На правах рукописи

АСТАФЬЕВА Елена Владимировна

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ РЕКЛАМЫ НА ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ФИРМЫ, ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ОДНОРОДНУЮ ПРОДУКЦИЮ

05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск 2006

Работа выполнена в Томском государственном университете

Научный руководитель:

Доктор физ.-мат. наук, профессор **Терпугов** Александр Федорович

Официальные оппоненты:

Доктор физ.-мат. наук, профессор **Кошкин** Геннадий Михайлович;

Кандидат физ.-мат. наук **Китаева** Анна Владимировна

Ведущая организация:

Сибирский государственный аэрокосмический университет

(г. Красноярск)

Защита состоится 18 мая в 12-30 в ауд. 104 второго учебного корпуса Томского государственного университета.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Отзывы на автореферат, в двух экземплярах, подписанные и заверенные печатью, просьба направлять по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, ученому секретарю ТГУ Буровой Н.Ю.

Автореферат разослан апреля 2006 г

Ученый секретарь

Диссертационного Совета А.В.Скворцов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Огромную роль в сохранении и упрочнении позиций фирмы на рынке играет реклама. Реклама, как известно, «двигатель торговли». Перед любой фирмой, производящей товар, встает проблема его сбыта, и поэтому, как правило, в качестве основной цели рекламной кампании фирмы называют увеличение сбыта или поддержание его на прежнем уровне. Сбыт является универсальным средством измерения качества работы фирмы в силу его первоочередной важности для предприятия. Реклама влияет на сбыт в основном через повышение уровня известности продукта и предприятия, и создание образа продукта и предприятия. Но для того, чтобы реклама работала, нужно разработать стратегию рекламной кампании.

Несмотря на то, что разработка стратегии рекламной кампании дает фирме возможность успешно справляться со своими проблемами сбыта, даже позволяет успешней конкурировать с другими фирмами, ее проведение ставит очень много вопросов, таких как

– сроки начала рекламной кампании и, возможно, ее окончания;

– количество средств, выделяемых на начальном этапе в период «раскрутки» товара;

– количество средств, выделяемых на рекламу, когда товар уже приобрел популярность и эту популярность необходимо поддерживать;

– если спрос на товар претерпевает сезонные изменения, то как средства, выделяемые на рекламу, должны меняться со временем;

– если присутствует эффект «надоедания» рекламы, то когда менять рекламные ролики и другие рекламные приемы и какие средства и в какие моменты времени выделять на смену рекламы.

Все это вызывает необходимость теоретического исследования и разработки математических моделей рекламных компаний. К сожалению, математическая теория рекламы еще только зарождается и работ в этой области мало. Этим и определяется актуальность настоящей работы, в которой делается попытка построить математическую модель влияния рекламы на деятельность фирмы, производящей однородный товар, и рассмотреть некоторые вопросы оптимизации расходов на рекламу с течением времени.

Состояние проблемы. Теория рекламы развивалась в рамках теории менеджмента и в большинстве своем осуществлялась зарубежными исследователями. Постановка и решение целевых задач принадлежат таким известным авторам, как Дж. Стиглер, Ж.-Ж. Ламбен, М. Стигеман, М. Роберстс, К. Багвел.

Наиболее популярной при решении задач, описывающих системы управления рекламными коммуникациями, является теория игр, применяемая С. Марковицем, У. Доразелски, Дж. Беккером, К. Мёрфи и др.

Традиционные подходы к формализации рекламного соревнования в области динамических игр были разработаны Дж. Эриксоном, И. Докнером и С. Йоргенсоном; модели риска, пассивные конкурирующие модели, и модели функции реакции потребителей – Дж. Фейхтингером, и Р. Хартлом. Теоретические и эмпирические исследования с применением этих подходов нашли отражение в работах К. Дила, Дж. Соргера, Дж. Эриксона, П. Чинтагуты и Н. Вилкассимы, а в контексте эмпирических динамических игр олигополии – в трудах М. Роберста, Л. Самуэльсона, Ф. Гасми.

М. Видал и Х. Вольф на основе работ К. Ланкастера развили альтернативное направление, предполагающее, что рекламирование непосредственно воздействует на изменение объемов продаж и расширение рыночной доли фирмы.

Среди отечественных исследований следует отметить работы И.П. Бородиной.

Наибольшим математическим уровнем отличаются работы Д.Д. Ахмедовой, О.А. Змеева, В.М. Каца, К.И. Лившица и А.Ф. Терпугова по влиянию рекламы на деятельность страховой компании.

В этих работах авторы описывают степень влияния рекламы некоторой функцией $R(t)$, которая меняется со временем и которая зависит от величины средств $\alpha(t)$, выделяемых на рекламную компанию. Считается, что эта функция влияет на интенсивность потока клиентов, желающих застраховать свои риски. Все указанные выше авторы рассматривают лишь линейный случай, когда зависимость $R(t)$ от $\alpha(t)$ имеет вид:

а) $R(t) = \kappa \cdot \alpha(t)$ (работы О.А. Змеева). В этом простейшем случае не учитывается эффект последействия рекламы и считается, что она мгновенно забывается после окончания рекламной кампании.

б) Зависимость $R(t)$ от $\alpha(t)$ имеет вид

$$\frac{dR}{dt} + \kappa R(t) = \alpha(t)$$

(работы Д.Д. Ахмедовой). В этой модели учитывается память на проведенную рекламную кампания, и реклама забывается постепенно.

в) Зависимость $R(t)$ от $\alpha(t)$ имеет вид

$$R(t) = \int_0^t h(t-\tau)\alpha(\tau)d\tau,$$

что дает общий случай линейной зависимости (работы В.М. Каца и К.И. Лившица).

Во всех этих работах рассматривается задача об определении оптимального вида функции $\alpha(t)$. Для решения задачи используется принцип максимума Понтрягина и во всех случаях получается, что управление расходом средств на рекламу имеет релейный характер, то есть $\alpha(t)$ имеет следующий вид:

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le T_1, \\ \alpha_m, & T_1 < t \le T_2, \\ 0, & t > T_2, \end{cases}$$

то есть в какой-то момент расходы на рекламу «включаются» и в какой-то момент расходы на рекламу «выключаются».

Критерием оптимальности является величина прибыли, полученной страховой компанией на каком-то фиксированном временном отрезке $[0,T]$.

Следует отметить, что в указанных выше работах учитываются некоторые специфические черты, присущие деятельности страховых кампаний, так что эти результаты не носят универсального характера.

Цель работы. Целью данной работы является разработка математической модели влияния рекламы на деятельность фирмы, производящей некоторый однородный товар, решение задачи об оптимальном распределении во времени средств, выделяемой фирмой на рекламу. Критерием оптимальности является прибыль фирмы в единицу времени или прибыль на фиксированном интервале времени.

Методика исследования. Исследование носит теоретический характер, и основными математическими методами являются теория обыкновенных дифференциальных уравнений, теория оптимального управления в форме принципа максимума Понтрягина, вариационное исчисление, асимптотические методы.

Инструментально-методологический аппарат составляют статистические и эконометрические исследования социально-экономических явлений рынка, методы оптимизации, численные методы. Наряду с аналитическими методами на основе программных продуктов Microsoft Excel и Mathcad разработаны средства программной поддержки, позволяющие оценивать решение поставленных задач.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Математическая модель влияния рекламы на прибыль фирмы, производящей однородную продукцию (линейная и нелинейная модели).

2. Оптимальное распределение во времени расходов на рекламу при стационарном спросе на продукцию фирмы.

3. Оптимальное распределение во времени расходов на рекламу при нестационарном спросе на продукцию фирмы. Эффект опережения расходов на рекламу изменения спроса на товар.

4. Математическая модель влияния рекламы, учитывающую эффект «надоедания» рекламы и оптимальное распределение во времени расходов на рекламу в этом случае.

Научная новизна. Предлагаемые математические модели влияния рекламы являются новыми. Новыми являются также решения оптимизационных задач об оптимальном во времени распределении расходов на рекламу, максимизирующие прибыль фирмы в единицу времени или прибыль на фиксированном интервале времени.

Теоретическая значимость. Предложенные математические модели влияния рекламы на деятельность фирмы могут быть обобщены и перенесены на другие объекты хозяйственной деятельности, а также на фирмы, занимающиеся сбытом продукции. Интерес представляет также получающаяся временная структура расходов на проведение рекламных компаний.

Практическое значение работы, по мнению автора, состоит в том, что, после проведения соответствующих эконометрических исследований, полученные в работе рекомендации могут быть использованы при планировании рекламных компаний.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на научных конференциях:

1. Третья Всероссийская ФАМ'2004 конференция. Красноярск, 2004 г.
2. Четвертая Всероссийская ФАМ'2004 конференция. Красноярск, 2005 г.
3. 8^{th} Korea-Russian international symposium on science and technology. Tomsk, 2004.
4. IV Всероссийская научно-практическая конференция «Информационные технологии и математическое моделирование». Анжеро-Судженск, 2005 г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 10 печатных работ.

Логическая **структура диссертации** последовательно раскрывает цель и задачи исследования, состоит из введения, трех глав, заключения, библиографического списка из 70 наименований (включая справочники Интернет) и 1 приложения, изложена на 108 страницах, содержит 11 рисунков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Нумерация формул совпадает с нумерацией в основном тексте.

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационного исследования, степень ее разработанности, сформулирована цель, представлены его теоретические и методологические обоснования, изложены основные положения, выносимые на защиту, раскрыта научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы.

В **первой главе «Математическая модель рекламной компании при фиксированной цене продажи товара»** рассматривается математическая модель рекламной кампании при фиксированной цене продажи товара. Предполагается, что на проведение рекламной кампании фирма выделяет $\alpha(t)$ денег в единицу времени. Степень влияния рекламы $R(t)$ зависит от расходов на рекламу $\alpha(t)$ следующим образом:

$$\left|\kappa_1 \frac{dR}{dt}\right|^{\gamma} \operatorname{sgn}\left(\frac{dR}{dt}\right) + R(t) = \kappa_0 \alpha(t). \qquad (1.1)$$

В дальнейшем комбинация $|z|^{\gamma}\operatorname{sgn}(z)$, определенная для $-\infty < z < +\infty$, обозначается как z^{γ}. Кроме того, вместо времени часто рассматривается безразмерная величина $\tau = t/\kappa_1$, при переходе к которой уравнение (1.1) имеет вид

$$\left|\frac{dR}{d\tau}\right|^{\gamma} \operatorname{sgn}\left(\frac{dR}{d\tau}\right) + R(\tau) = \kappa_0 \alpha(\tau).$$

В п.1.2 ставится задача оптимизации. Пусть $q(R(\tau))$ есть объем продаж в единицу времени, зависящий от влияния рекламы в этот момент времени. Фирма должна провести рекламную кампанию товара таким образом, чтобы к моменту времени *T* прибыль, полученная от продажи товара, проданного по цене *p*, и расходами на производство единицы продукции *c*

$$\kappa_0 \Pi(T) = \int_0^T \left[\kappa_0 (p-c) q(R(\tau)) - \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma} - R(\tau)\right] d\tau \qquad (1.5)$$

была максимальна.

Критерий оптимальности определяется следующим образом: $\Pi(t) \Rightarrow \max\limits_{R(t)}$.

В п.1.3 рассматривается стационарный режим рекламы. Если $R(\tau) = R_0 = \text{const}$, то желание добиться максимума, приводит к требованию $aq(R_0) - R_0 \Rightarrow \max\limits_{R_0}$, что, в свою очередь, дает уравнение для R_0:

$$aq'(R_0) = 1. \qquad (1.7)$$

В п.1.4 рассматривается задача нахождения оптимального вида функции $\alpha(t)$, обеспечивающего максимизацию доходов кампании от реализации товара, когда параметр $\gamma = 1$.

В п.1.4.1 описывается влияние рекламы, которое приводит к смещению зависимости «спрос-цена» параллельно самой себе. Это факт учитывается тем, что величина a считается зависящей от R, и есть зависимость «спрос (q)–цена (p)» имеет вид

$$p + bq = a(R), \text{ или } p = a(R) - bq. \tag{1.9}$$

Считается, что $a(R)$ монотонно возрастает с ростом R, но $a'(R)$ монотонно убывает с ростом R и существует конечный предел $\lim\limits_{R\to\infty} a(R)$.

В п.1.4.2 выводится уравнение для стационарного уровня расходов $\alpha_{\text{opt}} = R_{\text{opt}}$, обеспечивающих максимальную прибыль в единицу времени

$$(a(\alpha_{\text{opt}}) - c)a'(\alpha_{\text{opt}}) = 2b. \tag{1.14}$$

В п.1.4.3 ставится следующая задача оптимизации: пусть задан некоторый временной интервал T и фирма хочет провести рекламную кампанию так, чтобы максимизировать свой доход за это время, то есть решить задачу $\Pi(T) \Rightarrow \max\limits_{\alpha(t)}$ при дополнительном ограничении $0 \le \alpha(t) \le \alpha_{\max}$.

Рассматривается рекламная кампания вида:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_{\max}, & \text{при } 0 \le t < T_1, \\ \alpha_{\text{opt}}, & \text{при } T_1 \le t < T - T_2, \\ 0, & \text{при } T - T_2 \le t < T, \end{cases} \tag{1.15}$$

В п.1.4.4 рассматривается случай больших значений T: находится момент окончания «раскрутки» товара и момент выключения рекламы.

Пусть расходы на рекламу имеют вид

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_{\max}, & 0 \le t < T_1, \\ \alpha_{\text{opt}}, & t \ge T_1. \end{cases}$$

Найдены выражение, определяющее прибыль фирмы, и момент окончания «раскрутки» рекламы T_1

$$T_1 = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\alpha_{\max}}{\alpha_{\max} - \alpha_{\text{opt}}}. \tag{1.18}$$

Получено уравнение, определяющее момент выключения рекламы:

$$\frac{[a(\alpha_{\text{opt}} e^{-\kappa T_2}) - c]^2}{4b} = \frac{[a(\alpha_{\text{opt}}) - c]^2}{4b} - \alpha_{\text{opt}}. \tag{1.21}$$

В п.1.4.5 рассматривается случай малых значений T. В данном случае оптимальное выделение средств на рекламу имеет вид

$$\alpha(t)=\begin{cases}\alpha_{\max}, & \text{при } 0\le t<T_1,\\ 0, & \text{при } T_1\le t<T,\end{cases} \qquad (1.22)$$

Найдено уравнение, определяющее оптимальное значение T_1

$$\frac{\kappa}{2b}\int_0^{T-T_1}\left[a(\alpha_{\max}(1-e^{-\kappa T_1})e^{-\kappa z})-c\right]a'(\alpha_{\max}(1-e^{-\kappa T_1})e^{-\kappa z})e^{-\kappa z}dz=1. \qquad (1.26)$$

В п.1.4.6 рассматривается случай, когда под влиянием рекламы изменяется не только коэффициент a, определяющий сдвиг кривой «спрос – цена», но и коэффициент b, определяющий наклон этой кривой. В данном случае зависимость «спрос (q)–цена (p)» имеет вид $p=a(R)-b(R)q$ и оптимальный объем производства будет равен $q=(a(R)-c)/b(R)$.

Рассматриваемая ситуация будет описываться системой уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{d\Pi(t)}{dt}=\dfrac{(a(R)-c)^2}{4b(R)}-\alpha(t),\\ \dfrac{dR(t)}{dt}+\kappa R(t)=\kappa\alpha(t).\end{cases} \qquad (1.27)$$

Получено выражение для определения стационарного уровня расходов на рекламу

$$2(a(\alpha)-c)a'(\alpha)b(\alpha)-(a(\alpha)-c)^2b'(\alpha)=4b^2(\alpha), \qquad (1.28)$$

Найдено выражение для нахождения прибыли фирму при малых значений T и уравнение, определяющее оптимальное значение T_1

$$\kappa\int_0^{T-T_1}\frac{2(a(\varphi(z))-c)a'(\varphi(z))b(\varphi(z))-(a(\varphi(z))-c)^2b'(\varphi(z))}{4b^2(\varphi(z))}e^{-\kappa z}dz=1, \qquad (1.32)$$

В п. 1.4.7 рассматривается общий случай, когда зависимость «спрос (q)–цена (p)» имеет вид $F(p,q)=0$, или, в явном виде, $p=f(q)$.

Получено выражение для определения стационарного уровня расходов на рекламу

$$q(\alpha)\left[b'(\alpha)a(\alpha)q(\alpha)f'(b(\alpha)q(\alpha))-a'(\alpha)f(b(\alpha)q(\alpha))\right]=a^2(\alpha). \qquad (1.37)$$

Получены формулы для определения момента T_2 – момента окончания рекламной кампании

$$\Phi(\alpha_{\text{opt}}e^{-\kappa T_2})=\Phi(\alpha_{\text{opt}})-\alpha_{\text{opt}} \qquad (1.39)$$

и оптимального значение T_1

$$\kappa \int_0^{T-T_1} \Phi'\left(\alpha_{\max}(1-e^{-\kappa T_1})e^{-\kappa z}\right)e^{-\kappa z}\,dz = 1, \qquad (1.43)$$

где $$\Phi(R) = \left[\frac{1}{a(R)} f(b(R)q(R) - c\right]q(R).$$

В 1.5 находится оптимальный вид функции $\alpha(t)$, обеспечивающий максимизацию доходов компании от реализации товара, когда параметр $\gamma > 1$.

Используя метод вариационного исчисления, получено уравнение для определения оптимального вида $R(t)$

$$t = (\gamma-1)^{1/\gamma} \int_0^{R(t)} \frac{dz}{\left[a\left(q(R(T)) - q(z)\right) - \left(R(T) - z\right)\right]^{1/\gamma}},$$

где значение $R(T)$ определяется уравнением

$$T = (\gamma-1)^{1/\gamma} \int_0^{R(T)} \frac{dz}{\left[a\left(q(R(T)) - q(z)\right) - \left(R(T) - z\right)\right]^{1/\gamma}}. \qquad (1.49)$$

В п.1.5.1 рассмотрен частный случай, когда объем продаж в зависимости от степени влияния рекламы R имеет вид

$$q(R) = q_m - (q_m - q_0)e^{-\beta R}. \qquad (1.52)$$

Найдено условие эффективности рекламы $a(q_m - q_0)\beta > 1$ и стационарное значение R_0

$$R_0 = \ln\left(a(q_m - q_0)\beta\right)/\beta. \qquad (1.53)$$

Построены графики зависимости T от $R(T)$ для значений $R(T)$ из области $0 < R(T) < R_0$.

В п.1.5.2 найдено выражение для определения расходов на рекламу

$$\alpha(t) = \frac{a\left(q(R(T)) - q(R(t))\right) - \left(R(T) - R(t)\right)}{\kappa(\gamma-1)}$$

В п.1.5.3 рассматривается процесс, когда незадолго до окончания периода деятельности T выделение расходов на рекламу прекращается и до конца этого периода процесс идет «по инерции».

Предполагается, что длительность периода деятельности T достаточно велика и устанавливается $R(t) = R_0$.

Получено уравнение для определения T_* – момента выключения рекламы

$$aq\left(\left[R_0^{(\gamma-1)/\gamma}-\frac{\gamma}{\gamma-1}T_*\right]^{\gamma/(\gamma-1)}\right)=aq(R_0)-\frac{1}{\kappa_0}R_0. \tag{1.56}$$

В п.1.5.4 рассматривается смещение зависимости «спрос-цена» параллельно самой себе, когда параметр $\gamma>1$.

Задача оптимизации имеет вид:

$$\Pi(T)=\int_0^T\left[\frac{(a(R)-c)^2}{4b}-\frac{1}{\kappa_0}\left(R(\tau)-\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma}\right)\right]d\tau\Rightarrow\max_{R(\tau)} \tag{1.59}$$

Получено уравнение, для определения оптимального уровня рекламы $R(t)$:

$$t=(\gamma-1)^{1/\gamma}\int_0^{R(t)}\frac{dz}{\left[\frac{\kappa_0}{4b}\left((a(R(T))-c)^2-(a(R(z))-c)^2\right)-(R(T)-R(z))\right]^{1/\gamma}},$$

где $R(T)$ определяется из уравнения

$$T=(\gamma-1)^{1/\gamma}\int_0^{R(T)}\frac{dz}{\left[\frac{\kappa_0}{4b}\left((a(R(T))-c)^2-(a(R(z))-c)^2\right)-(R(T)-R(z))\right]^{1/\gamma}}. \tag{1.64}$$

В п.1.5.4.1 рассмотрен частный случай, когда объем продаж товара $q(R(t))$ имеет вид

$$q(R(t))=\frac{a_m-(a_m-a_0)e^{-\beta R(t)}-c}{2b}. \tag{1.65}$$

Найдено стационарное значение R_0

$$R_0=\frac{1}{\beta(a_m-a_0)}\ln\frac{2\beta}{\beta(a_m-c)-\sqrt{(\beta(a_m-c))^2-8b\beta}}. \tag{1.66}$$

В п.1.5.5 рассматривается смещение зависимости «спрос-цена» под некоторым углом, когда параметр $\gamma>1$.

Получено уравнение, для определения эффективности рекламы $R(t)$:

$$t=(\gamma-1)^{1/\gamma}\int_0^{R(t)}\frac{dz}{\left[\frac{\kappa_0}{4}\left(\frac{(a(R(T))-c)^2}{b(R(T))}-\frac{(a(R(z))-c)^2}{b(R(z))}\right)-(R(T)-R(z))\right]^{1/\gamma}},$$

где $R(T)$ определяется из уравнения

$$T = (\gamma - 1)^{1/\gamma} \int\limits_0^{R(T)} \frac{dz}{\left[\frac{\kappa_0}{4}\left(\frac{(a(R(T)) - c)^2}{b(R(T))} - \frac{(a(R(z)) - c)^2}{b(R(z))} \right) - (R(T) - R(z)) \right]^{1/\gamma}}. \quad (1.77)$$

В п.1.5.5.1 Рассмотрен частный случай, когда объем продаж товара $q(\tau)$ имеет вид

$$q(\tau) = \frac{a_m - (a_m - a_0)e^{-\beta R(\tau)} - c}{4(b_m - (b_m - b_0)e^{-\beta R(\tau)})}. \quad (1.78)$$

Найдено выражение для определения стационарного значения R_0

$$\begin{aligned} &2\left(a_m - (a_m - a_0)e^{-\beta R_0} - c\right)\left(a_m - a_0\right)e^{-\beta R_0}\beta\left(b_m - (b_m - b_0)e^{-\beta R_0}\right) - \\ &-\left(a_m - (a_m - a_0)e^{-\beta R_0} - c\right)^2 (b_m - b_0)e^{-\beta R_0} = 4\left(b_m - (b_m - b_0)e^{-\beta R_0}\right)^2, \end{aligned}$$

В п.1.6 находится оптимальный вид функции $\alpha(t)$, обеспечивающий максимизацию доходов компании от реализации товара, когда параметр $0 < \gamma < 1$.

Во **второй главе «Математическая модель рекламной компании, когда цена продажи товара зависит от времени»** рассмотрена математическая модель рекламной кампании, когда цена продажи товара зависит от времени. Данная ситуация возникает при сезонных колебаниях спроса на какой-либо товар.

В п.2.1–2.2 ставится задача оптимизации. Предполагается, что на проведение рекламной компании фирма выделяет $\alpha(t)$ денег в единицу времени. Доход фирмы от продажи товара $\Pi(t)$, полученный к моменту времени t, зависит от объема продаж в единицу времени $q(t)$. Количество товара, продаваемого в единицу времени, зависит от эффективности рекламы $R(t)$ и выражается соотношением $q(t, R) = g(t)\gamma(R(t))$, где сомножитель $g(t)$ определяет потенциальный спрос, и фирма должна провести рекламную компанию товара таким образом, чтобы к моменту времени T прибыль, полученная от продажи товара, проданного по цене p,

$$\Pi(T) = \int\limits_0^T \left[(p - c)g(t)\gamma(R(t)) - R(t) - \frac{1}{\kappa} R'(t) \right] dt \Rightarrow \max_{R(t)}. \quad (2.3)$$

была максимальна.

Найдено условие существования стационарного решения

$$(p-c)g_m\gamma'(0)>1. \qquad (2.6)$$

В п. 2.3 находится выражение для нахождения оптимального управления $\alpha(t)$ при наличии ограничения вида $\alpha(t)\geq 0$ (используется принцип максимума Понтрягина).

В п.2.3.1 и п.2.3.2 рассматриваются частные случаи, когда зависимость величины продаж от рекламы имеют вид

$$\gamma(R)=1+\gamma_0(1-\exp(-\beta R)). \qquad (2.12)$$

и

$$\gamma(R)=\frac{1+\gamma_0\beta R}{1+\beta R}. \qquad (2.17)$$

Построены графики, наглядно показывающие поведение кривых: спрос, уровень рекламы и расходы на рекламу.

В п. 2.4 рассматривается смещение кривой «спрос–цена» параллельно самой себе с течением времени.

В п.2.4.1 предполагая, что зависимость «спрос (q)–цена (p)» имеет вид $p+bq=g(t)a(R)$ и объем товара $q(t)$, производимого фирмой в момент времени t имеет вид $q(t)=\dfrac{g(t)a(R(t))-c}{2b}$, найдено условие существования стационарного решения

$$(g_m a(0)-c)g_m a'(0)\geq 2b \qquad (2.30)$$

В п. 2.4.2 рассматривается решение задачи оптимизации при наличии ограничений $\alpha(t)\geq 0$. Для нахождения оптимального управления $\alpha(t)$ используется принцип максимума Понтрягина.

В п.2.4.3 рассмотрен частный случай, когда $a(R)= =a_m-(a_m-1)\exp(-\beta R)$. Найден вид зависимости уровня рекламы от времени

$$R(t)=\frac{1}{\beta}\left[\ln\left(\frac{2g(t)(a_m-1)}{g(t)a_m-c}\right)-\ln\left(1-\sqrt{1-\frac{8b}{\beta(g(t)a_m-c)^2}}\right)\right]. \qquad (2.35)$$

и получено условие существования стационарного решения

$$(g_m-c)g_m\beta(a_m-1)\geq 2b. \qquad (2.36)$$

В п.2.4.4 рассмотрен частный случай, когда $a(R)=1+\sqrt{\beta R}$.

Найден вид зависимости уровня рекламы от времени

$$R(t)=\frac{\beta(g(t)-c)^2 g^2(t)}{\left(4b-\beta g^2(t)\right)^2}, \tag{2.40}$$

В п. 2.5 рассмотрено поведение кривой «спрос-цена», когда ее наклон зависит от времени. Это факт учитывается тем, что коэффициент b, определяющий наклон кривой «спрос-цена» также меняется с течением времени.

Найдено условие существования стационарного режима

$$\forall t \quad (g(t)a(0)-c)g(t)a'(0)\ge 2b(t), \tag{2.48}$$

В п. 2.5.1 рассмотрен частный случай, когда

$$a(R)=1+\sqrt{\beta R}.$$

Найден вид оптимального уровня рекламы

$$R(t)=\frac{\beta(g(t)-c)^2 g^2(t)}{\left(4b(t)-\beta g^2(t)\right)^2}, \tag{2.52}$$

В п. 2.6 рассматривается решение задачи оптимизации путем разложения уравнения Эйлера в ряд по степеням малого параметра.

Так как количество товара, продаваемого в единицу времени, зависит от R и выражается соотношением $q(\tau,R)=g(\tau)h(R)$ ($g(\tau)$ определяет потенциальный спрос в зависимости от времени, $h(R)$ учитывает влияние рекламы), поэтому данная ситуация описываться системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{d\Pi(\tau)}{d\tau}=(p-c)g(\tau)h(R(\tau))-\alpha(\tau)-d,\\ \left(\dfrac{dR(\tau)}{d\tau}\right)^{\gamma}+R(\tau)=\kappa_0\alpha(\tau),\end{cases} \tag{2.53}$$

с начальными условиями $R(0)=0$, $\Pi(0)=0$.

В качестве критерия оптимальности рекламной кампании вновь выбирается максимизация прибыли за временной интервал T.

В п. 2.6.1 с помощью метода вариационного исчисления найдено уравнение Эйлера

$$\frac{(\gamma-1)}{\kappa_0}\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma}=(p-c)\left(g(T)h(R(T))-g(\tau)h(R(\tau))\right)-\frac{1}{\kappa_0}\left(R(T)-R(\tau)\right). \tag{2.58}$$

Для случая, когда $g(t) = g_0 + \varepsilon g_1(t)$ получено его решение в виде разложения в ряд по степеням ε.

В п. 2.6.2 рассматривается частный случай, когда

$$h(R) = 1 + \gamma_0\left(1 - \exp(-\beta R)\right) \tag{2.79}$$

$$g_1(\tau) = g_1 \sin(2\pi\frac{\tau}{T} + \varphi) \tag{2.80}$$

Найден явный вид расходов на рекламу

$$\alpha(\tau) = \frac{1}{\kappa_0}R_0 + \lambda\sin(2\pi\frac{\tau}{T} + \varphi) + \left(\lambda\frac{2\pi}{T}\cos(2\pi\frac{\tau}{T} + \varphi)\right)^{\gamma}. \tag{2.83}$$

В п. 2.6.3 рассматривается смещение кривой «спрос-цена» параллельно самой себе при $\gamma > 1$.

С помощью метода вариационного исчисления найдено уравнение Эйлера и получено его решение путем разложения в ряд по степеням ε.

В п. 2.6.3.1 рассмотрен частный случай, когда

$$a(R) = a_m - \left(a_m - a_0\right)\exp(-\beta R) \quad , \tag{2.96}$$

$$g_1(\tau) = g_1 \sin(2\pi\frac{\tau}{T} + \varphi), \tag{2.97}$$

и найден явный вид расходов на рекламу

В п. 2.6.4 рассматривается смещение кривой «спрос-цена» под некоторым углом при $\gamma > 1$.

С помощью метода вариационного исчисления найдено уравнение Эйлера

$$\frac{\gamma - 1}{\kappa_0}\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{\gamma} = \frac{1}{4}\left[\frac{\left(a(R(T)) - c\right)^2}{b(R(T))}g(T) - \frac{\left(a(R(\tau)) - c\right)^2}{b(R(\tau))}g(\tau)\right] - \frac{1}{\kappa_0}\left[R(T) - R(\tau)\right]$$

и получено его решение путем разложения в ряд по степеням ε.

В п. 2.6.4.1 рассмотрен частный случай, когда

$$a(R) = a_m - \left(a_m - a_0\right)\exp(-\beta R) \tag{2.112}$$

$$b(R) = b_m - \left(b_m - b_0\right)\exp(-\beta R) \tag{2.113}$$

Найден явный вид расходов на рекламу $\alpha(t)$

В **третьей главе «Математическая модель рекламной компании с «эффектом» надоедания рекламного ролика»** делается попытка исследовать эффект «надоедания» рекламы, когда продолжающаяся однообразная реклама надоедает человеку, и он перестает обращать на нее внимание, и она не влияет на его покупки и учесть его при планировании рекламной кампании.

В п. 3.1 рассматривается рекламная кампания с фиксированной ценой продажи товара.

В п. 3.1.1 и 3.1.2 ставится задача оптимизации. Пусть на рекламу в единицу времени выделяется $\alpha(t)$ денег.

В качестве модели, определяющей зависимость влияния рекламы от времени берется модель

$$\frac{dR(t)}{dt} + \kappa(t)R(t) = \kappa_0\alpha(t). \qquad (3.1)$$

где коэффициент $\kappa(t)$ отражает эффект «надоедания» рекламы, так как увеличение $\kappa(t)$ приводит к увеличению скорости забывания рекламы. Фирма должна провести рекламную кампанию товара таким образом, чтобы к моменту времени T прибыль, полученная от продажи товара, проданного по цене p, была максимальна.

Критерий оптимальности определяется следующим образом: $\Pi(t) \Rightarrow \max\limits_{R(t)}$.

В п. 3.1.3 рассмотрен период раскрутки товара. Пусть рекламный ролик начинает прокручиваться в момент времени $t = 0$. Влияние рекламы в этом случае начинается с того значения, которое осталось после предыдущего ролика, то есть с $R(0)$. На первой фазе «жизни» этого ролика, который составляет интервал времени $[0, T_1]$, на проведение рекламной компании выделяется в единицу времени максимальное количество денег α_m. Так продолжается до тех пор, пока мы не выйдем на стационарный режим, определяемый уравнением

$$q'(R_0(t)) = \frac{\kappa(t)}{\kappa_0}\frac{1}{p-c}. \qquad (3.5)$$

Найдено уравнение для определения момента времени выхода на стационарный участок

$$R_0(T_1) = R(0)\exp\left(-\int_0^{T_1}\kappa(\tau)d\tau\right) + \kappa_0\alpha_m\int_0^{T_1}\exp\left(-\int_u^{T_1}\kappa(v)dv\right)du. \qquad (3.7)$$

Стационарный режим рекламы ведется на интервале $[T_1, T_2]$, при этом поддерживается уровень влияния рекламы, равный $R_0(t)$. Из-за эффекта «надоедания», влияние рекламы постепенно снижается, и когда оно достигает значения $R(0)$, надо запускать новый ролик.

Таким образом, новый цикл определяется условием $R_0(T_2) = R(0)$.

В п. 3.1.5 проводится оптимизация цикла рекламного ролика. В качестве критерия оптимальности принят доход фирмы Р в единицу времени. Получено уравнение для определения общей длины цикла T_2.

В п. 3.2.1–3.2.3 ставится задача оптимизации. Пусть на рекламу в единицу времени выделяется $\alpha(t)$ денег. Рассматривается случай, когда влияние рекламы приводит к смещению зависимости спрос–цена параллельно самой себе. Это факт учитывается тем, что величина *a* считается зависящей от *R*. Фирма должна провести рекламную кампанию товара таким образом, чтобы к моменту времени T прибыль, полученная от продажи товара, проданного по цене *p*, была максимальной.

В п. 3.2.4 рассмотрен период раскрутки рекламы. Эта фаза происходит на интервале времени $[0, T_1]$.

Найдено выражение для определения прибыли фирмы на данном этапе

$$\Pi_1 = \int_0^{T_1} \left[\frac{(a(R(t)) - c)^2}{4b} - \alpha_m \right] dt - DT_1 . \qquad (3.19)$$

В п. 3.2.5 рассматривается стационарный режим рекламы. Эта фаза цикла происходит на временном интервале $[T_1, T_2]$.

Найдено выражение для определения прибыли фирмы на данном этапе

$$\Pi_2 = \int_{T_1}^{T_2} \left[\frac{(a(R_0(t)) - c)^2}{4b} - \frac{1}{\kappa_0} R_0'(t) - \frac{\kappa(t)}{\kappa_0} R_0(t) \right] dt - D(T_2 - T_1). \qquad (3.20)$$

В п. 3.2.6 проводится оптимизация цикла рекламного ролика. В качестве критерия оптимальности берется критерий вида

$$\mathrm{P} = (\Pi_1 + \Pi_2)/T_2 \Rightarrow \max_{T_2} . \qquad (3.22)$$

Получено уравнение для определения общей длины цикла T_2.

В **заключении** приводятся основные результаты работы.

Публикации по работе

Результаты работы опубликованы в следующих статьях и материалах научных конференций:

1. Астафьева Е.В., Терпугов А.Ф. Модель рекламной компании, когда цена продажи товара зависит от рекламы // Обработка данных и управление в сложных системах. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. Вып. 6. - С. 3-13.

2. Астафьева Е.В. Модель рекламной компании при нестационарном спросе // Обработка данных и управление в сложных системах. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. Вып. 7. - С. 3-16

3. Астафьева Е.В., Терпугов А.Ф. Модель рекламной компании с эффектом «надоедания» рекламы // Вестник Томского государственного университета, декабрь 2004. № 284. - С.34-37

4. Астафьева Е.В., Терпугов А.Ф. Математическая модель влияния рекламы на деятельность фирмы // Третья Всероссийская ФАМ'2004 конференция. Программа и тезисы. - Красноярск, 2004. - С. 13-14

5. Астафьева Е.В., Терпугов А.Ф. Модель рекламной компании при фиксированной цене товара // Труды третьей Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. - Красноярск, 2004. Ч. 2. - С. 25-31.

6. Астафьева Е.В.Модель рекламной компании при фиксированной цене товара и нестационарном спросе // Четвертая Всероссийская ФАМ'2005 конференция. Программа и тезисы. - Красноярск, 2005. - С. 19-20

7. Астафьева Е.В.Модель рекламной компании при фиксированной цене товара и нестационарном спросе // Труды четвертой Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. - Красноярск, 2005. Ч. 2. - С. 16-28.

8. Астафьева Е.В. Математическая модель влияния рекламы на деятельность фирмы // Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование». - Томск: Изд-во Том. ун-та, 2005. Ч. 2. - С.89-94

9. Астафьева Е.В. Математическая модель влияния рекламы на деятельность фирмы // Приложение к Вестнику Томского государственного университета 2005.

10. Astafieva Ye.V., Terpugov A.F. Model of an advertising campaign, when the tilt of curve of demand-price depends on advertisement // Proc. of 8th Korea-Russian international symposium on science and technology. - Tomsk: Tomsk polytechnic university, 2004, v.3, - P. 189-192.