МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

И.А. Александров, Г.А. Юферова

ФОРМУЛА СУММИРОВАНИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Дается вывод формулы суммирования для полиномов Чебышева второго рода и ее применение к исследованию экспоненциальных полиномов Бранжа.

Ключевые слова: *экстремальные многочлены Бранжа, полиномы Чебышева второго рода.*

В [1] установлено, что экспоненциальный полином Бранжа

$$Y_{s,n}(\tau)=\sum_{r=1}^{s}\frac{(-1)^{s-r}}{n-r}\binom{2n-2r}{s-r}\binom{2n-r}{r-1}e^{-(n-r)\tau},$$

где $\binom{m}{n}=\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}$ – биномиальный коэффициент, имеет производную

$$Y'_{s,n}\left(\tau,\frac{s}{n-s}\right)=-\frac{e^{-(n-s)\tau}}{k!}(2m)_k\;{}_3F_2\left[\begin{matrix}2m+k,-k,m-\frac{1}{2}\\ m+\frac{1}{2},2m-1\end{matrix};e^{-\tau}\right],$$

$$m=n-s+1,\ k=s-1,$$

принимающую отрицательные значения при $\tau\in(0,\infty)$. Здесь $(a)_k=$ $=a(a+1)...(a+k-1)$ – символ Похгаммера, ${}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\ d,e\end{matrix};x\right]=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{(a)_j(b)_j(c)_j}{(d)_j(e)_j}\cdot\dfrac{x^j}{j!}$ – гипергеометрический ряд Гаусса.

В данной работе получим этот результат, то есть что $Y'_{s,n}(\tau,s/(n-s))<0$, используя элементарные конформные отображения и теорему сложения для одного класса ортогональных многочленов. При этом выясняется место и роль степеней решения уравнения Левнера с постоянной управляющей функцией.

1. Функция

$$H_\gamma(z)=\frac{z}{1-2\cos\gamma\cdot z+z^2} \tag{1}$$

отображает круг $E=\{z\in\mathbb{C};|z|<1\}$ на плоскость, разрезанную по вещественной оси от точки $-\dfrac{1}{4\cos^2\frac{\gamma}{2}}$ до $-\infty$ и от точки $\dfrac{1}{4\sin^2\frac{\gamma}{2}}$ до $+\infty$.

Функция

$$\zeta=\zeta(\tau,z)=\frac{\left(1-\sqrt{1+4K(z)e^{-\tau}}\right)^2}{4K(z)e^{-\tau}},\ 0<\tau<+\infty,$$

где $K(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$, отображает тот же круг на единичный круг с разрезом по вещественной оси от точки -1 до точки $-e^{\tau}\left(1-\sqrt{1-e^{-\tau}}\right)^2$.

Образуем семейство функций $H_\theta(\zeta(\tau,z))$, полагая в (1)

$$\cos\gamma=\left(1-e^{-\tau}\right)+e^{-\tau}\cos\theta.$$

Лемма 1. *Справедливо функциональное соотношение*

$$H_\theta(\zeta(\tau,z))=e^{-\tau}H_\gamma(z),\ 0<\tau<+\infty,\ z\in E.$$

Доказательство. Функция $e^{-\tau}H_\gamma(z)$ отображает круг E на плоскость, разрезанную по двум лучам: $\left(-\infty,-\dfrac{e^{-\tau}}{4\cos^2\frac{\gamma}{2}}\right]$, $\left[\dfrac{e^{-\tau}}{4\sin^2\frac{\gamma}{2}},+\infty\right)$, лежащим на вещественной оси.

Функция $H_\theta(\zeta(\tau,-1))$ переводит точку $z=-1$ в точку

$$H_\theta(\zeta(\tau,-1))=\frac{1}{\zeta(\tau,-1)+\dfrac{1}{\zeta(\tau,-1)}-2\cos\theta}.$$

Поскольку

$$\zeta(\tau,-1)+\frac{1}{\zeta(\tau,-1)}=2\left(1-2e^{\tau}\right)\ \text{и}\ \sin^2\frac{\gamma}{2}=e^{-\tau}\sin^2\frac{\theta}{2},$$

то
$$H_\theta(\zeta(\tau,-1))=\frac{1}{2\left(1-2e^{\tau}\right)-2\left(1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)}=-\frac{e^{-\tau}}{4\cos^2\dfrac{\gamma}{2}}.$$

Точке $z=1$ соответствует $H_\theta(\zeta(\tau,1))=\dfrac{e^{-\tau}}{4\sin^2\frac{\gamma}{2}}$.

Видим, что функции $H_\theta(\zeta(\tau,z))$ и $e^{-\tau}H_\gamma(z)$ отображают круг E на одну и ту же область. Так как $H_\theta(\zeta(\tau,\pm1))=e^{-\tau}H_\gamma(\pm1)$ и $H_\theta(\zeta(\tau,0))=e^{-\tau}H_\gamma(0)=0$, то согласно теореме Римана $H_\theta(\zeta(\tau,z))=e^{-\tau}H_\gamma(z)$. Лемма доказана.

2. Разложим функцию $H_\gamma(z)$ в ряд по косинусам кратных дуг. Следуя [2], образуем последовательность $\{W_m(\tau,z)\}_{m=0}^{\infty}$, определенную в $[0,+\infty)\times E$, полагая

$$W_0(\tau,z)=\frac{e^{\tau}\zeta(\tau,z)}{1-\zeta^2(\tau,z)},\ W_{m+1}(\tau,z)=\zeta(\tau,z)W_m(\tau,z),\ m=0,1,...$$

Лемма 2. *Имеет место формула*

$$H_\gamma(z) = W_0(\tau, z) + 2\sum_{m=1}^{\infty} W_m(\tau, z)\cdot\cos m\theta .$$

Доказательство. Действительно,

$$H_\gamma(z) = e^\tau H_\theta(\zeta(\tau, z)) = \frac{e^\tau\zeta}{1-\zeta^2}\cdot\frac{1-\zeta^2}{1-2\cos\theta\cdot\zeta+\zeta^2} = \frac{e^\tau\zeta}{1-\zeta^2}\cdot\mathrm{Re}\frac{1+e^{i\theta}\zeta}{1-e^{i\theta}\zeta} .$$

Если $|\zeta|<1$, то

$$\mathrm{Re}\frac{1+e^{i\theta}\zeta}{1-e^{i\theta}\zeta} = 1+2\sum_{m=1}^{\infty}\zeta^m(\tau, z)\cdot\cos m\theta ,$$

причем ряд равномерно сходится внутри E. Значит, в E

$$H_\gamma(z) = W_0(\tau, z) + 2\sum_{m=1}^{\infty} W_m(\tau, z)\cdot\cos m\theta .$$

Лемма доказана.

3. Разложим функцию $H_\gamma(z)$ в ряд по степеням z. Поскольку функция $W_m(\tau, z)$ голоморфна относительно z в круге E, то согласно теореме Тейлора ее можно представить степенным рядом

$$W_m(\tau, z) = \sum_{l=m+1}^{\infty} Q_{l,m}(\tau) z^l ,$$

и поэтому

$$H_\gamma(z) = \sum_{l=1}^{\infty} Q_{l,0}(\tau) z^l + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=m+1}^{\infty} Q_{l,m}(\tau) z^l\cdot\cos m\theta .$$

Меняя порядок суммирования и объединяя члены с одинаковыми степенями z, получаем

$$H_\gamma(z) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[Q_{m,0}(\tau) + 2\sum_{l=1}^{m-1} Q_{m,l}(\tau)\cdot\cos l\theta\right] z^m .$$

4. Функция

$$\frac{1}{1-2tz+z^2}$$

является производящей функцией для полиномов Чебышева второго рода

$$U_m(t) = \frac{\sin((m+1)\arccos t)}{\sin t},\ m = 0,1,\ldots,$$

то есть
$$\frac{1}{1-2tz+z^2} = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(t) z^m ,$$

и поэтому
$$H_\gamma(z) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{m-1}(\cos\gamma) z^m .$$

Она же является производящей функцией для полиномов Гегенбауэра $C_m^1(\cos\gamma)$ [3, с. 406], то есть

$$\frac{1}{1-2tz+z^2}=\sum_{m=0}^{\infty}C_m^1(t)z^m$$

и поэтому $$H_\gamma(z)=\sum_{m=1}^{\infty}C_{m-1}^1(\cos\gamma)z^m .$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в указанных разложениях функции $H_\gamma(z)$ в ряд, получаем

$$C_{m-1}^1(\cos\gamma)=U_{m-1}(\cos\gamma)=Q_{m,0}(\tau)+2\sum_{l=1}^{m-1}Q_{m,l}(\tau)\cdot\cos l\theta,\ m=1,2,... \qquad (2)$$

Нашей целью является доказательство неравенства $Q_{m,l}(\tau)>0$ при $0<\tau<+\infty$, $n\in N\setminus\{1\}$, $l=1,...,m-1$. Будем использовать полиномы Лежандра $P_m(t)$, определяемые как коэффициенты разложения по степеням z производящей функции [3, с. 396, форм. 6.821]

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tz+z^2}}=\sum_{m=0}^{\infty}P_m(t)z^m ,$$

и полиномы Гегенбауэра $C_m^p(t)$, определяемые как коэффициенты разложения по степеням z производящей функции [3, с. 406]

$$\frac{1}{\left(1-2tz+z^2\right)^p}=\sum_{m=0}^{\infty}C_m^p(t)z^m ,\ p>0 .$$

Полиномы Лежандра $P_m(t)$ можно представить формулой

$$P_m(t)=\frac{1}{m!2^m}\frac{d^m}{dt^m}\left[\left(t^2-1\right)^m\right]$$

(ее часто принимают как определение $P_m(t)$). Они обладают свойствами ортогональности

$$\int_{-1}^{1}P_m(t)P_n(t)dt=0,\ m\neq n .$$

Поскольку $$\int_{-1}^{1}P_n^2(t)dt=\frac{2}{2n+1},$$

то ортонормированной системой полиномов Лежандра является система полиномов

$$\sqrt{\frac{2m+1}{2}}P_m(t),\ m=1,2,...$$

Лемма 3. *Имеет место функциональное соотношение*

$$U_n\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\zeta\right)=C_n^1\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\zeta\right)=$$

$$=\sum_{j=0}^{n}D_{j,n}\left(1-x^2\right)^{\frac{j}{2}}\left(1-y^2\right)^{\frac{j}{2}}C_{n-j}^{1+1}(x)C_{n-j}^{1+1}(y)P_j(\zeta), \qquad (3)$$

где постоянная

$$D_{j,n} = \frac{4^j (n-j)!(j!)^2 (2j+1)}{(n+j+1)!}.$$

Доказательство. Представим функцию

$$U_n\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\zeta\right) = C_n^1\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\zeta\right) = \sum_{m=0}^{n} A_{m,n}(x,y) P_m(\zeta) \quad (4)$$

в виде разложения по полиномам Лежандра. Здесь коэффициенты даются формулами

$$A_{j,n}(x,y) = \frac{2j+1}{2}\int_{-1}^{1} U_n\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\zeta\right) P_j(\zeta)\, d\zeta .$$

Преобразуем их, воспользовавшись тем [3, с. 276, форм. 4.63], что если $F(x)$ – произвольная функция с непрерывными производными до $(n+1)$-го порядка включительно, то

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{\frac{p-1}{2}} F(x) C_j^{\frac{p}{2}}(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{j!}\cdot\frac{p(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+j-1)}{(p+1)(p+3)\cdot\ldots\cdot(p+2j-1)}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{j+\frac{p-1}{2}}\frac{d^j F(x)}{dx^j}dx.$$

Положив в этой формуле

$$x=\zeta,\ F(\zeta) = U_n\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\zeta\right),\ p=1,$$

получим

$$\frac{2}{2j+1} A_{j,n}(x,y) = \frac{1}{2^j j!}\int_{-1}^{1}\left(1-\zeta^2\right)^j \frac{d^j}{d\zeta^j} U_n\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\zeta\right) d\zeta .$$

Поскольку [3, с. 407, форм. 6.931]

$$\frac{d^j}{d\zeta^j} C_n^p(t) = 2^j \frac{\Gamma(p+j)}{\Gamma(p)} C_{n-j}^{p+j}(t),$$

то при $k=j$, $p=1$ имеем

$$\frac{d^j}{d\zeta^j} C_n^1(t) = \frac{d^j}{d\zeta^j} U_n(t) = 2^j j! C_{n-j}^{j+1}(t).$$

Поэтому

$$\frac{d^j}{d\zeta^j} U_n\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\zeta\right) = 2^j j!\left(1-x^2\right)^{\frac{j}{2}}\left(1-y^2\right)^{\frac{j}{2}} C_{n-j}^{j+1}\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\zeta\right)$$

и для $A_{j,n}(x,y)$ имеем формулу

$$\frac{2}{2j+1} A_{j,n}(x,y) = \left(1-x^2\right)^{\frac{j}{2}}\left(1-y^2\right)^{\frac{j}{2}} V_{j,n}(x,y),$$

где

$$V_{j,n}(x,y) = \int_{-1}^{1}\left(1-\zeta^2\right)^j C_{n-j}^{j+1}\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\zeta\right) d\zeta \quad (5)$$

– симметричный полином степени $(n-j)$ относительно переменных x и y, то есть $V_{j,n}(x,y)=V_{j,n}(y,x)$.

Покажем, что функция $V_{j,n}(x,y)$ и функция $S_{j,n}(x,y)=C_{n-j}^{1+1}(x)C_{n-j}^{1+1}(y)$ удовлетворяют гипергеометрическому дифференциальному уравнению Гаусса

$$\left(1-x^2\right)w''(x)-(2j+3)x\cdot w'(x)+(n-j)(n+j+2)w(x)=0. \tag{6}$$

Относительно $S_{j,n}(x,y)$ это свойство легко проверяется, поскольку $C_n^p(t)$ – решение дифференциального уравнения [3, с. 408, форм. 6.96]

$$y''+\frac{(2j+1)t}{t^2-1}\cdot y'+\frac{n(2p+n)}{t^2-1}y=0. \tag{7}$$

Обратимся к функции $V_{j,n}(x,y)$. Подставим в левую часть уравнения (6) вместо w функцию $V_{j,n}(x,y)$. Проведем необходимые предварительные действия.

Пусть

$$\eta(x)=xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\zeta.$$

Поскольку

$$\eta'(x)=y-\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}x\zeta,\ \eta''(x)=-\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\zeta}{1-x^2},$$

то

$$x\eta'(x)=\eta(x)-\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}\zeta,\ \eta'^2(x)\left(1-x^2\right)=\left(1-\eta^2(x)\right)-\left(1-y^2\right)\left(1-\zeta^2\right).$$

Пусть

$$T(x)=\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}C_{n-j}^{j+1}(\eta(x))-(2j+3)x\frac{d}{dx}C_{n-j}^{j+1}(\eta(x))+$$
$$+(n-j)(n+j+2)C_{n-j}^{j+1}(\eta(x)).$$

Так как
$$\frac{d}{dx}C_{n-j}^{j+1}(\eta(x))=\frac{dC_{n-j}^{j+1}(\eta)}{d\eta}\eta'(x),$$

$$\frac{d^2}{dx^2}C_{n-j}^{j+1}(\eta(x))=\frac{d^2C_{n-j}^{j+1}(\eta(x))}{d\eta^2}\eta'^2(x)+\frac{dC_{n-j}^{j+1}(\eta(x))}{d\eta}\eta''(x),$$

то

$$T(x)=(1-x^2)\eta'^2(x)\frac{d^2C_{n-j}^{j+1}(\eta(x))}{d\eta^2}+\left[(1-x^2)\eta''(x)-(2j+3)x\eta'(x)\right]\frac{dC_{n-j}^{j+1}(\eta(x))}{d\eta}+$$
$$+(n-j)(n+j+2)C_{n-j}^{j+1}(\eta(x))=\left(1-\eta^2(x)\right)\frac{d^2C_{n-j}^{j+1}(\eta(x))}{d\eta^2}-(2j+3)\eta(x)\frac{dC_{n-j}^{j+1}(\eta(x))}{d\eta}+$$
$$+(n-j)(n+j+2)C_{n-j}^{j+1}(\eta(x))-\left(1-y^2\right)\left(1-\zeta^2\right)\frac{d^2C_{n-j}^{j+1}(\eta(x))}{d\eta^2}+(2j+2)\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}\zeta\frac{dC_{n-j}^{j+1}(\eta(x))}{d\eta}.$$

Сумма первых трех слагаемых в правой части равенства равна нулю, поскольку $C_{n-j}^{j+1}(\eta)$ является решением уравнения (7). Имеем

$$T(x)=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}\left[(2j+2)\zeta\frac{dC_{n-j}^{j+1}(\eta(x))}{d\eta}-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\left(1-\zeta^2\right)\frac{d^2C_{n-j}^{j+1}(\eta(x))}{d\eta^2}\right].$$

Вернемся к функции $V_{j,n}(x,y)$. В результате её подстановки в левую часть уравнения (6) получим

$$\int_{-1}^{1}\left(1-\zeta^2\right)^j T(x)d\zeta=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}\left[(2j+2)\zeta\left(1-\zeta^2\right)^j\frac{dC_{n-j}^{j+1}(\eta(x))}{d\eta}-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\left(1-\zeta^2\right)^{j+1}\frac{d^2C_{n-j}^{j+1}(\eta(x))}{d\eta^2}\right]d\zeta.$$

Применив к интегралу от второго слагаемого формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\left(1-\zeta^2\right)^{j+1}\frac{d^2C_{n-j}^{j+1}(\eta(x))}{d\eta^2}d\zeta=\int_{-1}^{1}\left(1-\zeta^2\right)^{j+1}\frac{d}{d\zeta}\left[\frac{dC_{n-j}^{j+1}(\eta(x))}{d\eta}\right]=$$

$$=\left(1-\zeta^2\right)^{j+1}\frac{dC_{n-j}^{j+1}(\eta(x))}{d\eta}\Bigg|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}(2j+2)\left(1-\zeta^2\right)^j\zeta\frac{dC_{n-j}^{j+1}(\eta(x))}{d\eta}d\zeta$$

и в итоге убеждаемся в том, что

$$V_{j,n}(x,y)=\int_{-1}^{1}\left(1-\zeta^2\right)^j C_{n-j}^{j+1}(\eta(x))d\zeta$$

– решение уравнения (6).

Функция $V_{j,n}(x,y)$ в силу свойств решений уравнения (6) и отличается от $S_{j,n}(x,y)$ только постоянным множителем, то есть

$$V_{j,n}(x,y)=D_{j,n}C_{n-j}^{1+1}(x)C_{n-j}^{1+1}(y). \tag{8}$$

Найдем вид $D_{n,j}$. Полагая в (5) $y=1$, имеем

$$V_{j,n}(x,1)=\int_{-1}^{1}\left(1-\zeta^2\right)^j C_{n-j}^{j+1}(x)d\zeta,$$

что вместе с (8) при $y=1$ приводит к равенству

$$D_{j,n}C_{n-j}^{1+1}(1)=\int_{-1}^{1}\left(1-\zeta^2\right)^j d\zeta=2\int_{0}^{1}\left(1-\zeta^2\right)^j d\zeta.$$

Подсчитаем интеграл

$$Q_j=2\int_{0}^{1}\left(1-\zeta^2\right)^j d\zeta.$$

Положив $\zeta=\cos\varphi$, имеем $Q_j=I_{2j+1}$, где

$$I_{2j+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2j+1}\varphi\, d\varphi .$$

Дважды применим правило интегрирования по частям. Приходим к формуле приведения $(2j+1)I_{2j+1} = 2jI_{2j-1}$. Пользуясь ею, находим

$$Q_j = \frac{4^j\, j!\, j!}{(2j+1)!} .$$

Иначе Q_j можно найти, представляя $\left(1-\zeta^2\right)^j$ по формуле бинома Ньютона и затем выполняя почленное интегрирование полученного полинома.

Итак, учитывая, что [3, с. 408, форм. 6.95]

$$C_{n-j}^{j+1}(1) = \binom{n+j+1}{n-j} = \frac{(n+j+1)\ !}{(2j+1)\ !(n-j)\ !},$$

находим

$$D_{j,n} = \frac{2Q_j}{C_{n-j}^{j+1}(1)} = \frac{2\cdot 4^j\,(j!)^2\,(n-j)\ !}{(n+j+1)\ !}$$

и, согласно (8),

$$V_{j,n}(x,1) = 2^{2j+1}\frac{(j!)^2\,(n-j)\ !}{(n+j+1)\ !} C_{n-j}^{1+1}(x)\, C_{n-j}^{1+1}(y) .$$

Для коэффициентов $A_{j,n}(x,y)$ в формуле (4) имеем

$$A_{j,n}(x,y) = \frac{4^j\,(j!)^2\,(n-j)\ !(2j+1)}{(n+j+1)\ !}\left(1-x^2\right)^{\frac{j}{2}}\left(1-y^2\right)^{\frac{j}{2}} C_{n-j}^{1+1}(x)\, C_{n-j}^{1+1}(y) .$$

Лемма доказана.

Приведенное доказательство выполнено после ознакомления с работой [4].

Лемму 3 можно доказать иначе, воспользовавшись формулой [3, с. 407, форм. 6.923]

$$C_n^{\lambda}(\cos\psi\cos\theta+\sin\psi\sin\theta\cos\varphi)=\frac{\Gamma(2\lambda-1)}{[\Gamma(\lambda)]^2}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k}\,(n-k)![\Gamma(\lambda+k)]^2}{\Gamma(2\lambda+n+k)}(2\lambda+2k-1)\sin^k\psi\sin^k\theta\, C_{n-k}^{\lambda+k}(\cos\psi)C_{n-k}^{\lambda+k}(\cos\theta)C_k^{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos\varphi),$$

где φ,ψ,θ – действительные, $\lambda \neq \frac{1}{2}$, доказанной в [5].

5. Теорема *Коэффициенты* $Q_{m,l}(\tau)$ *в разложении* (2) *функции* $U_m(\cos\gamma)$ *неотрицательны.*

Доказательство. Положим в (3) $x = y = \sqrt{1-e^{-\tau}}$, $\zeta = \cos\theta$. Учитывая, что $\cos\gamma = \left(1-e^{-\tau}\right)+e^{-\tau}\cos\theta$, получим

$$U_n(\cos\gamma) = \sum_{j=0}^{n} D_{j,n}e^{-j\tau}\left[C_{n-j}^{1+1}\left(\sqrt{1-e^{-\tau}}\right)\right]^2 P_j(\cos\theta), \tag{9}$$

где коэффициенты при $P_j(\cos\theta)$, очевидно, неотрицательны. Для завершения доказательства воспользуемся формулой [3, с. 394, форм. 6.8.12 (4)]

$$P_j(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{j} \frac{(2l)\ !(2j-2l)\ !}{4^j\,(l!)^2\,(l-j)\ !}\cos(j-2l)\theta,$$

подстановка которой в (9) позволяет увидеть, что $U_m(\cos\gamma)$ представляется многочленом от $\cos\theta$ с неотрицательными коэффициентами. Вместе с (2) это показывает, что $Q_{m,l}(\tau) > 0$ при $0 < \tau < +\infty$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Имеет место неравенство* $Y'_{s,n}(\tau, s/(n-s)) < 0$, $0 < \tau < +\infty$, $n \in N \setminus \{1\}$, $s = 1, 2, ..., n$.

Действительно, из статьи [2] известно, что $Q_{n,n-s}(\tau) = -Y'_{s,n}(\tau, s/(n-s))$. Так как $Q_{n,n-s}(\tau) > 0$, то $Y'_{s,n}(\tau, s/(n-s)) < 0$. Следствие доказано.

Следствие 2. *Экспоненциальный многочлен Бранжа* $Y_{s,n}(\tau)$ *на* $(0, +\infty)$ *положительно определен.*

Действительно, в силу следствия 1 и $Y_{s,n}(+\infty, s/(n-s)) = 0$ имеем $Y_{s,n}(\tau, s/(n-s)) > 0$. Следствие доказано.

Опираясь на доказанную теорему и ее следствия, можно доказать – первым это сделал Бранж – что известный функционал Милина на классе S не принимает отрицательных значений. Поэтому в силу леммы Лебедева – Милина модуль n-го коэффициента функций класса S удовлетворяют неравенству $|c_n| \le n$, справедливость которого предполагалась Бибербахом (гипотеза Бибербаха, 1916 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Томский госуниверситет, 2001. 220 с.
2. *Александров И.А.*, *Юферова Г.А.* К доказательству неравенства Бибербаха // Вестник ТГУ. 2007. № 297 (апрель). С. 141 – 145.
3. *Градштейн И.С.*, *Рыжик И.М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М.: Изд-во физико-математической литературы, 1951. 446 с.
4. *Wolfram Koef.* Dieter Schmersau Weinstain's functions and the Askey – Gasper identity [http://www.opus.kobv.de/]. UPL: http://www.opus.kobv.de/zib/volltexte/1996/ 217/ps/SC-96-06.ps. Дата обращения 28.02.96.
5. *Уиттекер Е.Т.*, *Ватсон Г.Н.* Курс современного анализа. М.-Л.: ГТТИ, 1934. Ч. 2.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

АЛЕКСАНДРОВ Игорь Александрович – чл.-корр. РАО, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: ma@math.tsu.ru.

ЮФЕРОВА Галина Александровна – аспирант механико-математического факультета ТГУ. E-mail: galaOk@mail.ru.

Статья принята в печать 20.04.2009 г.