфом и ее разложением в прямую сумму групп, индуцированным изоморфизмом голоморфов, установлена И. Х. Беккером в [5].

Пусть A и B — абелевы группы. В [9] гомоморфизм группы B в группу $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(B,A),A)$ вида $b \to \delta_b$, где $\delta_b\varphi = \varphi b$ ($b \in B$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(B,A)$) называется естественным гомоморфизмом. В [9] показывается, что задача об определяемости абелевой группы G своим голоморфом в некотором достаточно широком классе абелевых групп тесно связана с задачей о поиске для группы G таких прямых разложений $G = A \oplus B$, для которых $\mathrm{Hom}(A,B) = 0$, $\mathrm{Hom}(A,\mathrm{Hom}(B,A)) = 0$ и $B \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(B,A),A)$, причем изоморфизм естественный.

Обобщением понятия голоморфного изоморфизма является понятие почти голоморфного изоморфизма. Группы A и B называются *почти голоморфно изоморфными*, если каждая из них изоморфна нормальной подгруппе голоморфа другой группы. Понятно, что если две группы являются голоморфно изоморфными, то они почти голоморфно изоморфны. Обратное, вообще говоря, неверно. Почти голоморфно изоморфные конечно порожденные абелевы группы исследовались В. Миллсом в [46]. Почти голоморфно изоморфные абелевы p-группы изучались в [6] и [11].

Так как всякая вполне характеристическая подгруппа группы G является нормальной подгруппой голоморфа $\Gamma(G)$, то задача об изоморфизме почти голоморфно изоморфных групп является обобщением задачи об изоморфизме групп, почти изоморфных по вполне характеристическим подгруппам. Напомним, что две группы на-

зываются *почти изоморфными по подгруппам с некоторым свойством*, если каждая из них изоморфна подгруппе другой группы, обладающей этим свойством.

Задача об изоморфизме почти изоморфных абелевых групп привлекала внимание многих алгебраистов. В одной из тестовых проблем Капланского [44] ставится вопрос об изоморфизме абелевых групп, почти изоморфных по прямым слагаемым. Для счетных редуцированных p-групп эта проблема имеет положительное решение [44]. Однако в работе П. Кроули [38] приведен пример неизоморфных p-групп, каждая из которых изоморфна прямому слагаемому другой группы. Для групп без кручения примеры такого рода были построены А. Корнером [37] и Е. Сонсядой [52]. Изоморфизм абелевых групп, почти изоморфных по сервантным и вполне характеристическим подгруппам, исследуется в работах де Гроота [40], И. А. Приходько [24], С. К. Росошека [25], С. Я. Гриншпона [12], [15], А. И. Шерстневой [32], [33] и других авторов.

В ряде классов абелевых групп удобно ввести понятие подобия групп. Такое понятие целесообразно вводить в тех классах групп, для которых имеется некоторая естественная система инвариантов (в общем случае не являющаяся полной). Задача о подобии почти изоморфных абелевых групп представляет самостоятельный интерес и позволяет решить задачу об изоморфизме почти изоморфных групп в тех подклассах исследуемых классов, где рассматриваемая система инвариантов является полной.

Цель работы. Целью диссертационной работы является изучение голоморфно изоморфных и почти голоморфно изоморфных абелевых групп в связи с задачей определяемости абелевых групп своим голоморфом и исследование подобия почти изоморфных абелевых групп в некоторых классах p-групп и групп без кручения.

Общая методика исследования. В диссертации используются методы теории абелевых групп, теории голоморфов групп, а также некоторые теоретико-множественные идеи. В работе также используется понятие транзитивной абелевой группы без кручения, введенное П. А. Крыловым.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми. Основными результатами работы можно считать следующие.

- Найдены достаточные условия подобия абелевых p-групп, по-

чти изоморфных по широким и вполне характеристическим подгруппам.

- Выделены классы однородно разложимых групп без кручения, в которых из почти изоморфизма групп по вполне характеристическим подгруппам следует подобие этих групп.
- Исследованы свойства нормальных подгрупп голоморфов абелевых групп.
- Доказано, что всякая абелева группа без кручения с периодической группой автоморфизмов определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп.
- Доказано, что почти голоморфно изоморфные абелевы группы без кручения с конечными группами автоморфизмов изоморфны.
- Найдены необходимые и достаточные условия определяемости векторных групп своими голоморфами.
- Доказано, что любая группа из класса групп, состоящего из всех прямых произведений однородных групп с попарно несравнимыми типами, где каждая однородная компонента является вполне разложимой группой, определяется своим голоморфом в этом классе.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертационной работы имеют теоретическое значение и могут быть использованы в исследованиях по теории абелевых групп и модулей, а также при чтении спецкурсов для студентов старших курсов и аспирантов.

Апробация результатов. Результаты диссертационной работы докладывались на Международной конференции "Алгебра и ее приложения", посвященной 70-летию профессора В. П. Шункова и 75-летию профессора В. М. Бусаркина (Красноярск, 2002), на Международной конференции по математике и механике, посвященной 125-летию Томского государственного университета и 55-летию механико-математического факультета (Томск, 2003), на V Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения"(Тула, 2003), на Международной конференции "Алгебра, логика и кибернетика", посвященной 75-летию со дня рождения профессора А. И. Кокорина (Иркутск, 2004), на Всероссийских симпозиумах "Абелевы группы" (Бийск, 2005, 2006, 2010), на Международной конференции по алгебре и теории чисел, посвященной 80-летию профессора В. Е. Воскресенского (Самара, 2007),

на Международной конференции "Алгебра и ее приложения", посвященной 75-летию профессора В. П. Шункова (Красноярск, 2007), на Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша (Москва, 2008), на Всероссийской конференции по математике и механике, посвященной 130-летию Томского государственного университета и 60-летию механико-математического факультета (Томск, 2008). Основные результаты докладывались на семинарах кафедры алгебры Томского государственного университета.

По теме диссертации опубликовано 19 работ ([53]-[71]).

Структура и объем работы. Представленная диссертационная работа состоит из введения, списка обозначений, трех глав и списка литературы. Работа изложена на 91 странице. Библиография содержит 79 наименований.

Краткое содержание работы

Работа состоит из вводного параграфа и трех глав. Первая и вторая главы состоят из двух параграфов, третья — из трех.

В первой главе рассматривается подобие абелевых групп из некоторых классов. Во второй главе рассматриваются голоморфы абелевых групп и вопросы, связанные с определяемостью абелевых групп без кручения с конечными и периодическими группами автоморфизмов своим голоморфом. В третьей главе рассматриваются голоморфы векторных групп. Даются ответы на вопросы, связанные с определяемостью векторных групп своими голоморфами. Рассматриваются почти изоморфизм и подобие прямых произведений абелевых групп без кручения.

Первый параграф содержит основные определения и результаты, используемые в диссертации.

Во втором параграфе изучается связь между почти изоморфизмом (почти подобием) и подобием абелевых p-групп.

Известна важная роль инвариантов Ульма-Капланского в теории абелевых p-групп. В ряде классов абелевых p-групп они образуют полную и независимую систему инвариантов.

Абелевы p-группы A и B назовем *подобными*, если для всякого целого неотрицательного числа n их инварианты Ульма-Капланского $f_A(n)$ и $f_B(n)$ равны. Понятно, что если две абелевы p-группы изоморфны, то они подобны. Обратное не всегда верно, однако суще-

ствуют широкие классы абелевых p-групп, в которых подобие влечет изоморфизм. Одним из таких классов является класс периодически полных (замкнутых) групп, изучавшийся Л. Я. Куликовым ([22]).

При исследовании абелевых p-групп большое значение имеют широкие подгруппы, которые определяются следующим образом: подгруппа L абелевой p-группы A называется *широкой подгруппой*, если L — вполне характеристическая подгруппа группы A и $L+B=A$ для любой базисной подгруппы B группы A ([28, С. 18]).

Абелевы p-группы назовем *почти подобными по широким подгруппам*, если каждая из них подобна широкой подгруппе другой группы.

Последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ кардинальных чисел называется *сильно зависимой*, если существует возрастающая последовательность целых неотрицательных чисел $i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots$, отличная от последовательности всех целых неотрицательных чисел, расположенных в естественном порядке, такая что при $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполняются равенства: $a_k = \sum\limits_{i=i_k}^{i_{k+1}-1} a_i$, причем, если $i_0 = 0$ и m — наименьшее натуральное число, не являющееся членом последовательности $i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots$, то при выполнении условия $a_m \geqslant \aleph_0$ в последовательности $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ должна существовать хотя бы одна пара не равных между собой чисел ([15]).

Основным результатом второго параграфа является теорема.

Теорема 2.1. *Пусть G — абелева p-группа, удовлетворяющая одному из трех условий:*

1) редуцированная часть группы G ограничена;

2) существует такое бесконечное кардинальное число α, что $f_G(i) = \alpha$ для всякого целого неотрицательного числа i;

3) последовательность $f_G(0), f_G(1), \ldots, f_G(n), \ldots$ не является сильно зависимой.

Тогда всякая абелева p-группа H, почти подобная группе G по широким подгруппам, подобна группе G.

С помощью теоремы 2.1 устанавливаются такие результаты.

Следствие 2.2. *Пусть G — абелева p-группа, удовлетворяющая одному из трех условий 1), 2), 3) теоремы 2.1. Тогда всякая абелева p-группа H, почти изоморфная группе G по широким подгруппам, подобна группе G.*

Следствие 2.3. *Пусть G — сепарабельная p-группа, удовлетво-*

ряющая одному из трех условий 1), 2), 3) теоремы 2.1. Тогда всякая абелева p-группа H, почти изоморфная группе G по вполне характеристическим подгруппам, подобна группе G.

В третьем параграфе рассматривается подобие почти изоморфных однородно разложимых абелевых групп без кручения.

При изучении абелевых групп без кручения большое значение имеют понятия характеристики и типа элемента.

Пусть $\mathbb{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$ — множество всех простых чисел, занумерованных в порядке возрастания. Если A — абелева группа без кручения и $a \in A$, то *характеристикой* $\chi_A(a)$ элемента a в группе A называется такая последовательность $\chi = (k_1,\, k_2,\, \ldots,\, k_n,\, \ldots)$, в которой каждое k_i есть p_i-высота элемента a в группе A ([28, с. 129]).

Класс эквивалентности в множестве характеристик называется *типом*. Если характеристика элемента a абелевой группы без кручения A принадлежит типу $\mathbf{t}$, то говорят, что элемент a имеет тип $\mathbf{t}$ ([28, с. 131]).

Тип $\mathbf{t}$ называется *p_n-делимым* ($p_n \in \mathbb{P}$), если для всякой характеристики $\chi = (k_1,\, k_2,\, \ldots,\, k_n,\, \ldots)$, принадлежащей типу $\mathbf{t}$ имеем $k_n = \infty$.

Условимся считать, что нулевой группе соответствует тип $\mathbf{t}^{(0)}$ (несобственный тип), который обладает следующими свойствами:
1) $\mathbf{t}^{(0)} < \mathbf{t}$ для всякого типа $\mathbf{t}$, отличного от $\mathbf{t}^{(0)}$;
2) $\mathbf{t} \pm \mathbf{t}^{(0)} = \mathbf{t}^{(0)}$ для всякого типа $\mathbf{t}$.

Пусть множество типов M содержит несобственный тип $\mathbf{t}^{(0)}$ и каждому типу $\mathbf{t}$, отличному от $\mathbf{t}^{(0)}$, поставлено в соответствие некоторое кардинальное число $n_M(\mathbf{t})$. Такое множество типов вместе с указанным соответствием называется *отмеченным множеством типов*.

Пусть M_1 и M_2 — два отмеченных множества типов. Говорят, что сюръективное отображение $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ является *отмеченным отображением*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varphi(\mathbf{t}) \leqslant \mathbf{t}$ для всякого $\mathbf{t} \in M_1$;

2) если $\varphi(\mathbf{t}) \neq \mathbf{t}^{(0)}$, то φ сохраняет символы ∞ (то есть в характеристиках типов $\mathbf{t}$ и $\varphi(\mathbf{t})$ символы ∞ стоят на одних и тех же местах);

3) если $\varphi(\mathbf{t}_2) \neq \mathbf{t}^{(0)}$ и $\mathbf{t}_1 > \mathbf{t}_2$ $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in M_1)$, то $\varphi(\mathbf{t}_1) > \varphi(\mathbf{t}_2)$ и $\varphi(\mathbf{t}_1) - \varphi(\mathbf{t}_2) \geqslant \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2$;

4) $n_{M_2}(\mathbf{t}) = \sum\limits_{\varphi(\mathbf{t}')=\mathbf{t}} n_{M_1}(\mathbf{t}')$ для всякого $\mathbf{t} \in M_2 \setminus \{\mathbf{t}^{(0)}\}$.

Абелева группа без кручения, все ненулевые элементы которой имеют один и тот же тип $\mathbf{t}$, называется *однородной группой типа* $\mathbf{t}$ ([28, с. 130-131]). Прямая сумма однородных групп называется *однородно разложимой группой.*

Всякую однородно разложимую группу A можно записать в виде: $A = \bigoplus\limits_{\mathbf{t}\in T} A_{\mathbf{t}}$ (T — некоторое множество типов), $A_{\mathbf{t}}$ — однородная группа типа $\mathbf{t}$

Пусть A и B — однородно разложимые группы, $A = \bigoplus\limits_{\mathbf{t}\in T} A_{\mathbf{t}}$, $B = \bigoplus\limits_{\mathbf{t}\in T_1} B_{\mathbf{t}}$, где T и T_1 — некоторые множества типов, $A_{\mathbf{t}}$ и $B_{\mathbf{t}}$ — однородные компоненты типа $\mathbf{t}$ групп A и B соответственно. Группы A и B назовем *подобными*, если $T = T_1$ и $r(A_{\mathbf{t}}) = r(B_{\mathbf{t}})$ для всякого типа $\mathbf{t} \in T$.

Семейство групп без кручения $\{A_i\}_{i\in I}$ называется *вполне транзитивным*, если для любых двух групп A_{i_1} и A_{i_2} (i_1 может совпадать с i_2), принадлежащих этому семейству, из того, что $\chi_{A_{i_1}}(a) \leqslant \chi_{A_{i_2}}(b)$, где $a \in A_{i_1}$, $b \in A_{i_2}$, следует существование гомоморфизма $\eta \in \mathrm{Hom}(A_{i_1}, A_{i_2})$ такого, что $\eta(a) = b$ ([16]).

Абелева группа без кручения A называется *вполне транзитивной*, если семейство $\{A\}$ — вполне транзитивно, то есть для любых двух элементов a и b группы A таких, что $\chi(a) \leqslant \chi(b)$ существует эндоморфизм η группы A, для которого $\eta(a) = b$. Вполне транзитивные группы, как группы "насыщенные" эндоморфизмами, играют большую роль в теории абелевых групп (см., например, [13], [16], [18], [19], [20], [29], [30], [31], [35], [39], [50]).

Однородно разложимая группа $A = \bigoplus\limits_{\mathbf{t}\in T} A_{\mathbf{t}}$ называется *вполне транзитивно разложимой*, если семейство групп $\{A_{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in T}$ вполне транзитивно ([16]).

Класс вполне транзитивно разложимых групп достаточно широк. Он содержит все вполне разложимые абелевы группы без кручения, все прямые суммы однородных сепарабельных или однородных алгебраически компактных абелевых групп без кручения, все абелевы группы без кручения вида $A = \bigoplus\limits_{p\in\mathbb{P}_1} C_p \oplus \bigoplus\limits_{\mathbf{t}\in T} D_{\mathbf{t}}$, где C_p — прямая сумма абелевых групп без кручения, полных в своей p-адической топологии, $D_{\mathbf{t}}$ — однородная сепарабельная группа типа $\mathbf{t}$ ($\mathbb{P}_1$ —

некоторое множество простых чисел, T — некоторое множество типов), $T \cap \{\mathbf{t}(C_p)\}_{p\in\mathbb{P}_1} = \emptyset$ и другие группы.

Пусть $G = \bigoplus\limits_{\mathbf{t}\in T} G_{\mathbf{t}}$ — вполне транзитивно разложимая группа. Обозначим через T^* множество $T \cup \{\mathbf{t}^{(0)}\}$. Будем рассматривать T^* как отмеченное множество типов, где $n_{T^*}(\mathbf{t})$ при $\mathbf{t} \in T^*$ — это ранг группы $G_{\mathbf{t}}$.

Основными результатами третьего параграфа являются следующие теоремы.

Теорема 3.2. *Пусть $G = \bigoplus\limits_{\mathbf{t}\in T} G_{\mathbf{t}}$ — вполне транзитивно разложимая группа и верна следующая импликация:*

(*) если M — отмеченное множество типов, для которого найдется пара отмеченных отображений $\varphi : T^* \to M$ и $\psi : M \to T^*$, то $M = T^*$ и $n_M(\mathbf{t}) = n_{T^*}(\mathbf{t})$ для всякого $\mathbf{t} \in T$.

Тогда, если группа A почти изоморфна группе G по вполне характеристическим подгруппам, то A — однородно разложимая группа, подобная группе G.

Пусть $\mathbb{P}(\mathbf{t}) = \{p_n \in \mathbb{P} |$ тип $\mathbf{t}$ p_n-делим$\}$.

С помощью теоремы 3.2 получены следующие результаты.

Теорема 3.3 *Пусть $G = \bigoplus\limits_{\mathbf{t}\in T} G_{\mathbf{t}}$ — вполне транзитивно разложимая группа и для всякой возрастающей последовательности $\mathbf{t}_1 < \mathbf{t}_2 < \ldots < \mathbf{t}_n < \ldots$ типов из T, у которой $\mathbb{P}(\mathbf{t}_1) = \mathbb{P}(\mathbf{t}_2) = \ldots = \mathbb{P}(\mathbf{t}_n) = \ldots$, выполняется по крайней мере одно из двух условий:*

1) $r(G_{\mathbf{t}_i}) < r(G_{\mathbf{t}_{i+1}})$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$;

2) $2\mathbf{t}_{l+1} < \mathbf{t}_l + \mathbf{t}_{l+2}$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$.

Если группа A почти изоморфна группе G по вполне характеристическим подгруппам, то A — однородно разложимая группа, подобная группе G.

Из этой теоремы вытекают такие результаты.

Для всякого типа $\mathbf{t}$ обозначим через $M_{\mathbf{t}}$ следующее множество типов: $M_{\mathbf{t}} = \{\mathbf{t}' \in T |\, \mathbf{t}' > \mathbf{t}, \mathbb{P}(\mathbf{t}') = \mathbb{P}(\mathbf{t}), r(G_{\mathbf{t}'}) = r(G_{\mathbf{t}})\}$.

Следствие 3.4. *Пусть $G = \bigoplus\limits_{\mathbf{t}\in T} G_{\mathbf{t}}$ — вполне транзитивно разложимая группа, $M_{\mathbf{t}}$ — конечное множество для всякого типа $\mathbf{t} \in T$. Если группа A почти изоморфна группе G по вполне характеристическим подгруппам, то A — однородно разложимая группа, подобная группе G.*

Следствие 3.5. *Пусть G — вполне транзитивно разложимая группа конечного ранга. Если группа A почти изоморфна группе G по вполне характеристическим подгруппам, то A — однородно разложимая группа конечного ранга, подобная группе G.*

Следствие 3.6. *Пусть G — вполне разложимая группа без кручения конечного ранга. Всякая группа A, почти изоморфная группе G по вполне характеристическим подгруппам, изоморфна группе G.*

Голоморфом $\Gamma(G)$ группы G называется полупрямое расширение группы G с помощью группы ее автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$. Группу $\Gamma(G)$ можно рассматривать как множество всех упорядоченных пар $(g,\, \varphi)$, где $g \in G$, $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ с групповой операцией определенной по правилу: $(g,\, \varphi)+(h,\, \psi) = (g+\varphi h,\, \varphi\psi)$ для любых элементов $(g,\, \varphi)$, $(h,\, \psi) \in \Gamma(G)$ (хотя в общем случае голоморф абелевой группы является некоммутативной группой для задач, рассматриваемых в диссертационной работе, удобна аддитивная запись операции в голоморфе). Нейтральным элементом в $\Gamma(G)$ является элемент $(0,\, \varepsilon)$ (ε — тождественный автоморфизм группы G), а элементом, противоположным элементу $(g,\, \varphi)$ — элемент $(-\varphi^{-1}g,\, \varphi^{-1})$. Элементы вида $(g,\, \varepsilon)$ образуют в голоморфе $\Gamma(G)$ нормальную подгруппу, изоморфную группе G, а элементы вида $(0,\, \varphi)$ — подгруппу, изоморфную группе $\mathrm{Aut}(G)$. Будем отождествлять эти подгруппы с группами G и $\mathrm{Aut}(G)$ соответственно, и часто вместо записи элементов группы $\Gamma(G)$ в виде $(g,\, \varepsilon)$ и $(0,\, \varphi)$ будем просто писать g и φ соответственно.

В четвертом параграфе рассматриваются нормальные подгруппы голоморфов абелевых групп, исследуются их свойства.

Пусть S — нормальная подгруппа группы $\Gamma(G)$. Обозначим через S_1, Φ — множества всех первых, вторых компонент элементов группы S соответственно. S_1 — характеристическая подгруппа группы G, Φ — нормальная подгруппа группы $\mathrm{Aut}(G)$ ([47]).

В четвертом параграфе доказан следующий результат.

Предложение 4.4. *Пусть S — нормальная абелева подгруппа голоморфа абелевой группы G без элементов порядка 2. Тогда*

1) для любых элементов $g \in S_1$ и $\varphi \in \Phi$ выполняется

$$\varphi g = g;$$

2) S_1 содержится в централизаторе подгруппы S в группе $\Gamma(G)$, то есть $S_1 \subset Z_{\Gamma(G)}(S)$.

С помощью установленных в четвертом параграфе свойств нормальных подгрупп голоморфов абелевых групп доказывается, что всякая делимая абелева группа без кручения определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп (следствие 4.10) и показывается, что при исследовании голоморфного изоморфизма (почти голоморфного изоморфизма) абелевых групп без кручения можно ограничиться редуцированными группами (теорема 4.8, следствие 4.9).

В пятом параграфе рассматриваются голоморфно изоморфные и почти голоморфно изоморфные абелевы группы без кручения, группы автоморфизмов которых периодические (в частности, конечные). Исследуются нормальные подгруппы голоморфов таких групп.

Всякая периодическая абелева группа с периодической группой автоморфизмов является конечной группой. Применяя основной результат работы [47], получаем, что всякая периодическая абелева группа с периодической группой автоморфизмов определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп. Для некоторых смешанных абелевых групп с периодической группой автоморфизмов был получен аналогичный результат ([7]). Для абелевых групп без кручения с периодической группой автоморфизмов вопрос об их определяемости своим голоморфом оставался открытым.

В пятом параграфе для таких групп вопрос об их определяемости своим голоморфом решен положительно.

Теорема 5.4 *Всякая абелева группа без кручения с периодической группой автоморфизмов определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп.*

Доказана теорема об изоморфизме почти голоморфно изоморфных вполне разложимых групп без кручения с конечными группами автоморфизмов.

Теорема 5.10. *Пусть G и H – почти голоморфно изоморфные вполне разложимые группы без кручения. Если группы* $\mathrm{Aut}(G)$ *и* $\mathrm{Aut}(H)$ *конечны, то группы G и H изоморфны.*

В пятом параграфе получено также полное описание вполне разложимых групп с периодическими (конечными) группами автоморфизмов (предложение 5.8, следствие 5.9).

В шестом параграфе исследуется вопрос об определяемости векторных групп своими голоморфами. Приводятся определения Г-разложения и полухарактеристического разложения, описываются

свойства Г-разложений редуцированной векторной группы.

Пусть голоморфы абелевых групп без кручения G и H изоморфны. Группа G', как образ группы H при этом изоморфизме, является максимальной абелевой нормальной подгруппой голоморфа $\Gamma(G)$. Группа G' голоморфно разложима, то есть $G' = G_1 \oplus \Phi$, где G_1, Φ — соответственно множества всех первых, вторых компонент группы G' и подгруппа G_1 выделяется прямым слагаемым в группе G, то есть $G = G_1 \oplus G_2$.

Разложение $G = G_1 \oplus G_2$ группы G, индуцированное изоморфизмом голоморфов групп G и H, назовем Г-*разложением.* Разложение $G = A \oplus B$ группы G назовем A-*полухарактеристическим* (*полухарактеристическим*), если подгруппа A — характеристическая подгруппа группы G, а подгруппа B не является характеристической подгруппой группы G.

Пусть $G = \prod\limits_{i \in I} G_i$, где $r(G_i) = 1$ для всякого $i \in I$, то есть G — векторная группа, $G = G_1 \oplus G_2$ – некоторое ее Г-разложение, $G_1 = \prod\limits_{\alpha \in I_1} G_\alpha$, $G_2 = \prod\limits_{\beta \in I_2} G_\beta$, где $I_1 \cup I_2 = I$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ ([48]). Обозначим

$$I_1' = \{\alpha \in I_1 \mid \mathrm{Hom}(G_2, G_\alpha) \neq 0\},$$
$$I(\alpha) = \{\beta \in I_2 \mid t(G_\beta) \leqslant t(G_\alpha)\}.$$

Получено описание свойств Г-разложений векторной группы.

Теорема 6.1. Г-*разложение векторной группы* $G = G_1 \oplus G_2$, *мощность которой неизмерима, обладает свойствами:*

1) $\mathrm{Hom}(G_1, G_2) = 0$*;*

2) $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(G_2, G_1), G_1) \cong G_2$*;*

3) Множество I_1' *— конечно (* $I_1' = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$*);*

4) Если $r(G_2) < \aleph_0$ *(*$I_2 = \{\beta_1, \beta_1, ..., \beta_m\}$*) , то для любой группы* G_{β_s} *(*$\beta_s \in I_2$*) существует единственная группа* G_{α_k} *(*$\alpha_k \in I_1'$*) такая, что* $\mathrm{Hom}(G_{\beta_s}, G_{\alpha_k}) \neq 0$ *и для любого простого числа* p *группа* G_{α_k} p*-делима тогда и только тогда, когда* p*-делима группа* $\prod\limits_{\beta \in I(\alpha_k)} G_\beta$.

Найдены условия определяемости векторных групп своим голоморфом.

Теорема 6.2. *Векторная группа* G*, мощность которой неизмерима, определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп тогда и только тогда, когда она удовлетворяет одному из условий:*

1) G имеет только тривиальные Γ-разложения;

2) для любого нетривиального Γ-разложения группы $G = G_1 \oplus G_2$ ранг группы G_2 конечен и существует такая биекция η множества I_2 на себя, что $\mathrm{Hom}(G_\beta, G_\alpha) \cong G_{\eta(\beta)}$ для некоторого $\alpha \in I_1'$.

Следствие 6.3. *Векторная группа G, мощность которой неизмерима, определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп, если она удовлетворяет одному из условий:*

а) группа G не имеет полухарактеристических разложений;

б) для любого G_1-полухарактеристического разложения $G = G_1 \oplus G_2$ группы G, удовлетворяющего свойствам 1) – 4) теоремы 6.1, существует такая биекция η множества I_2 на себя, что $\mathrm{Hom}(G_\beta, G_\alpha) \cong G_{\eta(\beta)}$ для некоторого $\alpha \in I_1'$.

В седьмом параграфе исследуются свойства типов элементов нормальных абелевых подгрупп голоморфов абелевых групп без кручения.

Обозначим через $T(G)$ множество типов элементов группы без кручения G.

Получены такие результаты.

Теорема 7.2. *Пусть S – нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$ абелевой группы без кручения G и S_1 — множество первых компонент элементов группы S. Тогда*

1) для любого типа $\mathbf{t} \in T(S)$ существует тип $\mathbf{t}' \in T(S_1)$, такой что $\mathbf{t}' \geqslant \mathbf{t}$.

2) для любого типа $\mathbf{t} \in T(S)$ существует тип $\mathbf{t}'' \in T(G \cap S)$, такой что $\mathbf{t}'' \geqslant \mathbf{t}$.

Теорема 7.3. *Пусть G и H — почти голоморфно изоморфные абелевы группы без кручения, G — однородная группа, а группа H обладает свойством: для любых элементов $b_1, b_2 \in H$ таких, что $\mathbf{t}(b_1)$ сравним с $\mathbf{t}(b_2)$ имеем $\mathbf{t}(b_1) = \mathbf{t}(b_2)$. Тогда H — однородная группа и $\mathbf{t}(G) = \mathbf{t}(H)$.*

Следствие 7.4. *Если G и H — однородные почти голоморфно изоморфные группы, то $\mathbf{t}(G) = \mathbf{t}(H)$.*

Теорема 7.5. *Пусть $G = \prod\limits_{\mathbf{t} \in T_1} G_{\mathbf{t}}$, $H = \prod\limits_{\overline{\mathbf{t}} \in T_2} H_{\overline{\mathbf{t}}}$, где $G_{\mathbf{t}}$ и $H_{\overline{\mathbf{t}}}$ — однородные группы типов $\mathbf{t}$ и $\overline{\mathbf{t}}$ соответственно, T_1 и T_2 — множества, состоящие из попарно несравнимых типов. Если G и H — почти голоморфно изоморфные группы, то $T_1 = T_2$.*

Абелева группа без кручения G называется *транзитивной*, если

для любых двух элементов $a, b \in G$ таких, что $\chi(a) = \chi(b)$ существует автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ такой, что $b = \varphi a$ ([18]).

Пусть $G = \prod\limits_{\mathbf{t} \in T_1} G_{\mathbf{t}}$, $H = \prod\limits_{\mathbf{t} \in T_2} H_{\mathbf{t}}$ — прямые произведения однородных групп $G_{\mathbf{t}}$ и $H_{\mathbf{t}}$ соответственно, T_1 и T_2 — некоторые множества типов.

Группы G и H называются *подобными*, если $T_1 = T_2$ и для всякого типа $\mathbf{t} \in T_1$ ранг $r(G_{\mathbf{t}})$ группы $G_{\mathbf{t}}$ равен рангу $r(H_{\mathbf{t}})$ группы $H_{\mathbf{t}}$.

В восьмом параграфе рассматриваются абелевы группы без кручения, разложимые в прямые произведения однородных транзитивных групп. Устанавливается, когда из почти голоморфного изоморфизма таких групп следует их подобие.

Основными результатами этого параграфа являются такие теоремы.

Теорема 8.1. *Пусть* $G = \prod\limits_{\mathbf{t} \in T_1} G_{\mathbf{t}}$, $H = \prod\limits_{\mathbf{t} \in T_2} H_{\mathbf{t}}$, *где* $G_{\mathbf{t}}$ $(\mathbf{t} \in T_1)$ *и* $H_{\mathbf{t}}$ $(\mathbf{t} \in T_2)$ *— транзитивные однородные группы и множества* T_1 *и* T_2 *состоят из попарно несравнимых типов. Если группы* G *и* H *почти голоморфно изоморфны, то они подобны.*

Теорема 8.2. *Пусть* $G = \prod\limits_{\mathbf{t} \in T_1} G_{\mathbf{t}}$, $H = \prod\limits_{\bar{\mathbf{t}} \in T_2} H_{\bar{\mathbf{t}}}$, *где* $G_{\mathbf{t}}$ $(\mathbf{t} \in T_1)$ *и* $H_{\bar{\mathbf{t}}}$ $(\bar{\mathbf{t}} \in T_2)$ *— однородные вполне разложимые группы и множества* T_1 *и* T_2 *состоят из попарно несравнимых типов. Если группы* G *и* H *почти голоморфно изоморфны, то они изоморфны.*

Пусть $\mathfrak{A}$ — класс групп, состоящий из всех прямых произведений однородных групп с попарно несравнимыми типами, каждая однородная компонента которых является вполне разложимой.

Следствие 8.3. *Всякая группа из класса* $\mathfrak{A}$ *определяется своим голоморфом в этом классе.*

Автор искренне благодарит научного руководителя профессора Андрея Ростиславовича Чехлова за внимание к моей научной работе и помощь в оформлении диссертации.

Список литературы

1. Беккер И.Х. О голоморфах абелевых групп // Сиб. матем. ж. – 1964. – т. 5. – N 6. – С. 1228–1238.

2. Беккер И.Х. О голоморфах нередуцированных абелевых групп // Изв. Вузов. – 1968. – N 8. – С. 3–8.

3. Беккер И.Х. О голоморфах абелевых групп без кручения // Изв. вузов. Математика. – 1974. – N 3. – С. 3-13.

4. Беккер И.Х. Абелевы группы с изоморфными голоморфами // Изв. вузов. Математика – 1975. – N 3. – С. 97-99.

5. Беккер И.Х. Абелевы голоморфные группы // Межд. конф. Всесибирские чтения по матем. и мех. Избранные доклады. Т. 1. Математика. – Томск: Изд-во ТГУ, 1997. – С. 43-47.

6. Беккер И.Х. Почти голоморфно изоморфные примарные абелевы группы / И.Х. Беккер, С.Я. Гриншпон // Группы и модули. Межвузовский тематический сборник научных трудов – 1976. – С. 90–103.

7. Беккер И.Х. Автоморфизмы абелевых групп без кручения. / И.Х. Беккер, С.Ф. Кожухов. – Томск: Изд-во ТГУ, 1988. – 167 с.

8. Беккер И.Х. О группах с изоморфными голоморфами / И.Х. Беккер, В.Н. Недов // Матем. заметки – 1997. – Т. 62, вып. 3. – С. 343–350.

9. Беккер И.Х. Об определяемости абелевой группы своим голоморфом в классе всех абелевых групп / И.Х. Беккер, В.Н. Недов // Фундамент. и прикл. матем. – 2002. – Т. 8, вып. 1. – С. 17-25.

10. Гольфанд Ю.А. О группе автоморфизмов голоморфа группы // Матем. сб. – 1950. – Т. 27, N 3. – С. 333-350.

11. Гриншпон С.Я. Почти голоморфно изоморфные абелевы группы // Труды ТГУ. Вопросы математики. – 1975. – Т. 220, вып. 3. – С. 78-84.

12. Гриншпон С.Я. Примарные абелевы группы, эквивалентные по вполне характеристическим подгруппам // Абелевы группы и модули. – 1979. – С. 29-36.

13. Гриншпон С.Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Томск. – 1982. – С. 56-92.

14. Гриншпон С.Я. Вполне характеристические подгруппы сепарабельных абелевых групп // Фундамент. и прикл. матем. – 1998. – Т. 4, N 4. – С. 1281-1307.

15. Гриншпон С.Я. f.i.-корректные абелевы группы // Успехи матем. наук. – 1999. – N 6. – С. 155-156.

16. Гриншпон С.Я. Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // Фундамент. и прикл. матем. – 2002. – Т. 8, вып. 2. – С. 407-473.

17. Закусило А.И. Вінцеві голоморфи напівгрупп // Дисс. канд. физ.- мат. наук. Киевский гос. университет им. Т. Шевченко. – 2008.

18. Крылов П.А. О вполне характеристических подгруппах абеле-

вых групп без кручения // Сб. аспирантских работ по матем. Томск: Томск. ун-т. – 1973. – С. 15-20.

19. Крылов П.А. Сильно однородные абелевы группы без кручения // Сиб. матем. ж. – 1983. – N 2. – С. 77-84.

20. Крылов П.А. Некоторые примеры квазисервантно инъективных и транзитивных абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. – 1988. – вып. 7. – С. 81-99.

21. Кузенний М.Д. О некоторых соотношениях в голоморфах групп порядка p^2 и p^3 // Доповіді АН УРСР. – 1973. – А. – N 12. – С. 1079-1083.

22. Куликов Л.Я. К теории абелевых p-групп произвольной мощности // Матем. сб. – 1945. – N 9. – С. 165-182.

23. Плоткин Б.И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. – Наука. 1966. – 603 С.

24. Приходько И.А. E-корректные абелевы группы // Абелевы группы и модули. – 1984. – С. 90-100.

25. Росошек С.К. Строго чисто корректные абелевы группы без кручения // Абелевы группы и модули. – 1979. – С. 143-150.

26. Тышкевич Р.И. О примитивных группах подстановок и голоморфах групп // Известия АН БССР, сер. физ.-мат. наук. – 1971. – N 1. – С. 14-21.

27. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1 – М.: Мир, 1974. – 335 с.

28. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2 – М.: Мир, 1977. – 416 с.

29. Чехлов А.Р. О разложимых вполне транзитивных группах без кручения // Сиб. матем. ж. – 2001. – Т. 42, N 3. – С. 714-719.

30. Чехлов А.Р. Вполне транзитивные группы без кручения конечного p-ранга // Алгебра и логика. – 2001. – Т. 40, N 6. – С. 698-715.

31. Чехлов А.Р. Об одном классе эндотранзитивных групп // Матем. заметки – 2001. – Т. 69, N 6. – С. 944-949.

32. Шерстнева (Ботыгина) А.И. Абелевы p-группы с конечными инвариантами Ульма-Капланского, почти изоморфные по вполне характеристическим подгруппам / А.И. Шерстнева (Ботыгина), С.Я. Гриншпон // Вестник Томского ун-та. – N 269. – Январь 2000. – С. 51-55.

33. Шерстнева (Ботыгина) А. И. U-последовательности и почти изоморфизм абелевых p-групп по вполне характеристическим под-

группам // Изв. ВУЗов. Матем. – 2001. – N 5. – С. 72-80.

34. Ягжев А.В. О локально нильпотентных подгруппах голоморфа абелевой группы // Матем. заметки. – 1989. – Т. 46, N 6. – С. 118.

35. Arnold D.M. Strongly homogeneous torsion free abelian groups of finite rank // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – V. 56. – P. 67-72.

36. Clay James R. Completeness of relative holomorphs of abelian groups // Rocky Mount. J. Math. – 1980. – V. 10, N 4. – P. 731-741.

37. Corner A. L. Every countable reduced torsion free ring is an endomorphism ring // Proc. London Math. Soc. – 1963. – V. 52. – P. 687-710.

38. Crawly P. Solution of Kaplansky's test problem for primary abelian groups // J. Algebra. – 1965. – N 4. – P. 413-431.

39. Grinshpon S.Ya. Fully invariant subgroups, full transitivity and homomorphism groups of abelian groups / S.Ya. Grinshpon, P.A. Krylov // Journal Math. Sciences. – 2005. – V. 128, N 3. – P. 2894-2997.

40. de Groot J. Equivalent abelian groups // Canad. J. Math. – 1957. – N 9. – P. 291-297.

41. Harvey J. Complete holomorphs // Pacif. J. Math. – 1961. – V. 11. – P. 961-970.

42. Hsu Nao-chao. The group of automorphisms of the holomorph oh a group // Pacif. J. Math. – 1961. – V. 11. – P. 999-1012.

43. Hsu Nao-chao. The holomorphs of free abelian groups of finite rank // Amer. Math. Mount. – 1965. – V. 72. – P. 754-756.

44. Kaplansky I. Infinite abelian groups. – Michigan: Univ. of Michigan Press, Ann. arbor, 1954. – 91 p.

45. Miller G.A. On the multiple holomorph of a group // Math. Ann. – 1908. – V. 66. – P. 133-142.

46. Mills W.H. Multiple holomorphs of finitely generated abelian groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1950. – V. 71, N 3. – P. 379-392.

47. Mills W.H. On the non-isomophism of certain holomorphs // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – V. 74. – P. 428-443.

48. O'Neill J.D. Direct summands of vector groups // Acta. Math. Hung. – 1990. – V. 55, N 3-4. – P. 207-209.

49. Peremans W. Completeness of holomorphs // Indagationes math. – 1957. – V. 19, N 5. – P. 608-619.

50. Reid J.D. Quasi-pure injectivity and quasi-pure projectivity // Lect. Notes Math. – 1977. – V. 616. – P. 219-227.

51. Redei L. The Holomorphentheorie für Gruppen und Ringe // Acta Math. Hung. – 1954. – V. 5. – P. 169-195.

52. Sasiada E. Negative solution of I. Kaplansky first test problem for abelian groups and a problem of K. Borsuk concerning cohomology groups // Bull. Acad. Sci. Math. Aston. Phys. – 1961. – N 5. – P. 331-334.

Работы автора по теме диссертации

53. Гриншпон И.Э. Полные прямые суммы абелевых групп без кручения ранга 1 с изоморфными голоморфами // Материалы 5 научной конф. по мат. и мех. ч.1. Томск. – 1975. – С. 75.

54. Гриншпон И.Э. Полные прямые суммы групп без кручения ранга 1 с изоморфными голоморфами // Группы и модули. Томск. – 1976. – С. 103-108.

55. Гриншпон И.Э. Подобие однородно разложимых групп // Междунар. конф. "Алгебра и ее приложения". Тезисы докладов. Красноярск. – 2002. – С. 40-41.

56. Гриншпон И.Э. Почти изоморфизм однородно разложимых групп // Тезисы докладов V Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Тула. – 2003. – С. 84-85.

57. Гриншпон И.Э. Подобные сепарабельные p-группы и почти изоморфизм / И.Э. Гриншпон, С.Я. Гриншпон // Междунар. конф. по математике и механике. Тезисы докладов. Томск. – 2003. – С. 39. – (авторский вклад 50 %)

58. Гриншпон И.Э. Подобие абелевых p-групп // Междунар. конф. по математике и механике. Избранные доклады. Томск. – 2003. – С. 13-18.

59. Гриншпон И.Э. Подобие однородно разложимых групп // Вестник ТГУ. Серия Математика, Кибернетика, Информатика. – 2003. – N 280. – С. 24-26.

60. Гриншпон И.Э. Подобие абелевых групп // Материалы междунар. конф "Алгебра, логика и кибернетика". Иркутск. – 2004. – С. 27-28.

61. Grinshpon I.E. Almost Isomorphic Torsion Free Abelian Groups and Similarity of Homogeneously Decomposable Groups / S.Ya. Grinshpon, I.E. Grinshpon, A.I. Sherstneva // Acta Appl. Math. – 2005. – V. 85. – P. 147-156. – (авторский вклад 40 %)

62. Гриншпон И.Э. Голоморфы вполне разложимых групп без

кручения и векторных групп // Абелевы группы. Труды Всероссийского симпозиума. Бийск. – 2005. – С. 11-13.

63. Гриншпон И.Э. Голоморфно изоморфные векторные группы // Абелевы группы. Материалы Всероссийского симпозиума. Бийск. – 2006. – С. 14-16.

64. Гриншпон И.Э. Голоморфы абелевых групп // Междунар. конф. по алгебре и теории чисел. Тезисы докладов. – Самара. – 2007. – С. 12-13.

65. Гриншпон И.Э. Определяемость векторных групп своими голоморфами // Вестник Томского гос. ун-та. – 2007. – N 298. – С. 111-113.

66. Гриншпон И.Э. Нормальные подгруппы голоморфов абелевых групп и почти голоморфный изоморфизм // Фундамент. и прикл. матем. – 2007. – Т. 13, N 3. – С. 9-16.

67. Гриншпон И.Э. Определяемость абелевых групп без кручения своим голоморфом // Междунар. конф. "Алгебра и ее приложения". Тезисы докладов. Красноярск. – 2007. – С. 42-43.

68. Гриншпон И.Э. Об определяемости одного класса групп своим голоморфом // Междунар. алгебр. конф., посвященная 100-летию А. Г. Куроша. МГУ. Тезисы докладов. Москва. – 2008. – С. 75-76.

69. Гриншпон И.Э. О подобии почти голоморфно изоморфных прямых произведений групп без кручения // Вестник Томского гос. ун-та. – 2008. – N 2(3). – С. 31-38.

70. Гриншпон И.Э. Голоморфы прямых произведений однородных групп // Всероссийская конф. по матем. и мех. Тезисы докладов. Томск. – 2008. – С. 38-39.

71. Grinshpon I.E. Normal subgroups of Holomorphs of Abelian groups and almost Holomorphic isomorphism // Journal of Mathematical Sciences. – 2008. – V. 154, N 3. – P. 284-289.