На правах рукописи

Пономарева Мария Андреевна

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕДЛЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Томск – 2011

Работа выполнена на кафедре математической физики ГОУ ВПО «Томский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник **Якутенок Владимир Альбертович**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Воеводин Анатолий Федорович**

доктор физико-математических наук, профессор **Бубенчиков Алексей Михайлович**

Ведущая организация: ФГУП «ФЦДТ «Союз», г. Дзержинский, Московской обл.

Защита состоится **3 июня 2011 г. в 14-30 часов** на заседании диссертационного совета Д 212.267.13 при ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, НИИ прикладной математики и механики, ауд. 242.

Отзывы направляются по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 34а.

Автореферат разослан 26 апреля 2011г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор технических наук Ю.Ф. Христенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена решению фундаментальных и прикладных задач о течении вязкой жидкости со свободной поверхностью в приближении ползущего течения. Основой численных исследований рассматриваемых течений является гранично-интегральная методика расчета.

Актуальность темы. В ряде случаев гидродинамические процессы, происходящие при изготовлении изделий с использованием различных технологий, представляют собой медленные течения вязкой жидкости со свободной поверхностью в присутствии твердых стенок. Наиболее эффективным, с точки зрения информативности и экономичности, для их исследования является применение методов математического моделирования, основанных на численном решении соответствующих задач. Данный подход используется в настоящей работе для изучения процессов растекания вязкой жидкости по твердой стенке, потери устойчивости струй, натекающих на твердую стенку, движения вязкой жидкости в вертикальном массопроводе с конической вставкой («диафрагмой») и заполнения пресс-форм с центральным телом при малых числах Рейнольдса. Такого вида течения характерны для методов изготовления изделий из вязкотекучих композиций, в частности, при производстве крупногабаритных зарядов ракетных двигателей на твердом топливе методом свободного литья. Исследование вышеуказанных течений, реализующихся на различных стадиях изготовления зарядов, позволяет прогнозировать протекание технологического процесса с целью выявления причин появления дефектов в готовом изделии. Таким образом, является актуальным создание эффективных вычислительных алгоритмов, позволяющих рассчитывать сложную эволюцию свободной поверхности жидкости, и исследование ее поведения при протекании гидродинамических процессов наиболее часто встречающихся в природе и производстве.

Цели и задачи исследований

- формулировка задач о растекании вязкой жидкости по твердой стенке, о потере устойчивости струи, натекающей на твердую стенку, о течении вязкой жидкости в массопроводе с конической вставкой («диафрагмой») и о заполнении пресс-форм с центральным телом при малых числах Рейнольдса;
- создание вычислительных алгоритмов решения поставленных задач;
- исследование особенностей и основных закономерностей соответствующих течений вязкой жидкости со свободной поверхностью.

Научная новизна работы

1. На основе непрямого варианта метода граничных элементов разработана вычислительная методика расчета медленных течений вязкой жидкости с меняющейся во времени свободной поверхностью в присутствии твердых границ, позволяющая учитывать влияние поверхностного натяжения и эффектов смачивания.

2. С использованием данного вычислительного подхода проведено численное моделирование растекания объемов вязкой жидкости по горизонтальной твердой поверхности и получены основные характеристики процесса растекания в широком диапазоне изменения числа Бонда и равновесного краевого угла. Сравнение с аналитическим решением в приближении теории смазки, а также сопоставление получаемых равновесных форм с формами, построенными на основе решения уравнений равновесия, подтвердило эффективность предложенной методики.

3. Предложен способ определения коэффициента поверхностного натяжения и угла смачивания, основанный на численном расчете равновесной формы капли, предполагающий использование всего двух наиболее просто определяемых по изображению капли параметров – высоты ее вершины и радиуса пятна контакта с подложкой.

4. В результате исследования процесса потери устойчивости струи высоковязкой жидкости, натекающей на твердую горизонтальную поверхность, получена зависимость от соотношения вязких и гравитационных сил критической высоты сливного отверстия над твердой стенкой, при превышении которой происходит потеря устойчивости струи, выражающаяся в ее периодическом изгибании. Выявлен режим течения, характеризующийся затухающими колебаниями.

5. Описаны особенности течения вязкой жидкости в вертикальном массопроводе, содержащем конструктивный элемент типа «диафрагма», и течения, реализующегося при заполнения пресс-форм при наличии центрального формующего стержня. Выявлены режимы, при которых возможно появление дефектов по монолитности в получаемых изделиях, на указанных стадиях реализации метода свободного литья.

Достоверность результатов следует из корректности математических постановок задач, из внутренних проверок используемого метода (проверка аппроксимационной сходимости и выполнения законов сохранения), а также из согласования с известными данными экспериментальных и численных исследований, и существующими аналитическими решениями.

Практическая ценность. Полученные результаты и созданные программы расчета могут использоваться при численном моделировании течений вязкой жидкости со свободной поверхностью, контактирующей с твердыми стенками, для прогнозирования протекания процесса формования в технологии изготовления изделий методом свободного литья, а также для определения коэффициента поверхностного натяжения жидкостей и угла смачивания.

Работа выполнялась в рамках грантов РФФИ (проекты № 06-08-00107а, 08-08-00064а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (ГК № П474 от «4» августа 2009г., № П848 от «18» августа 2009г., № 14.740.11.0533 от «01» октября 2010г.), договоров с ФГУП «ФЦДТ «Союз» (х/д №175 от 04.02.2008г., х/д № 1037 от 04.02.2010).

Основные положения, выносимые на защиту

1. Вычислительный алгоритм расчета медленных течений вязкой жидкости со свободной поверхностью, базирующийся на непрямом методе граничных элементов, включающий учет действия сил поверхностного натяжения, эффектов смачивания и значительных деформаций свободной поверхности.
2. Результаты численного исследования растекания объема вязкой жидкости под действием силы тяжести и сил поверхностного натяжения, в том числе с учетом смачиваемости подложки.
3. Способ определения коэффициента поверхностного натяжения и угла смачивания по изображению капли с использованием всего двух наиболее просто измеряемых геометрических параметров границы капли – высоты ее вершины и радиуса пятна контакта.
4. Результаты численного моделирования процесса потери устойчивости струи вязкой жидкости, натекающей на твердую горизонтальную стенку.
5. Результаты численного исследования течения вязкой жидкости в массопроводе с конструктивным элементом типа «диафрагма» и заполнения пресс-форм с центральным телом, реализующихся в технологии изготовления изделий методом свободного литья.

Личный вклад автора заключается в написании литературных обзоров, в формулировке задач, разработке вычислительных алгоритмов их решения и программ расчета, в проведении соответствующих расчетов, в анализе полученных результатов и их сопоставлении с известными данными.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались и обсуждались на 12-ой Международной конференции «Математические модели физических процессов» (Таганрог, 2007), IV и V

Всероссийских конференциях молодых ученых «Физика и химия высокоэнергетических систем» (Томск, 2008-2009), 3-й Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Бийск, 2008), VI Всероссийской научной конференции, посвященной 130-летию Томского государственного университета и 40-летию НИИ ПММ ТГУ «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики» (Томск, 2008), XII Всероссийской конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Наука и образование» (Томск, 2008), IV Всероссийской конференции молодых ученых «Материаловедение, технологии и экология в 3-м тысячелетии» (Томск, 2009), VII Международной конференции студентов и молодых учёных «Перспективы развития фундаментальных наук» (Томск, 2010), научной конференции «Байкальские чтения: наноструктурированные системы и актуальные проблемы механики сплошной среды (теория и эксперимент)» (Улан-Удэ, 2010), Всероссийской конференции «Нелинейные волны: теория и новые приложения» (Новосибирск, 2011), VII Всероссийской конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики», посвященной 50-летию полета Ю.А. Гагарина и 90-летию со дня рождения основателя и первого директора НИИ ПММ ТГУ А.Д. Колмакова (Томск, 2011).

Публикации. Основные результаты представлены в журналах «Известия РАН. Механика жидкости и газа», «Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования», «Вестник ТГУ. Математика и механика» и «Известия ВУЗов. Физика».

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка используемой литературы. Работа изложена на 159 страницах, содержит 83 рисунка и 10 таблиц, список литературы включает 168 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении раскрывается актуальность и практическая значимость математического моделирования медленных течений вязкой жидкости со свободной поверхностью в присутствии твердых стенок, в особенности процессов растекания и смачивания. Отмечены значительные трудности, связанные с моделированием движения линии трехфазного контакта (ЛТФК) по твердой стенке. Сформулированы цель и основные задачи исследований.

В первой главе освещены основные проблемы и достижения в области исследования процессов растекания и смачивания. Сформулирована математическая постановка задачи о растекании

объема вязкой жидкости по твердой горизонтальной поверхности в приближении ползущего течения, включающая уравнения движения и уравнение неразрывности, записанные в безразмерных переменных

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}_{ij}}{\partial x_j} = 0, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \qquad i, j = 1, 2, \tag{1}$$

где $\tilde{\Pi}_{ij} = -\tilde{p}\delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}$ – компоненты преобразованного тензора напряжений, $\tilde{p} = p + \mathrm{Bo}x_2$ – модифицированное давление, δ_{ij} – символ Кронекера, компоненты тензора скоростей деформаций определяются по формуле $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, u_i – компоненты вектора скорости, x_i – декартовы координаты, p – давление, число Бонда Bo = $\rho g R^2/\sigma$ характеризует отношение силы тяжести и сил поверхностного натяжения, ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, R – радиус круга, эквивалентного по площади рассматриваемому сечению, σ – коэффициент поверхностного натяжения. В качестве характерных масштабов длины, давления (напряжений), скорости и времени использованы, соответственно, следующие величины: R; $P = \sigma/R$; $U = \sigma/\mu$; $T = R\mu/\sigma$, μ – динамический коэффициент вязкости.

Граница области решения Γ включает свободную поверхность Γ_1 и твердые стенки Γ_2. Динамическое граничное условие на свободной поверхности заключается в отсутствии касательных напряжений и равенстве нормальных напряжений давлению Лапласа

$$\tilde{t}_i = \tilde{\Pi}_{ij} n_j = -\left(\kappa + \mathrm{Bo}x_2\right) n_i, \; x_i \in \Gamma_1, \tag{2}$$

где $\tilde{t}_i$ – компоненты усилий на свободной поверхности, κ – кривизна поверхности, n_i – компоненты внешней нормали. На твердых стенках задаются условия прилипания

$$u_i = 0, \; x_i \in \Gamma_2. \tag{3}$$

Движение точек свободной поверхности осуществляется с использованием кинематического условия

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i, \; x_i \in \Gamma_1. \tag{4}$$

В предельном случае при Bo → ∞ жидкость растекается только под действием силы тяжести, силы поверхностного натяжения не учитываются. В качестве характерных масштабов используются величины R, $P = \rho g R$, $U = \rho g R^2/\mu$, $T = \mu/\rho g R$. Модифицированное давление $\tilde{p} = p + x_2$. Вместо (2) на свободной поверхности

выполняется $\tilde{t}_i = -x_2 n_i$. Такой выбор характерных масштабов позволяет получить автомодельное решение задачи.

В начальный момент времени форма границы задавалась в виде окружности или прямоугольника. Последнее использовалось только для исследования поведения касательных напряжений на стенке. Скорости в начальный момент времени $u_i = 0$.

Для учета эффектов смачивания необходимо записать граничные условия, которые будут выполняться на ЛТФК вместо условий прилипания. Движущую силу, действующую на ЛТФК при ограниченном смачивании, можно представить в виде [1]

$$\Delta\sigma = (\sigma_1 - \sigma_2) - \sigma\cos\theta_d ,$$

где σ_1, σ_2 – коэффициенты поверхностного натяжения жидкость/тв. тело, тв. тело/газ, θ_d – динамический краевой угол. Данная величина представляет собой равнодействующую трех сил, действующих на ЛТФК, и равна нулю только, если поверхность раздела приобрела равновесную форму. С учетом уравнения Юнга [1] получаем

$$\Delta\sigma = \sigma(\cos\theta - \cos\theta_d) , \qquad (5)$$

где θ – равновесный краевой угол. В безразмерных переменных выражение (5) примет вид

$$\Delta\sigma = \cos\theta - \cos\theta_d . \qquad (6)$$

Таким образом, в случае значения θ отличного от 180° на ЛТФК используется условие непротекания совместно с заданием касательного напряжения, отвечающего действию движущей силы (6).

Описан алгоритм получения решения, основанный на непрямом варианте метода граничных элементов [2], который удобно применять для решения плоских задач гидродинамики при наличии свободной поверхности, являющийся в настоящее время мощным альтернативным методом вычисления, по сравнению с конечно-разностным и конечно-элементным методами, в которых определенную сложность составляет процесс построения разностных сеток, способных адаптироваться к сложным изменениям свободной поверхности. Система дифференциальных уравнений (1) заменяется эквивалентной ей системой граничных интегральных уравнений

$$u_i(x_0) = \int_\Gamma U_{ij}(x_0,\xi)\varphi_j(\xi)d\Gamma(\xi), \quad t_i(x_0) = \int_\Gamma T_{ij}(x_0,\xi)\varphi_j(\xi)d\Gamma(\xi), \qquad (7)$$

где x_0 – точка наблюдения, принадлежащая Г, ξ – точка приложения нагрузки, $U_{ij}(x_0,\xi)$, $T_{ij}(x_0,\xi)$ – фундаментальные сингулярные решения линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса для компонент скоростей и усилий, соответственно, $\varphi_j(\xi)$ – интенсивность фиктивных источников, которая определяется в соответствии с граничными

условиями $u_i(x_0)$ и $t_i(x_0)$. Для получения численного решения уравнений (7) граница области решения разбивается на N прямолинейных отрезков (элементов), вдоль которых функция $\varphi_j(\xi)$ считается постоянной, тогда (7) в дискретизированной форме примут вид

$$u_i(x_0^p) = \sum_{q=1}^{N} \varphi_j(\xi^q) \underbrace{\int_{\Delta\Gamma^q} U_{ij}(x_0^p, \xi^q) d\Gamma(\xi^q)}_{\Delta U_{ij}^{pq}}, \quad t_i(x_0^p) = \sum_{q=1}^{N} \varphi_j(\xi^q) \underbrace{\int_{\Delta\Gamma^q} T_{ij}(x_0^p, \xi^q) d\Gamma(\xi^q)}_{\Delta T_{ij}^{pq}}$$

где ξ^q – координата q-го элемента, $\Delta\Gamma^q$ – q-ый элемент. Запишем эту систему уравнений в матричной форме

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_i^p \\ t_i^p \end{pmatrix}}_{2N\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta U_{ij}^{pq} \\ \Delta T_{ij}^{pq} \end{pmatrix}}_{2N\times 2N} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_j^q \end{pmatrix}}_{2N\times 1}. \qquad (8)$$

Система уравнений (8) решается стандартным методом Гаусса с выбором главного элемента.

Для вычисления новой формы свободной границы в соответствии с (4) используется схема Эйлера $x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta t \cdot u_i^n$, где n – номер шага по времени, Δt – шаг по времени, величина которого ограничена условием Куранта $\Delta t \le k\Delta\Gamma_{min}/|u_{max}|$. Здесь $\Delta\Gamma_{min}$ – длина наименьшего элемента, а u_{max} – значение наибольшей скорости, которая достигается на каком-либо из элементов, $k < 1$ – коэффициент, определяемый с помощью численного эксперимента для обеспечения устойчивости вычислительного процесса.

Особенность вычислительного алгоритма, в случае учета смачивания заключается в следующем. Для учета условия (6) на ЛТФК на элементе q_{CL}, расположенном на твердой стенке и примыкающем к ЛТФК, задаются граничные условия вида

$$t_1 = \frac{\Delta\sigma}{\Delta s_{q_{CL}}}, \; u_2 = 0, \text{ где } \Delta s_{q_{CL}} \text{ – длина элемента } q_{CL}.$$

Представлены результаты численного исследования процесса растекания. Эволюция свободной поверхности в процессе растекания для малых чисел Во иллюстрируется рис. 1. Расчет прекращается при достижении свободной поверхностью равновесной формы. На этом же рисунке показаны траектории маркеров (фактически краев граничных элементов). Видно, что движение свободной границы носит характер накатывания на твердую стенку, подобно движению «тракторной гусеницы» или развертывающемуся ковру. При этом, расчетное значение краевого угла, вычисляемого по положению примыкающего к твердой стенке граничного элемента, близко к 180°.

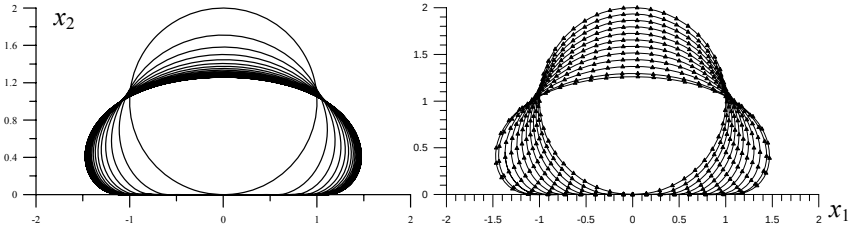

Рисунок 1 – Последовательность форм свободной поверхности:
Bo = 2, θ = 180° (Δt = 0.2).

Анализ зависимости касательных напряжений на твердой стенке от времени показывает, что в процессе растекания напряжения уменьшаются и равномерно распределяются вдоль стенки. В конце процесса они равны нулю. Таким образом, в случае несмачиваемой подложки, когда движение ЛТФК происходит в режиме накатывания, для решения уравнений движения можно использовать условия прилипания. Использование условий прилипания в случае больших значений числа Бонда приводит к некоторым, вычислительным трудностям, пути решения которых указаны в работе. Результаты одного из расчетов представлены на рис. 2.

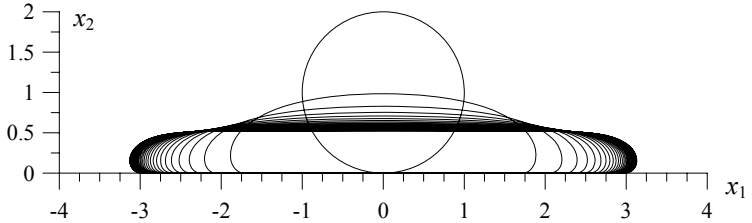

Рисунок 2 – Последовательность форм свободной поверхности
Bo = 15, θ = 180° (Δt = 0.5).

На рис. 3 представлена зависимость положения ЛТФК от времени в случае растекания цилиндрического объема вязкой жидкости без учета сил поверхностного натяжения. Значительные отличия между расчетной кривой и аналитическим решением, полученным в приближении теории смазки (пунктирная кривая) наблюдаются только на начальном этапе процесса растекания, когда пленочная модель течения является достаточно грубым приближением.

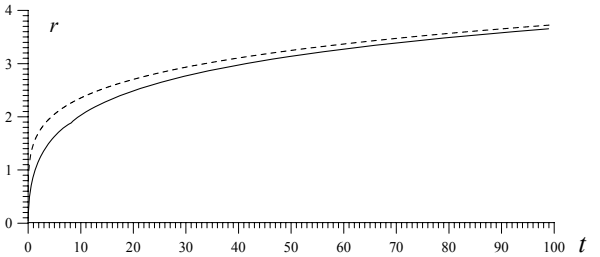

Рисунок 3 – Зависимость положения ЛТФК r от времени при Bo → ∞ (сплошная линия) и сравнение с [3] (пунктирная линия).

Результаты расчетов в условиях ограниченного смачивания для θ отличных от 180° представлены на рис. 4. Получены зависимости динамического краевого угла от времени, которые приведены в работе.

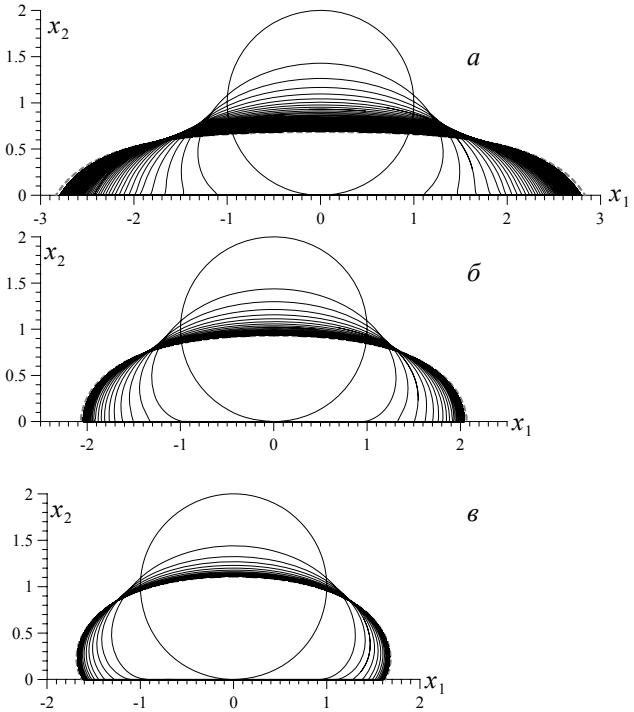

Рисунок 4 – Последовательность форм свободной поверхности для Bo = 2, Δt = 1: *а* – θ = 60°: *б* – θ = 90°; *в* – θ = 120° (пунктирные линии – равновесные формы – решения уравнений равновесия).

Изложена методика построения равновесных форм капель в плоском и осесимметричном случаях. Описан способ определения коэффициента поверхностного натяжения и угла смачивания по изображению капли с использованием всего двух наиболее просто измеряемых геометрических параметров границы капли – высоты ее вершины и радиуса пятна контакта. Выбирая в качестве характерного масштаба длины радиус шара R, эквивалентного по объему рассматриваемой капле, уравнения равновесия совместно с начальными условиями, отвечающие равновесной форме капли, в безразмерных переменных можно записать следующим образом [4]:

$$r'' = -z'\left(\mathrm{Bo}z - z'/r + C\right), \quad z'' = r'\left(\mathrm{Bo}z - z'/r + C\right), \tag{9}$$

$$r(0) = z'(0) = 0\,,\ z(0) = z_0\,,\ r'(0) = 1\,, \tag{10}$$

где $r = r(t)$, $z = z(t)$ – уравнения равновесной линии в параметрической форме, t – параметр, означающий длину дуги, отсчитываемую от оси z, C – произвольная постоянная, z_0 – высота капли. Таким образом, задача построения равновесной формы сводится к решению однопараметрической системы (9) с начальными условиями (10) и подбору значения C такого, чтобы объем фигуры вращения интегральной кривой был равен $4\pi/3$. Для численного интегрирования использован метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности. Подбор значения параметра C осуществлялся, ввиду незначительности общих вычислительных затрат, методом половинного деления. Величина параметра C лежит в диапазоне от – 2 до 0. В результате такого решения находятся значения угла смачивания θ и радиуса пятна контакта капли r_k. Для решения общей поставленной задачи, заключающейся в определении коэффициента поверхностного натяжения по заданным z_0 и r_k, устраивается дополнительный итерационный цикл по значению числа Bo, что позволяет получить значение последнего с заданной точностью. Интервалы для поиска решения можно определить с помощью рис. 5, где показана область допустимых значений (r_k, z_0) для равновесных форм капли (область, ограниченная верхней сплошной и нижней пунктирной линиями). Пользуясь этим же рисунком, можно приближенно определить величины $\sigma = \rho g R^2/\mathrm{Bo}$ и θ.

В настоящей работе показано, что равновесная форма свободной поверхности капли, расположенной на горизонтальной твердой стенке однозначно определяется двумя из четырех параметров: числом Бонда, значением краевого угла, безразмерными величинами высоты капли и радиуса пятна контакта. Следовательно, зная значения двух из указанных параметров, оставшиеся находятся путем построения

равновесной формы. Для определения θ по известным значениям числа Бонда и радиуса пятна контакта капли можно использовать рис. 6.

В работе представлена сравнительная таблица для реальных систем жидкость/подложка, в которой отражено влияние погрешности измерений высоты и радиуса пятна контакта капли на точность определения коэффициента поверхностного натяжения и угла смачивания предложенным способом. Описаны преимущества такого подхода по сравнению с существующими методиками.

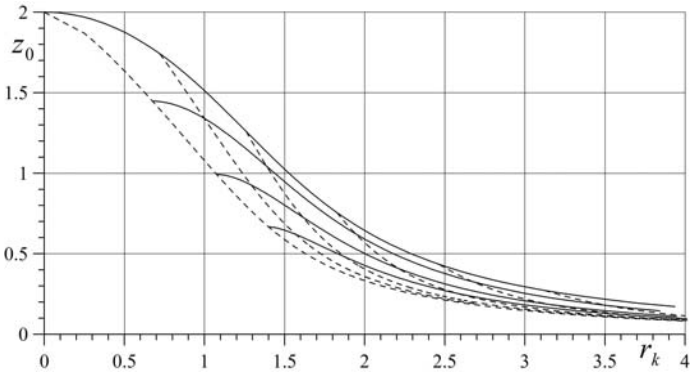

Рисунок 5 – Зависимость между высотой капли и ее радиусом пятна контакта с подложкой. Сплошные линии сверху вниз: Bo = 0, 1, 4, 10. Пунктирные линии слева направо: θ = 180°, 135°, 90°, 45°, 20°, 10°.

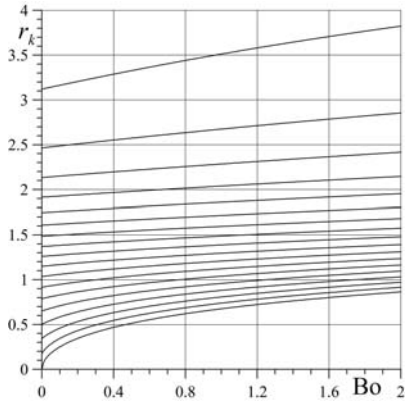

Рисунок 6 – Зависимость радиуса пятна контакта капли от числа Бонда. Кривые построены с шагом Δθ = 10°:
нижняя кривая соответствует θ = 180°, верхняя – 10°.

Во второй главе представлены результаты исследования процесса потери устойчивости струи высоковязкой жидкости, натекающей на твердую горизонтальную стенку. Проведен обзор существующих работ, посвященных изучению этого явления, и приведены результаты численного моделирования. Предполагается, что основное влияние на течение оказывает сила тяжести и вязкие силы. Задача формулируется в плоской постановке в приближении ползущего течения, т.е. в предположении незначительности инерционных эффектов, что характерно для рассматриваемого явления. Численное решение задачи получено с использованием непрямого метода граничных элементов, изложенного в первой главе. При таком подходе естественным источником малых возмущений являются ошибки округления, получаемые при расчете.

Область течения, имеющая границу $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, представлена на рис. 7, где Γ_1 – свободная поверхность, Γ_2 – твердые стенки, Γ_3 – входная граница. Характерные геометрические параметры: R – полуширина канала, L – расстояние между входной границей и сливным отверстием, H – высота сливного отверстия над твердой стенкой.

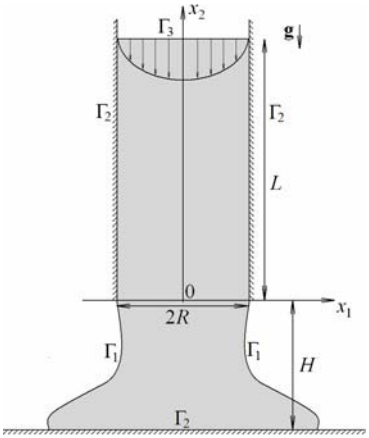

Рисунок 7 – Область решения.

Задача состоит в решении системы уравнений (1) с краевыми условиями (3), (4) и динамическим граничным условием на свободной поверхности

$$t_i = -\mathrm{W} x_2 n_i \,,\; x_i \in \Gamma_1 . \qquad (11)$$

При обезразмеривании использовались следующие масштабы: длины – R, скорости – U, давления – $\mu U/R$, где U – средняя скорость течения в канале. Модифицированное давление $\tilde{p} = p + \mathrm{W} x_2$, где $\mathrm{W} = \rho g R^2/\mu U$ – параметр Стокса, характеризующий соотношение гравитационных и вязких сил.

На входной границе Γ_3 на расстоянии L от сливного отверстия, достаточном для исключения влияния свободной поверхности, задан параболический профиль скорости, характерный для стабилизированного течения в плоском канале

$$u_2 = \tfrac{3}{2}\left(x_1^2 - 1\right),\; u_1 = 0 \,,\; x_i \in \Gamma_3 \qquad (12)$$

В начальный момент времени свободная поверхность Γ_1 имеет горизонтальную форму $x_2 = 0, -1 \le x_1 \le 1, x_i \in \Gamma_1, t = 0$.

Проведенные расчеты показали, что использование примененного в первой главе подхода для определения форм свободной поверхности образующейся струи приводит к тому, что расчетные узлы скапливаются в ее нижней части, а на боковых сторонах струи с увеличением ее длины расчетных узлов становится меньше. Вычислительный алгоритм позволяет на каждом шаге увеличивать количество элементов для сохранения точности аппроксимации свободной границы, длина которой в ходе процесса постоянно увеличивается. Для того, чтобы добиться равномерного распределения расчетных узлов на свободной границе, используется процедура их перераспределения.

Исследования показывают, что при заданном значении W существует критическое значение высоты H_c, при котором происходит изгибание струи, приводящее к образованию внутренних границ раздела в жидкости, так называемых «складок». На рис. 8 представлены различные варианты протекания процесса при фиксированном значении параметра W. В случае, когда значение высоты H значительно меньше критического значения ($H << H_c$), струя жидкости натекает на твердую стенку с последующим симметричным растеканием (рис. 8, *а*). Если значение H меньше критического, но близко к нему ($H < H_c$), то реализуется режим растекания с наличием колебательных движений струи, приводящих к нарушению симметрии и образованию наплывов на свободной поверхности. Такой режим, представленный на рис. 8, *б*, будем называть промежуточным. Потеря устойчивости струи, т.е. ее изгибание с образованием внутренних границ раздела, происходит при $H = H_c$ и иллюстрируется рис. 8, *в*. Изгибание с образованием газовых включений и внутренних границ раздела реализуется, когда значение высоты H значительно превышает критическую величину ($H >> H_c$), что показано на рис. 8, *г*.

Промежуточный режим, представленный на рис. 8, *б*, сопровождается затухающими колебаниями (рис. 9), возвращающими струю к симметричному растеканию. В данном случае образования внутренних границ раздела в жидкости не происходит. Таким образом, формирующийся на твердой стенке слой стабилизирует течение. В случае $H \ge H_c$ амплитуда колебаний достаточно велика, и струя начинает изгибаться еще до того, как слой на твердой стенке успеет сформироваться, приводя к образованию внутренних границ раздела.

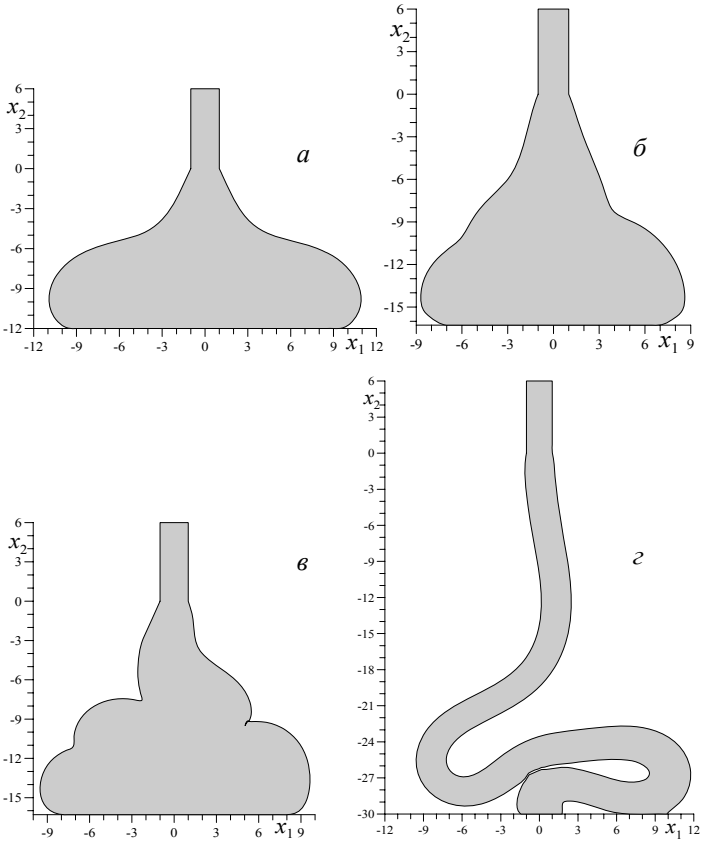

Рисунок 8 – Формы свободной поверхности струи при W = 0.001: *а* – H = 12, t = 80; *б* – H = 16.27, t = 80; *в* – H = 16.3, t = 90; *г* – H = 30, t = 80.

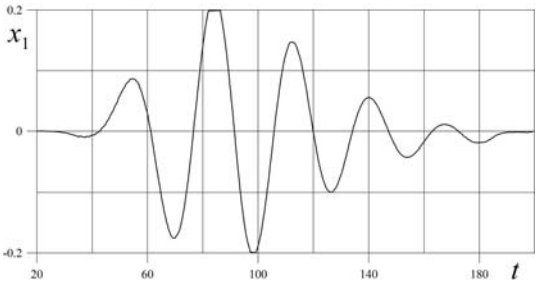

Рисунок 9 – Колебания струи жидкости (x_2 = –5) при W = 0.001, H = 16.27.

На рис. 10 сплошной линией изображена зависимость критической высоты H_c от lgW, полученная в результате расчетов. В [5, 6] наряду с критерием W, для анализа результатов используется число Бонда, $Bo = \rho g R^2/\sigma$, характеризующее отношение гравитационных сил и сил поверхностного натяжения. На рис. 10 данные из [5] получены для Bo = 0.42, в [6] – Bo = 4.36. В настоящей работе поверхностное натяжение не учитывается. Характер зависимости H_c(lgW) и влияние поверхностного натяжения на критическую высоту следует из физического содержания безразмерных критериев Re, W, Bo. При малых числах Re в области небольших, но сравнимых между собой значений W и Bo действия вязких сил и сил поверхностного натяжения соизмеримы и следует ожидать существенного влияния поверхностного натяжения на величину H_c, что и подтверждают данные [5, 6], полученные для $0.025 \le W \le 0.16$ и Bo = 0.42, 4.36. Поверхностное натяжение стабилизирует течение с точки зрения устойчивости рассматриваемого вида и значение H_c растет с уменьшением Bo. С ростом числа Bo, в частности, при Bo > 1 его влияние существенно падает в рассматриваемом диапазоне W, что подтверждается сопоставлением экспериментальных и расчетных данных. Уменьшение H_c с ростом W связано с уменьшением толщины струи, с соответствующим ростом осевой скорости по ее длине и, как следствие, ростом осевых напряжений в окрестности твердой стенки.

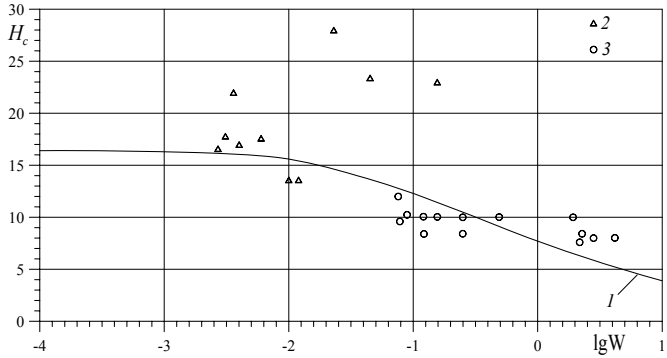

Рисунок 10 – Зависимость критической высоты H_c от параметра W: *1* – расчет, *2* – данные [5], *3* – данные [6].

В третьей главе рассматриваются гидродинамические процессы, протекающие при изготовлении изделий из полимерных композиций методом свободного литья, применительно к условиям формования зарядов ракетных двигателей на твердом топливе (РДТТ).

При изготовлении зарядов методом свободного литья осуществляется заливка высоковязкой топливной массы в вакуумированную оболочечную пресс-форму, представляющую собой корпус двигателя, содержащую центральный формующий стержень [7]. Транспорт композиции осуществляется через вертикальные массопроводы, которые могут содержать конструктивные элементы, например, конические вставки типа «диафрагма». Течение в массопроводе такого типа исследуется в третьей главе. Задача заключается в решении системы уравнений (1) с краевыми условиями (3), (4), (11), (12) в области, схематично представленной на рис. 11. Для получения решения используется тот же подход, что и во второй главе. Характер течения жидкости определяется параметром Стокса W и геометрическими характеристиками H и r.

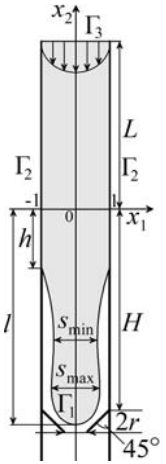

Рисунок 11

Результаты расчетов без учета диафрагмы показали наличие режима полного заполнения и режима, характеризующегося образованием струи, что согласуется с выводами работы [8]. Зависимость положения установившейся ЛТФК h относительно начального положения свободной поверхности в случае перехода к струйному режиму течения можно аппроксимировать степенным выражением $h = 0.45\mathrm{W}^{-6.67}$. Поведение со временем геометрических характеристик струи иллюстрирует рис. 12.

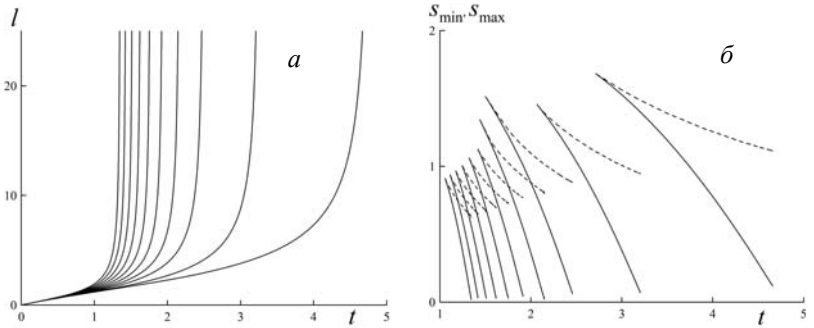

Рисунок 12 – Геометрические характеристики струи в зависимости от времени: *а* – длина l; *б* – сплошные кривые соответствуют минимальной толщине $s_{\min}$, пунктирные – толщине каплевидного образования на конце струи $s_{\max}$. Правые крайние кривые соответствуют W=1, левые – W=10, кривые построены с шагом ΔW=1.

В случае установки диафрагмы могут реализовываться следующие варианты течений: 1) сплошное заполнение с формированием на выходе из отверстия диафрагмы струи шириной, равной ширине отверстия диафрагмы; 2) переход к струйному течению выше диафрагмы с дозаполнением промежуточной области, при этом заполнение происходит как сверху напорным течением, так и со стороны диафрагмы; 3) заполнение промежуточного объема, предшествующего диафрагме, происходит только со стороны диафрагмы, в этом случае до того, как промежуточная область будет заполнена произойдет разрыв струи, формируемой после диафрагмы, поскольку происходит ее быстрое утоньшение; 4) потеря устойчивости струи, натекающей на твердую поверхность, в качестве которой выступают стенки диафрагмы; 5) может оказаться, что значение ширины отверстия установленной диафрагмы будет больше толщины сформировавшейся струи. В таком случае струя беспрепятственно преодолеет отверстие диафрагмы, и последняя не окажет никакого влияния на течение. Зависимость критического значения $r_c(H)$, при превышении которого происходит беспрепятственное прохождение струи, представлена на рис. 13.

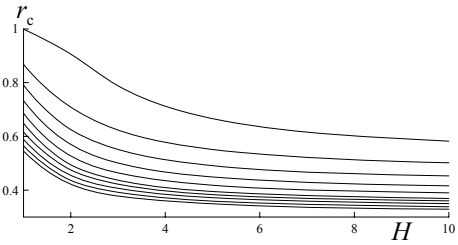

Рисунок 13 – Критическое значение полуширины отверстия диафрагмы: верхняя кривая – W = 1, нижняя – W = 10, ΔW = 1.

Задача о заполнении пресс-форм в струйном режиме, также рассмотренная в третьей главе, включает в себя расчет течения в области, представленной на рис. 14. Решение получено в плоском приближении. Основные уравнения, граничные условия и метод решения аналогичны использованным в предыдущей главе.

Серия расчетов была проведена для случаев, когда поперечный размер центрального тела превышает ширину сливного отверстия и наоборот. Для прогнозирования функционирования готового изделия при использовании для его изготовления нескольких порций композиции большое значение имеет знание о массораспределении порций по объему (так называемых топограмм). Возможные варианты

расположения границ раздела также представлены в третьей главе. Для отслеживания границ раздела между порциями топливной массы в ходе заполнения пресс-формы вводятся частицы маркеры, которые двигаются в соответствии с кинематическим условием, записанным в лагранжевом виде. Совокупность частиц вводится в поток в выходном отверстии канала через каждые 10 единиц безразмерного времени (рис. 14).

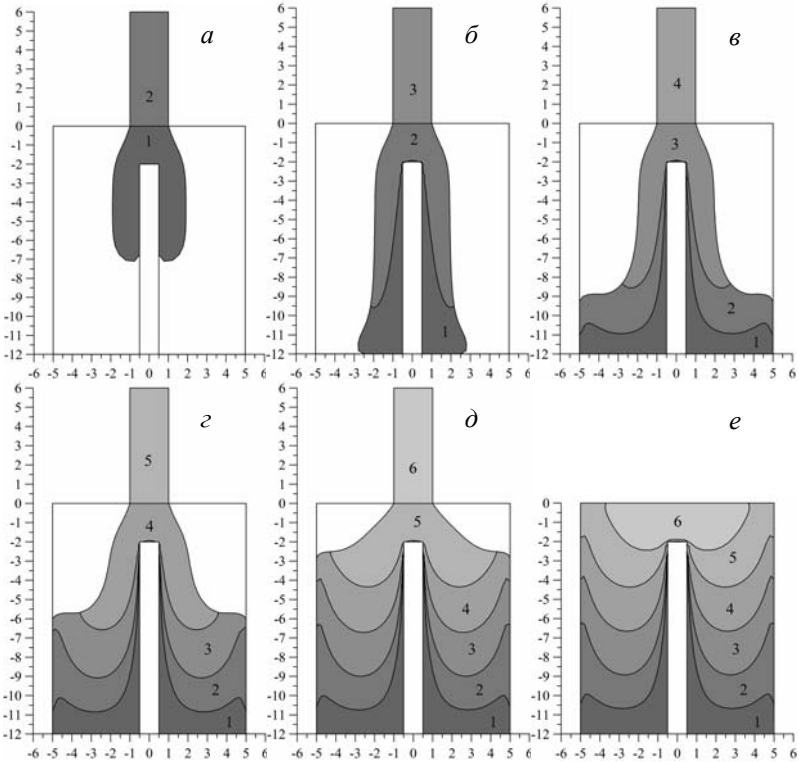

Рисунок 14 – Распределение порций топливной массы при W = 1: *а* – *t* = 10; *б* – *t* = 20; *в* – *t* = 30; *г* – *t* = 40; *д* – *t* = 50; *е* – в готовом изделии.

Целью исследования течения в пресс-форме являлось также выяснение гидродинамических причин возникновения дефектов по монолитности в получаемых изделиях. На рис. 14 представлены картины течения в технологически приемлемом режиме. Струя сначала взаимодействует с горизонтальной поверхностью центрального тела, затем композиция в виде слоя стекает по его боковым поверхностям.

После достижения слоем дна пресс-формы начинается процесс перемещения свободной поверхности снизу вверх. Возможны следующие отклонения от указанного режима. Так при контакте струи с горизонтальной поверхностью центрального тела может произойти потеря устойчивости. Возможно образование дефектов при интенсивном обтекании угловых точек центрального тела при его относительно близком расположении к сливному отверстию. Потеря устойчивости течения может произойти при обтекании центрального тела, или уже после контакта жидкости с дном пресс-формы. Все эти варианты иллюстрируются соответствующими расчетами. Кроме того, стекающая по центральному телу жидкость может полностью заполнить пространство между центральным телом и стенками пресс-формы, не достигнув дна. Этого можно избежать путем выбора параметров формования в соответствии с зависимостью толщины слоя от параметра W, приведенной на рис. 15.

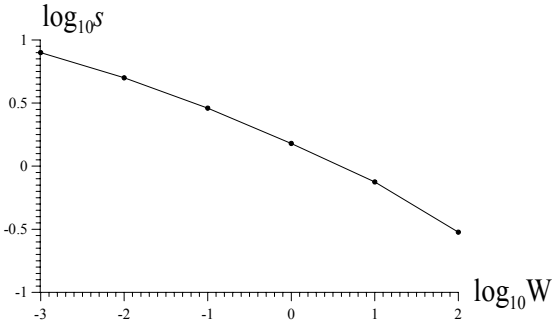

Рисунок 15 – Зависимость толщины слоя *s*, стекающего по поверхности центрального тела от значения W в логарифмических координатах.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. В плоском приближении сформулированы физико-математические постановки задач о безынерционном растекании вязкой жидкости по твердой стенке с учетом и без учета действия сил поверхностного натяжения и эффектов смачивания, о взаимодействии струи высоковязкой жидкости с твердой стенкой, о течении высоковязкой жидкости в вертикальном массопроводе с конструктивным элементом типа «диафрагма», о заполнении пресс-форм высоковязкой жидкостью с учетом наличия центрального тела. Рассмотренные задачи относятся к классу задач о медленных течениях

вязкой жидкости со свободной поверхностью в присутствии твердых границ.

2. Разработаны численные методики решения поставленных задач с использованием непрямого метода граничных элементов. Создан пакет прикладных программ.

3. Проведено исследование процесса растекания объема жидкости по твердой стенке, позволившее выявить адекватные способы постановки граничных условий вблизи движущейся ЛТФК и получить временные зависимости основных геометрических параметров растекающегося объема жидкости в широком диапазоне изменения числа Бонда, в том числе зависимость динамического краевого угла от времени, что представляет фундаментальный интерес для изучения процессов растекания и смачивания.

4. Предложен способ определения коэффициента поверхностного натяжения и угла смачивания, основанный на численном расчете равновесной формы капли, предполагающий использование всего двух наиболее просто определяемых по изображению капли параметров – высоты ее вершины и радиуса пятна контакта с подложкой.

5. Представлены картины эволюции свободной поверхности струи вязкой жидкости, натекающей на твердую горизонтальную поверхность, в четырех режимах в зависимости от соотношении гравитационных и вязких сил (параметр W): 1) устойчивое симметричное растекание жидкости по стенке; 2) колебательные движения струи с последующим затуханием и переходом к устойчивому растеканию; 3) колебания струи с образованием на свободной поверхности наплывов, приводящих к появлению внутренних границ раздела; 4) изгибание струи с образованием газовых включений и внутренних границ раздела. Полученная зависимость критической высоты H_c, при которой происходит переход от второго варианта течения к третьему показывает, что при $W < 0.01$ величина H_c практически постоянна и равна 16.4. Показано также, что дальнейшее увеличение значения комплекса W приводит к существенному снижению H_c.

6. Проведенные расчеты течения вязкой жидкости в вертикальном массопроводе показывают, что при определенном соотношении гравитационных и вязких сил и геометрических параметров диафрагмы могут реализовываться следующие варианты течений: 1) сплошной режим заполнения с формированием струи толщиной равной ширине отверстия диафрагмы; 2) струйный режим, характеризующийся заполнением промежуточной области, предшествующей диафрагме после касания последней; 3) случай, аналогичный предыдущему, но с

распадом струи до момента заполнения промежуточной области; 4) струйный режим, характеризующийся потерей устойчивости струи после касания стенок диафрагмы; 5) беспрепятственное прохождение струей стенок диафрагмы без касания. Полученные условия разделения режимов заполнения массопровода и зависимости геометрических характеристик струй от времени позволяют осуществить выбор технологически приемлемого режима течения жидкости в массопроводе как с учетом наличия диафрагмы, так и в ее отсутствие.

7. Проведенное математическое моделирование течения вязкой жидкости, заполняющей пресс-форму с центральным телом, выявило существование пяти различных вариантов отклонения от стабильного протекания данного технологического процесса, что может являться причиной появления дефектов по монолитности в получаемых изделиях. Первый связан с потерей устойчивости струи, взаимодействующей с горизонтальной твердой поверхностью центрального тела. Второй характеризуется образованием дефектов при обтекании угловых точек центрального тела. Третий и четвертый режимы связаны с потерей устойчивости слоя, стекающего по центральному телу и растекающегося по дну пресс-формы. Пятый выражается в полном заполнении пространства между центральным телом и стенками пресс-формы на начальном этапе до достижения композицией дна. Представленные результаты расчетов при различных значениях определяющих параметров могут быть использованы для правильной организации технологического процесса изготовления изделий методом свободного литья, в частности, при формовании зарядов ракетных двигателей на твердом топливе.

Публикации по теме диссертации

1. Якутенок В.А. Численное моделирование в плоской постановке растекания капли по твердой стенке / В.А. Якутенок, *М.А. Пономарева,* В.А. Архипов // **Известия ВУЗов. Физика**. – 2006. – Т. 49, № 6. Приложение. – С. 172-176.
2. *Пономарева М.А.* Определение равновесной формы объема капиллярной жидкости, расположенного на горизонтальной поверхности / *М.А. Пономарева*, А.М Тимохин, В.А. Якутенок // **Известия ВУЗов. Физика**. – 2007. – Т. 50, № 9/2. – С. 269-273.
3. *Пономарева М.А.* Моделирование растекания капли вязкой жидкости в плоской постановке при больших числах Бонда / *М.А. Пономарева,* В.А. Якутенок // **Вестник ТГУ. Математика и механика**. – 2007. – № 1. – С. 79-83.

4. *Пономарева М.А.* Моделирование растекания объема вязкой жидкости по горизонтальной поверхности / *М.А. Пономарева*, Г.Р. Шрагер, В.А. Якутенок // Математические модели физических процессов : материалы XII Международной конференции. – Таганрог : Изд-во Таганрог. гос. пед. ин-та, 2007. – С. 117-121.
5. *Пономарева М.А.* Вычислительный алгоритм расчета взаимодействия свободной поверхности жидкости с твердой стенкой / *М.А. Пономарева*, В.А. Якутенок // Наука. Техника. Инновации : тезисы докладов Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. техн. ун-та, 2007. – С. 68-69.
6. *Пономарева М.А.* Использование уравнения Дюпре-Юнга для решения задачи о растекании жидкости при ограниченном смачивании / *М.А. Пономарева*, Г.Р. Шрагер, В.А. Якутенок // **Вестник ТГУ. Математика и механика**. – 2008. – № 1(2). – С. 90-96.
7. *Пономарева М.А.* Особенности течения при заполнении пресс-формы с центральным телом / *М.А. Пономарева*, Г.Р. Шрагер, В.А. Якутенок // **Известия ВУЗов. Физика**. – 2008. – Т. 51, № 8/2. – С. 206-212.
8. *Пономарева М.А.* Способ определения форм свободной поверхности для жидкостей, находящихся в равновесном состоянии // Физика и химия высокоэнергетических систем : сборник материалов IV Всероссийской конференции молодых ученых. – Томск : ТМЛ-Пресс, 2008. – С. 276-277.
9. *Пономарева М.А.* Динамика контактной линии при растекании вязкой жидкости по твердой стенке / *М.А. Пономарева*, Г.Р. Шрагер, В.А. Якутенок // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения : тезисы докладов 3-й Всероссийской конференции. – Новосибирск : Изд-во ин-та гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2008. – С. 87.
10. *Пономарева М.А.* Учет смачиваемости подложки при растекании жидкости по горизонтальной поверхности / *М.А. Пономарева*, В.А. Якутенок // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики : сборник докладов VI Всероссийской конференции. – Томск : Изд-во Том. гос. ун-та, 2008. – С. 492-493.
11. *Пономарева М.А.* Изучение равновесных форм капель на горизонтальной подложке применительно к технологическим процессам / *М.А. Пономарева*, А.С. Усанина // Наука и образование : сборник материалов XII Всероссийской

конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Т. 6. – Томск : Изд-во Том. гос. пед. ун-та, 2009. – С. 94-98.

12. *Пономарева М.А.* Численное исследование потери устойчивости струи вязкой жидкости / *М.А. Пономарева*, Г.Р. Шрагер, В.А. Якутенок // Физика и химия высокоэнергетических систем : сборник материалов V Всероссийской конференции молодых ученых. – Томск : ТМЛ-Пресс, 2009. – С. 349-352.
13. *Пономарева М.А.* Растекание жидкости по несмачиваемой поверхности // Физика и химия высокоэнергетических систем : сборник материалов V Всероссийской конференции молодых ученых. – Томск : ТМЛ-Пресс, 2009. – С. 353-355.
14. *Пономарева М.А.* Численное моделирование потери устойчивости струи при контакте с твердой стенкой в технологии переработки полимерных композиций методом свободного литья / *М.А. Пономарева*, Г.Р. Шрагер, В.А. Якутенок // Материаловедение, технологии и экология в 3-м тысячелетии : материалы IV Всероссийской конференции молодых ученых. – Томск: Изд-во ин-та оптики атмосферы СО РАН, 2009. – С. 244-248.
15. *Пономарева М.А.* Расчет равновесных форм капли, расположенной на горизонтальной поверхности / *М.А. Пономарева*, А.С. Усанина, В.А. Якутенок // **Известия ВУЗов. Физика**. – 2009. – Т. 52, № 7/2. – С. 162-166.
16. *Пономарева М.А.* Особенности потери устойчивости слоя высоковязкой жидкости [Электронный ресурс] // Перспективы развития фундаментальных наук : труды VII Международной конференции студентов и молодых учёных / Том. политех. ун-т. – Томск, 2010. – С. 149-151. – Электрон. версия печат. публ. – URL: http://science-persp.tpu.ru/Previous%20Materials /Konf_2010.pdf.
17. *Пономарева М.А.* Эволюция формы капли при растекании [Электронный ресурс] / *М.А. Пономарева*, А.С. Усанина // Перспективы развития фундаментальных наук : труды VII Международной конференции студентов и молодых учёных / Том. политех. ун-т. – Томск, 2010. – С. 197-199. – Электрон. версия печат. публ. – URL: http://science-persp.tpu.ru/Previous%20Materials /Konf_ 2010.pdf.
18. Борзенко Е.И. Моделирование технологических процессов переработки полимерных композиций / Е.И. Борзенко, *М.А. Пономарева*, Г.Р. Шрагер, В.А Якутенок, Ю.Б. Банзула, Ю.М. Милехин // Байкальские чтения: наноструктурированные системы и актуальные проблемы механики сплошной среды (теория и

эксперимент) : тезисы докладов научной конференции. – Ижевск: Изд-во ин-та прикл. механики УрО РАН, 2010. – С. 115-116.

19. РаФорм-1. Определение равновесной формы объема жидкости, расположенного на твердой горизонтальной поверхности. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010614033. Правообладатель: ГОУ ВПО Томский госуниверситет. Авторы: *Пономарева М.А.*, Тимохин А.М., Якутенок В.А. Зарегистрировано в реестре программ 22 июня 2010.
20. РаФорм-2. Определение равновесной формы капли жидкости, расположенной на твердой горизонтальной поверхности. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010612178. Правообладатель: ГОУ ВПО Томский госуниверситет. Автор *Пономарева М.А*. Зарегистрировано в реестре программ 24 марта 2010.
21. *Пономарева М.А.* Устойчивость плоской струи высоковязкой жидкости, натекающей на горизонтальную твердую плоскость / *М.А. Пономарева*, Г.Р. Шрагер, В.А. Якутенок // **Известия РАН. Механика жидкости и газа**. – 2011. – Т. 46, № 1. – С. 53-61.
22. *Ponomareva M.A.* Stability of a Plane Jet of a Highly Viscous Fluid Impinging on a Horizontal Solid Wall / *M.A. Ponomareva*, G.R. Shrager, V.A. Yakutenok // Fluid Dynamics. – 2011. – Vol. 46, № 1. – P. 44-50.
23. *Пономарева М.А.* Определение коэффициента поверхностного натяжения и угла смачивания с применением численных расчетов равновесных форм капли / *М.А. Пономарева*, В.А. Якутенок // **Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования**. – 2011. – № 7. – С. 1-4.
24. *Ponomareva M.A.* Surface tension coefficient and contact angle definition using numerical calculations of equilibrium drop shapes / *M.A. Ponomareva*, V.A. Yakutenok // Journal of Surface Investigation. – 2011. – № 4/1. – P.1-4.
25. *Пономарева М.А.* Колебания струи вязкой жидкости, натекающей на твердую горизонтальную плоскость / *М.А. Пономарева*, Г.Р. Шрагер, В.А. Якутенок // Нелинейные волны: теория и новые приложения : тезисы докладов Всероссийской конференции. – Новосибирск : Изд-во ин-та гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2011. – С. 54-55.

Список цитируемой литературы

1. Сумм Б.Д. Физико-химические основы смачивания и растекания / Б.Д. Сумм, Ю.В. Горюнов. – 1976. – М. : Химия. – 232 с.
2. Якутенок В.А. Численное моделирование медленных течений вязкой жидкости со свободной поверхностью методом граничных элементов // Математическое моделирование. – 1992. – Т. 4, № 10. – С. 62-70.
3. Nakaya C. Spread of fluid drops over a horizontal plane // Journal of the Physical Society of Japan. – 1974. – Vol. 37, № 2. – P. 539-543.
4. Бабский В.Г. Гидромеханика невесомости / В.Г. Бабский, Н.Д. Копачевский, А.Д. Мышкис и др. – М. : Наука, 1976. – 504 с.
5. Cruickshank J.O. Viscous fluid buckling of plane and axisymmetric jets / J.O. Cruickshank, B.R. Munson // J. Fluid Mech. – 1981. – Vol. 113. – P. 221-239.
6. Cruickshank J.O. Low-Reynolds-number instabilities in stagnating jet flows // J. Fluid Mech. – 1988. – Vol. 193. – P. 111-127.
7. Глушков И.А. Моделирование формования изделий из свободно литьевых композиций / И.А. Глушков, Ю.М. Милехин, В.М. Меркулов, Ю.Б. Банзула. – М. : Архитектура-С, 2007. – 362 с.
8. Борзенко Е.И. Заполнение каналов неньютоновской жидкостью в поле силы тяжести / Е.И. Борзенко, Г.Р. Шрагер, В.А. Якутенок // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2009. – № 6. – С. 40-46.

Тираж 100 экз.
Отпечатано в КЦ «Позитив»
634050 г. Томск, пр. Ленина 34а