На правах рукописи

БОРИСОВ Алексей Владимирович

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА–ПЛАНКА–КОЛМОГОРОВА И НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В ТЕОРИИ КОГЕРЕНТНЫХ КВАНТОВЫХ АНСАМБЛЕЙ

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2006

Работа выполнена в ГОУ ВПО "Томский государственный университет"

Научный руководитель: зав. каф. теоретической физики Томского государственного университета
доктор физико - математических наук,
профессор Шаповалов А.В.

Научный консультант: зав. каф. высшей математики и математической физики Томского политехнического университета
доктор физико - математических наук,
профессор Трифонов А.Ю.

Официальные оппоненты: зав. каф. прикладной и теоретической физики Новосибирского государственного технического университета
доктор физико - математических наук,
профессор Дубровский В.Г.

проректор по международным связям Томского государственного педагогического университета
доктор физико - математических наук,
профессор Эпп В.Я.

Ведущая организация: Московский государственный технологический университет СТАНКИН

Защита состоится 21 сентября в 14–30 ч. на заседании диссертационного совета Д 212.267.07 при ГОУ ВПО "Томский государственный университет" по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан 23 июня 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико - математических наук Ивонин И.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы Когерентные квантовые ансамбли активно изучаются и служат основой для теоретического описания явлений в современной атомной физике, квантовой и нелинейной оптике. В атомной физике интенсивно развиваются новые направления, изучающие воздействие лазерных источников света на поступательные и внутренние степени свободы атомов, которые привели к ряду важных открытий. В 1997 г. С. Чу, К. Коэн-Таннуджи, У. Филлипсу была присуждена Нобелевская премия за достижения в области лазерного охлаждения и захвата нейтральных атомов. Технология лазерного охлаждения позволила достигнуть сверхнизких температур (вплоть до 10^{-9} К) для атомных ансамблей, на основе чего были экспериментально получены разреженные когерентные атомарные ансамбли газов щелочных металлов, взаимодействующие с лазерными полями. Это, в свою очередь, стимулировало развитие атомной оптики и атомной интерферометрии (управление когерентными волнами материи). За получение бозе - эйнштейновского конденсата в разреженных атомарных ансамблях щелочных металлов в 2001 г. были удостоены Нобелевской премии В. Кеттерле, Э. Корнелл и К. Виман. Квантовые атомарные ансамбли охлажденных ионов рассматриваются как системы перспективные для создания квантовых гейтов – элементной базы квантовых компьютеров.

Математические модели систем, описывающие эти атомарные ансамбли, основываются на построении решений нелинейных уравнений, в которых доминирующую роль играют внешние поля, моделирующие конфигурацию магнитооптической ловушки в случае бозе-эйнштейновского конденсата. Это является дополнительным аргументом в пользу актуальности теоретического изучения моделей таких систем. Рассматриваемые системы в приближении самосогласованного поля моделируются нелинейными уравнениями (Фоккера-Планка-Колмогорова, Гросса-Питаевского, Шредингера и д.р.) с переменными коэффициентами, описывающими воздействие внешних полей на систему. Исследуемые в диссертации уравнения имеют более широкое применение и используются в нелинейной оптике, гидродинамике и д.р., поэтому получение решений этих уравнений также является актуальной задачей.

Отметим, что уравнение Гросса-Питаевского совпадает с многомерным нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) с переменными коэффициентами (внешними полями).

Цель работы и задачи исследования:

* применение метода квазиклассических асимптотик к проблеме интегрирования уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова, описывающего состояние атомарного ансамбля в приближении самосогласованного поля для полей произвольной конфигурации;

* компьютерное моделирование кинетики атомарного ансамбля с использованием квазиклассических методов;

* развитие метода квазиклассических асимптотик для многомерного кубично-нелинейного уравнения Шредингера с внешним полем с целью построения многомерных солитоноподобных асимптотических решений;

* изучение распространения локализованных оптических солитоноподобных импульсов в кубично-нелинейной неоднородной среде на основе развитого метода квазикласических асимптотик;

* исследование эволюции солитоноподобных квазиклассических решений НУШ, локализованных в окрестности замкнутой кривой, во внешнем поле изотропного осциллятора.

Методы исследования Для исследования моделей, рассматриваемых в диссертации, используются аналитические квазиклассические методы решения нелинейных уравнений математической физики (в том числе метод комплексного ростка ВКБ-Маслова) в комбинации с методами компьютерного моделирования. Для численного моделирования НУШ с внешними полями специального вида используется стандартный явный численный сеточный метод.

Научная новизна Предложен аналитический метод построения квазиклассических решений асимптотических по малому параметру $\mu \to 0$ для нестационарного уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова, описывающего кинетику ансамбля в полевых конфигурациях произвольной размерности. В комбинации с компьютерным моделирование получено распределения поля взаимодействия атомарного пучка со стоячей волной.

Получено явное аналитическое выражение для главного члена асимптотического по малому параметру $\hbar \to 0$ решения одномерного НУШ со стационарным внешним полем общего вида. Детально проанализировано поведение полученного решения для различных внешних полей специального вида.

Развит метод построения квазиклассических солитоноподобных асимптотических решений для многомерного нелинейного уравнения Шредингера с внешним полем в декартовой системе координат на основе теории комплексного ростка Маслова. В рамках развитого метода предложен специальный метод квазиклассической линеаризации НУШ, основанный на введении особого класса функций и приводящий к соответствующему линейному уравнению (линейному ассоциированному уравнению Шредингера). На введенном классе функций построены квазиклассические асимптотические решения ассоциированного линейного уравнения Шредингера.

По решениям ассоциированного уравнения Шредингера построены квазиклассические состояния, описывающие эволюцию системы в окрестности соответствующей фазовой траектории. Получено уравнение, определяющее эту траекторию.

С целью построения решения во всей области пространства получено явное аналитическое асимптотическое по малому параметру $\hbar \to 0$ решение многомерного НУШ с внешним полем справедливое в локальной области фазового пространства.

В полярной системе координат построено аналитическое выражение для главного члена асимптотического решения НУШ с внешним полем изотропного гармонического осциллятора. Построенное асимптотическое решение локализовано в окрестности замкнутой плоской кривой и является квазиклассическим асимптотическим решением в (1+2) – мерном пространстве-времени и не имеет сингулярностей при соответствующем выборе параметров задачи.

Положения, выносимые на защиту

1. Предложен аналитический метод построения квазиклассических решений асимптотических по малому параметру $\mu \to 0$ для нестационарного уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова, описывающего кинетику ансамбля в полевых конфигурациях произвольной размерности. На основе развитого метода и численного моделирования показано, что существует два режима образования пространственно неоднородных структур в фазовом пространстве ансамблей медленных атомов в произвольных 2-мерных и 3-мерных полевых конфигурациях.

2. Предложен специальный метод квазиклассической линеаризации НУШ, основанный на введенном автором классе функций. На этом классе функций в декартовой системе координат методом комплексного ростка Маслова найдены асимптотические решения ассоциированного линейного уравнения Шредингера. Получен в явном виде главный член квазиклассического со-

литоноподобного асимптотического по малому параметру $\hbar \to 0$ решения многомерного НУШ с внешним полем. Решение описывает эволюцию системы в окрестности соответствующей фазовой траектории. На введенном классе функций построен оператор эволюции НУШ с помощью операторов симметрии.

3. Методом квазиклассических асимптотик и численным моделированием проведен анализ процесса распространения оптических солитонов в кубично-нелинейной неоднородной среде, описываемой одномерным НУШ с переменными коэффициентами. Показана устойчивость солитонного режима распространения в средах с различной плотностью. Описано изменение параметров импульса в процессе распространения.

4. Проведена модификация развитого в работе метода квазиклассических асимптотик для НУШ в полярной системе координат. С помощью модифицированного метода построено асимптотическое решение квазиклассически сосредоточенное в окрестности замкнутой плоской кривой. Получено явное выражение для главного члена асимптотики НУШ с внешним полем изотропного гармонического осциллятора. Указаны параметры начальных условий и поля осциллятора, при которых квазиклассическое решение периодично по времени и не имеет особенностей.

Научная и практическая ценность работы Развитые в работе аналитические методы исследования уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова и полученные солитоноподобные решения многомерного нелинейного уравнения Шредингера с переменными коэффициентами могут быть использованы при рассмотрении широкого круга задач атомной физики. К числу наиболее интересных задач данной области относятся: исследования кинетических характеристик атомарных ансамблей в многоуровневых моделях атомов; нахождение конфигураций полей магнитооптических ловушек, необходимых для получения локализованных неразрушающихся квантовых атомарных ансамблей; исследование распространения солитоноподобных импульсов в неоднородных нелинейных средах.

Полученные в работе результаты исследования кинетики ансамблей медленных атомов могут быть использованы при проектировании полевых конфигураций, выступающих в роли световых масок в технологиях атомной нанолитографии, а также при постановке экспериментов по эффективному захвату и охлаждению нейтральных атомов и при интерпретации результатов этих экспериментов. Получение локализованных не разрушающихся квантовых атомарных ансамблей на охлажденных ионах может рассматривается как перспективный метод для создания квантовых гейтов – элементной базы квантовых компьютеров.

Развитие квазиклассических методов интегрирования представляет самостоятельный интерес для нелинейной математической физики.

Достоверность научных выводов и результатов Предложенные в диссертации теоретические модели и методы расчета опираются на апробированные в квантовой теории поля, квантовой механике и математической физике аналитические методы, на современные общепринятые представления об используемых приближениях (приближение самосогласованного поля, дипольное приближение, резонансное двухуровневое приближение) при описании взаимодействия атомов со световым полем. Достоверность сформулированных в диссертации положений и выводов подтверждается качественным и в ряде случаев количественным согласием полученных результатов с результатами других авторов. Асимптотические решения построены в соответствии с общепринятыми доказанными теоремами об области применимости метода квазиклассических асимптотик. Тестирование численных расчетах проводилось стандартными методами, включающими использование частных аналитических решений, интегралов движения и других критериев корректности численного моделирования.

Апробация работы Основные результаты диссертации обсуждались на семинарах Томского государственного университета, Томского политехнического университета, докладывались на Международной конференции "Математические модели и методы их исследования", Красноярск, 2000; 11 Международной конференции "Theoretical and experimental problems of relativity and gravitation"and International Workshop "Gravity, strings and quantum field theory", ТГПУ Томск, 2002; Международном оптическом конгрессе "Оптика XXI век. Фундаментальные проблемы оптики-2002", Санкт-Петербург, 2002 СПб: СПбГИТМО (ТУ); 10 Международной конференции "Математика. Компьютер. Образование", Пущино, 2003; 3 Международной конференции молодых ученых и специалистов <Оптика - 2003>, Санкт - Петербург, 2003; "XVI Международной летней школе-семинар по современным проблемам теоретической и математической физики. Петровские чтения", Казань, 2004; Международном семинаре "Days on Difraction-2004", St.Petersburg, Russia; Days of diffraction'2005. International seminar. Saint Petersburg, 2005; 12 Международном конгрессе "Математика. Компьютер. Образование", Пущино, 2005; Международной конференции SIGMA (Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications), Киев, 2005.

Публикации Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах [1–9].

Структура и объем работы Диссертация объемом 112 страниц состоит из введения, четырех глав, заключения, списка цитируемой литературы из 161 наименования и включает в себя 10 рисунков и графиков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы основные цели работы, указана новизна результатов, приведена структура и содержание диссертации, перечислены защищаемые положения.

В **первой главе** представлена исходная система уравнений на атомарный оператор плотности и полевые операторы. Кратко описан алгоритм сведения этой системы уравнений к исходному уравнению эволюции на атомарную матрицу плотности. Изложена схема редукции самосогласованных уравнений для атомарного ансамбля, взаимодействующего с квантованным электромагнитным полем, к кинетическому уравнению на функцию распределения атомов ансамбля в фазовом пространстве

$$(\partial_\tau+\mathbf{P}\cdot\partial_{\mathbf{R}})\, f(\mathbf{R},\mathbf{P},\tau)=\Big(\sum_n \partial_{P_n}\Big(\mathfrak{F}_n(\mathbf{R},\mathbf{P})\Big)+\mu\sum_{n,j}\partial_{P_n}\partial_{P_j}\mathfrak{D}_{nj}(\mathbf{R},\mathbf{P})\Big) f(\mathbf{R},\mathbf{P},\tau). \tag{1}$$

Это уравнение является уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова в безразмерном виде с релаксационными членами, учитывающими воздействие квантованного электромагнитного поля, и описывает кинетику атомарного ансамбля в световом поле. Здесь $\mu = \sqrt{2\omega_R\tau_0}$ – параметр квазиклассичности; $\hbar\omega_R = (\hbar k)^2/(2M)$ – энергия отдачи; τ_0 – временной параметр, характеризующий оптическую накачку основного состояния атома в слабых полях; масштабы времени $t_0 = \tau_0/\mu$ ($t = t_0\,\tau$), расстояния $r_0 = 1/k$ ($\mathbf{r} = r_0\,\mathbf{R}$), импульса $p_0 = \hbar k/\mu$ ($\mathbf{p} = p_0\,\mathbf{P}$), а $\mathfrak{F}(\mathbf{R},\mathbf{P})$ и $\mathfrak{D}(\mathbf{R},\mathbf{P})$ безразмерные величины являющиеся квантовомеханическим средним от оператора силы по внутренним степеням свободы и тензором диффузии в импульсном пространстве, соответственно. Параметр μ является малой величиной для приближений, при которых было получено исходное уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова, и имеет вид

$$\mu = \sqrt{T_R/(T_{\mathrm{Dop}}\, S)} = 1/\sqrt{\tilde{M} S}.$$

Здесь $k_B T_R = (\hbar k)^2/(2M)$ — температурный предел, соответствующий энергии отдачи при излучении одного фотона, а $k_B T_{\text{Dop}} = \hbar\gamma/2$ — доплеровский предел охлаждения, γ – постоянная радиационной релаксации для возбужденного состояния атома, $\tilde{M}$ — безразмерная атомная масса, — параметр квазиклассичности. Отметим, что переход к уравнению (1) осуществляется для разреженного атомарного ансамбля в приближении дипольного резонансного взаимодействия.

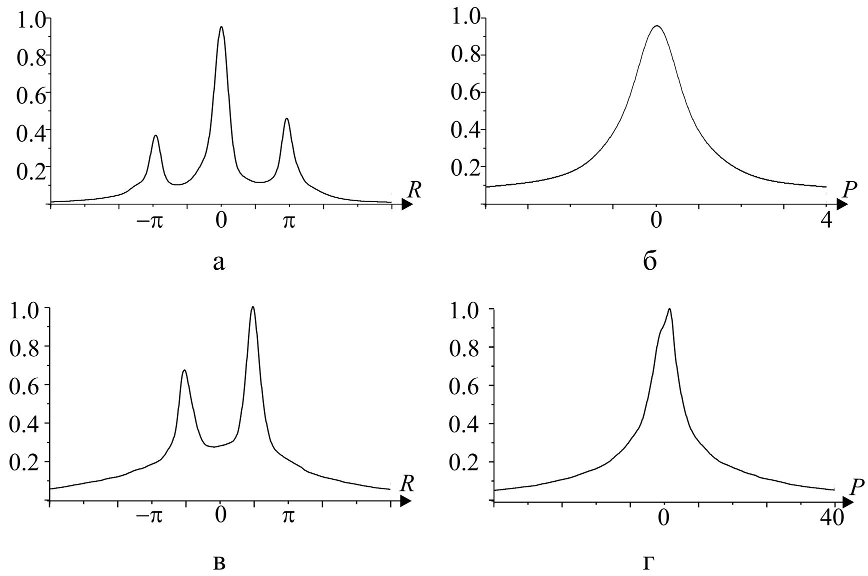

Рис. 1: Слева координатное, а справа импульсное распределения поля взаимодействия атомарного пучка со стоячей волной. Параметры численного моделирования: квазиклассический параметр $\mu = 0.05$; на рисунках (а-б) – относительная отстройка $\delta = -10$, насыщение $\mathbf{S} = 0.5$ и время взаимодействия $\tau = 100$; на рисунках (в-г) – относительная отстройка $\delta = 10$, насыщение $\mathbf{S} = 5$ и время взаимодействия $\tau = 45$

В полевых конфигурациях произвольной размерности впервые предъявлен аналитический метод решения уравнения (1). Данный метод является квазиклассическим и основан на разложении в ряд по малому параметру $\mu \to 0$ функции распределения атомарного ансамбля в классе траекторно – сосредоточенных функций. Метод применен для описания динамики ансамбля медленных атомов в произвольных 2-мерных и 3-мерных полевых конфигурациях на малых временах взаимодействия атомов с полем в случае, когда атомарные ансамбли в начальный момент времени занимают малый объем в фазовом пространстве. На основе развитого метода и численного моделирования показано, что существует два режима образования пространственно неоднородных структур в фазовом пространстве ансамблей медленных атомов, что продемонстрировано на рис. 1.

Во **второй главе** рассмотрена модель квантового разреженного атомарного ансамбля, исследование которой основано на решениях уравнения Гросса-Питаевского, а также модель распространения нелинейных световых импульсов в оптических световодах, описываемая НУШ. Последнее в (1+1) – мерном случае имеет вид

$$\left[i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + g^2|\Psi\left(x,t,\hbar\right)|^2 - V\left(x,t\right)\right]\Psi\left(x,t,\hbar\right) = 0. \tag{2}$$

Здесь g — вещественный параметр нелинейности, ∂_t — частная производная по переменной t. Вещественная функция $V\left(x,t\right)$, играющая роль потенциала внешнего поля, моделирует неоднородность и нестационарность показателя преломления среды распространения оптического импульса; комплексная функция $\Psi\left(x,t,\hbar\right)$ квадратично интегрируема по переменной x; $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$, Ψ^* - комплексно сопряжено к Ψ. Норма функции $\Psi\left(x,t,\hbar\right)$ определяется выражением

$$\|\Psi\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Psi\left(x,t,\hbar\right)|^2 dx.$$

Для одномерного НУШ с внешним полем определен класс функций с общим элементом следующего вида:

$$\Psi\left(x,t,\hbar\right) = \frac{|\partial_x\sigma\left(x,t,\hbar\right)|}{\sqrt{mg^2}\,\mathrm{ch}\,\left(\theta\right)}\exp\left[\frac{i}{\hbar}S\left(x,t,\hbar\right)\right].$$

Данный класс включает в себя в качестве частного случая точное односолитонное решение НУШ, полученное методом обратной задачи рассеяния. Солитоноподобные решения нелинейных уравнений математической физики широко применяются в различных физических приложениях. Солитоны в строгом смысле определяются как безотражательные решения нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния. Основным свойством солитонов является сохранение формы при распространении и столкновениях, что подобно упругому столкновению частиц. В более широком смысле солитонами (уединенными волнами) называют локализованные решения нелинейных волновых уравнений, которые, как правило, не интегрируются МОЗР.

Проведено численное моделирование (1+1) – мерного НУШ с потенциалом внешнего поля следующих видов: периодический потенциал $V(x) = a(1 - \cos(bx))$, гауссов потенциал $V(x) = -a\exp\left(-bx^2\right)$ и потенциалом $V\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ -a, & 0 < x, \end{cases}$ представляющих интерес в задачах распространения солитоноподобных импульсов в нелинейных неоднородных средах. Численное моделирование проводилось явным сеточным методом. Показано соответствие численных и аналитических асимптотических решений. Обсуждены возможные применения полученных квазиклассических решений НУШ с полями специального вида в нелинейной оптике.

Отметим, что поведение солитоноподобных решений уравнения (2) может быть исследовано в рамках теории возмущений солитонов в предположении о малости внешнего поля. В отличии от данной теории применяемый в работе квазиклассический метод не предполагает малость внешнего поля.

Третья глава посвящена построению асимптотических решений методом комплексного ростка Маслова для многомерного НУШ вида

$$\widehat{L}(\Psi)(\vec{x}) = \Big[-i\hbar\partial_t + \mathcal{H}(\hat{\vec{p}}, \vec{x}, t) - g^2|\Psi(\vec{x}, t, \hbar)|^2\Big]\,\Psi(\vec{x}, t, \hbar) = 0,$$

где обозначено: $\vec{x} = (x_j) \in \mathbb{R}^n$; $i, j, k, l = 1, \ldots, n$; $t \in \mathbb{R}^1$; $\partial_t = \partial/\partial t$; $\widehat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla$; ∇ — оператор градиента по $\vec{x}$; g - вещественный параметр нелинейности; $\hbar$ — асимптотический параметр, $\hbar \to 0$. Псевдодифференциальный оператор $\mathcal{H}(\hat{\vec{p}}, \vec{x}, t)$ упорядочен по Вейлю и имеет символ $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t)$ квадратичный по $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{H}(\hat{\vec{p}}, \vec{x}, t) = \frac{1}{2}\langle\hat{\vec{p}}, \mathcal{H}_{,pp}(t)\hat{\vec{p}}\rangle + \frac{1}{2}\Big(\langle\hat{\vec{p}}, \vec{\mathcal{H}}(\vec{x}, t)\rangle + \langle\vec{\mathcal{H}}(\vec{x}, t), \hat{\vec{p}}\rangle\Big) + \mathcal{H}_0(\vec{x}, t).$$

Здесь угловыми скобками обозначено евклидово скалярное произведение векторов, $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = \sum_{l=1}^n a_l b_l$. Вещественные функции: $(n \times n)$ – матрица $\mathcal{H}_{,pp}(t)$, вектор $\vec{\mathcal{H}}(\vec{x}, t)$ и скаляр $\mathcal{H}_0(\vec{x}, t)$ гладко зависят от указанных аргументов. Эти функции моделируют внешние поля, действующие на систему. Состояние системы описывается комплексной функцией $\Psi(\vec{x}, t, \hbar)$,

$$|\Psi|^2 = |\Psi(\vec{x}, t, \hbar)|^2 = \Psi(\vec{x}, t, \hbar)\Psi^*(\vec{x}, t, \hbar),$$

функция $\Psi^*(\vec{x}, t, \hbar)$ комплексно сопряжена к $\Psi(\vec{x}, t, \hbar)$.

Для этого уравнения построены квазиклассические решения асимптотические по малому параметру $\hbar \to 0$. Поскольку в приложениях особый интерес представляют локализованные решения НУШ с переменными коэффициентами, квазиклассическое решение строится в классе функций, включающем в качестве частного случая точное односолитонное решение НУШ. В этой главе квазиклассическое решение построено для $(1 + n)$ – мерного НУШ в классе функций

$$\Psi(\vec{x},t,\hbar)=\Phi(\theta,\vec{x},t,\hbar)=\sqrt{\frac{\langle\vec{\pi}(t),\mathcal{H}_{,pp}(t)\vec{\pi}(t)\rangle}{g^2}}\frac{\exp\left(\dfrac{i}{\hbar}S(\vec{x},t,\hbar)\right)}{\operatorname{ch}(\theta)}\times$$
$$\times\left\{1+\hbar\operatorname{ch}(\theta)u(\theta,\vec{x},t,\hbar)+i\hbar\operatorname{ch}(\theta)v(\theta,\vec{x},t,\hbar)\right\},\qquad(3)$$

локализованных в окрестности незамкнутой параболической поверхности

$$\Gamma^t=\{\vec{x}:\sigma(\vec{x},t,0)=\sigma^{(0)}(\vec{x},t)=0\},\qquad(4)$$

ассоциированной с фазовой кривой

$$\gamma=\{z:z\in\mathbb{R}^{2n},z=Z(t),t\in\mathbb{R}^1\},\quad z=(\vec{p},\vec{x}),\quad Z(t)=(\vec{P}(t),\vec{X}(t)),\qquad(5)$$

описывающей эволюцию вершины поверхности. Здесь $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{p}\in\mathbb{R}^n$; вещественные функции $S(\vec{x},t,\hbar)$, $\sigma(\vec{x},t,\hbar)$ регулярно зависят от параметра $\hbar\to0$. На классе функций (3) справедливы оценки

$$\Delta x_k=\hat{O}(\hbar^{1/2}),\qquad\Delta\hat{p}_k\Big|_{\theta=\mathrm{const}}=\hat{O}(\hbar^{1/2}),\qquad\langle\vec{\pi}(t),\Delta\vec{x}\rangle=\hat{O}(\hbar),$$

где $\Delta\vec{x}=\vec{x}-\vec{X}(t)$, $\Delta\vec{p}=\vec{p}-\vec{P}(t)$. Величина $\theta=\sigma(\vec{x},t,\hbar)/\hbar$ является «быстрой» переменной, вещественные функции $u=u(\theta,\vec{x},t,\hbar)$ и $v=v(\theta,\vec{x},t,\hbar)$ регулярно зависят от своих аргументов и ограничены по θ.

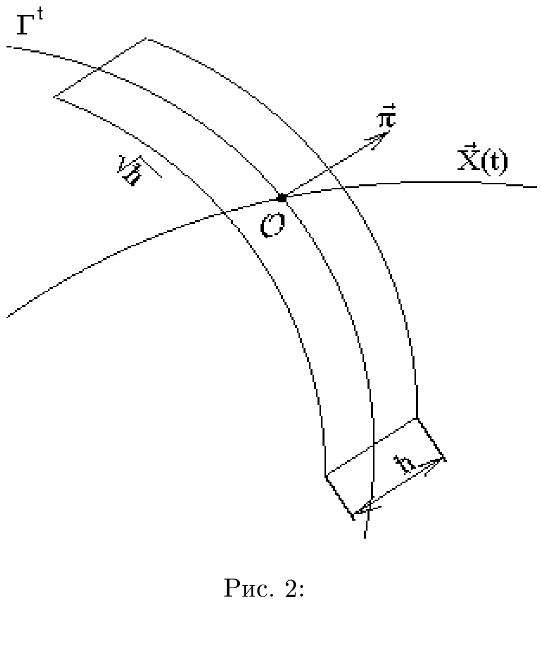

Рис. 2:

Вектор $\vec{\pi}=\vec{\pi}(t)$ нормален к поверхности (4) в ее вершине $\mathcal{O}$. На рис. 2 приведена схема, иллюстрирующая особенности функций класса (3), в котором построены асимптотические решения. В направлении нормали к поверхности Γ^t функции имеют вид односолитонного решения одномерного нелинейного уравнения Шредингера. На данном классе функций решение НУШ строится с точностью $O(\hbar^{3/2})$, $\hbar\to0$ с помощью решений соответствующего линейного уравнения Шредингера, которое названо линейным ассоциированным уравнением Шредингера. Для построения решений НУШ в классе функций (3) находятся квазиклассические решения линейного ассоциированного уравнения Шредингера, не имеющие нормы в L_2. Построен оператор эволюции для линейного ассоциированного уравнения Шредингера. Показано, что при действии данного оператора на функцию, которая соответствует решению линейного ассоциированного уравнения, получается функция, которая также будет соответствовать решению исходного нелинейного уравнения. Оператор эволюции линейного ассоциированного уравнения Шредингера индуцирует соответствующий оператор эволюции НУШ с точностью $O(\hbar^{3/2})$ в классе функций (3). Данный оператор обладает специальными свойствами и назван "поперечным". Получены уравнения, определяющие фазовую кривую γ вида (5).

В явном виде для поля 3 – мерного осциллятора построен главный член асимптотического решения НУШ в классе функций (3). Детально продемонстрирована динамика решения НУШ в локальной области фазового пространства в (1+1) – мерном и (1+2) – мерном случаях для положительно и отрицательно определенного поля осциллятора. В (1+2) – мерном случае поверхность Γ^t представляет собой параболу на плоскости $\mathbb{R}^2$, ветви которой изменятся под действием внешнего поля, а вершина по кривой $\vec{X}(t)$. Полученные асимптотические выражения описывают сложное движение солитоноподобной волны в локальной области фазового пространства с изменяющимся направление движения, переменной скоростью как по направлению, так и по величине и изменяющимся положением ветвей параболы под действием внешнего поля.

В **четвертой главе** формализм, развитый в третьей главе, модифицирован применительно к НУШ с внешним полем в полярной системе координат. На основе этого формализма построены квазиклассические решения, локализованные в окрестности замкнутой кривой, асимптотические по малому параметру $\hbar \to 0$, которые в (1+1) – мерном случае при отсутствии поля переходят в точное односолитонное решение НУШ. В каждый момент времени построенные решения существуют во всем пространстве $\mathbb{R}^2$. В направлении нормали к кривой эти решения имеют солитоноподобную форму. Для рассматриваемых решений НУШ получено соответствующее линейное ассоциированное уравнение Шредингера.

Подробно рассмотрены свойства асимптотических решений НУШ в полярной системе координат для внешнего поля изотропного гармонического осциллятора. В явном виде получен главный член асимптотического разложения. На рис. 3 проиллюстрировано поведение модуля главного члена асимптотики, $|\Psi_0|$. Приведены условия, при которых из решений, построенных в локальной области пространства с помощью формализма третьей главы, строятся по средством метода wavwlet асимптотические решения, локализованные в окрестности замкнутой плоской кривой и совпадающее с заданной точностью по асимптотическому параметру $\hbar \to 0$ с решениями, построенными в рамках модифи-

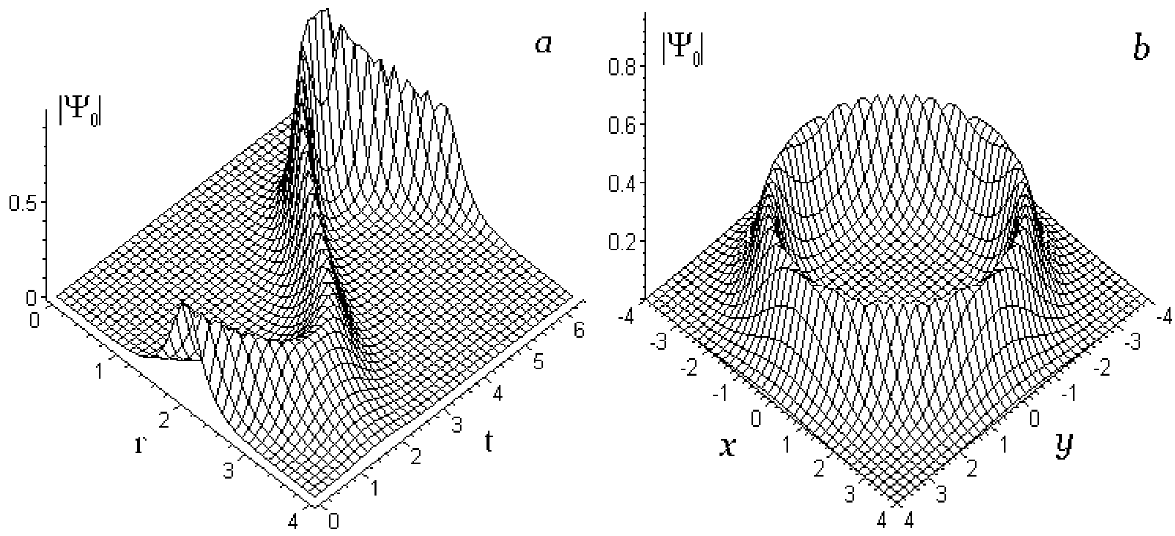

Рис. 3: $|\Psi_0|$ — модуль главного члена асимптотического решения НУШ в поле изотропного гармонического осциллятора в полярной системе координат

цированного формализма для НУШ в полярной системе координат. Условия сшивки асимптотических решений получаются с помощью теоремы о разбиении единицы. Указаны параметры начальных условий и поля осциллятора, при которых квазиклассическое решение периодично по времени и не имеет особенностей. Такое решение интерпретируется может быть использовано в модели состояния (1+2) – мерного квантового атомарного ансамбля во внешнем поле магнитооптической ловушки.

В **заключении** сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

Основные результаты и выводы

1. Аналитический метод построения асимптотических решений уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова в приближении по малому параметру квазиклассичности $\mu = \sqrt{2\omega_R \tau_0}$, характеризующему оптическую накачку основного состояния атома в слабых полях для произвольных полевых конфигураций.

2. На основе анализа построенных аналитических решений в комбинации с компьютерным моделированием показано существование двух режимов формирования пространственно неоднородных структур в фазовом пространстве ансамбля медленных атомов в произвольных 2-мерных и 3-мерных полевых конфигурациях. Показано, что описание кинетики атомарного ансамбля на основе полученных решений на временах $t_{\rm int} \sim t_{\rm op}/\mu$ согласуется с результатами работ других авторов. Здесь $t_{\rm int}$ – среднее время

взаимодействия, а t_{op} – характерное время оптической накачки.

3. Методом квазиклассических асимптотик построено явное аналитическое выражение для главного члена асимптотики (1+1) – мерного НУШ с внешним полем. Построенное выражение является квазиклассическим солитоноподобным решением. Явным сеточным методом построено численное решение солитоноподобного импульса в кубично-нелинейной неоднородной среде с внешними полями специального вида.

4. Развит метод построения квазиклассических солитоноподобных асимптотических решений для многомерного нелинейного уравнения Шредингера с внешним полем в декартовой системе координат на основе теории комплексного ростка Маслова.

5. В рамках развитого метода предложен специальный метод квазиклассической линеаризации многомерного НУШ с переменными коэффициентами, основанный на введении специального класса функций и приводящий к соответствующему линейному уравнению Шредингера (линейному ассоциированному уравнению Шредингера). На этом классе функций построены квазиклассические асимптотические решения ассоциированного линейного уравнения Шредингера. Для последнего построен оператор эволюции на функциях данного класса, который, в свою очередь, индуцирует нелинейный оператор эволюции для асимптотических решений НУШ.

6. Развитый для декартовой системы координат метод квазиклассических асимптотик применен к НУШ в полярной системе координат. Построен главный член асимптотического решения НУШ с внешним полем в полярной системе координат. Для поля однородного гармонического осциллятора в явном виде получено локализованное в окрестности замкнутой плоской кривой квазиклассическое решение, не имеющее особенностей.

Результаты по диссертации опубликованы в работах

[1] Борисов А.В., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. "Одномерный НУШ - солитон во внешнем поле. Полуклассический подход и компьютерное моделирование"//Тр. Междунар. Конф. "Математические модели и методы их иследования". 2001. Красноярск. 2000, в 2-х томах, Т.I. 326 с., Т.II. 322 с. - Т.1. - С.111-115. Россия. Под ред. В.К. Андреева и Ю.В. Штанько/ Ин-т вычислительного моделирования СО РАН.- Красноярск.

[2] Борисов А.В., Кистенев Ю.В., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. Оптический солитоноподобный пучок в кубично-нелинейной поперечно-неоднородной среде // Труды Международного оптического когресса "Оптика XXI век. Фундаментальные проблемы оптики-2002."Санкт-Петербург, 14-17 октября 2002. – СПб: СПбГИТМО (ТУ), 2002. С.22-24.

[3] Борисов А.В., Кистенев Ю.В.,Трифонов А.Ю.,Шаповалов А.В. Компьютнрное моделирование асимптотического НУШ - солитона во внешних полях специального вида. //В сб. "Математика. Компьютер. Образование."2003. №10. Изд-во: R&C Dynamics, Москва-Ижевск. С.176-184. Часть II.

[4] Борисов А.В., Кистенев Ю.В.,Трифонов А.Ю.: Шаповалов А.В. Исследование динамики солитоноподобного решения нелинейного уравнения Шредингера с внешним полем // Изв. вузов. Физика. 2004. Т.47, №.1. С.21-26.

[5] Борисов А.В., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. Квазиклассическое приближение для многомерного нелиненйного уравнения Шредингера с внешним полем //В сб. Математика. Компьютер. Образование. Под ред. Ризниченко Г.Ю. 2005. Т. 2, №12. С.648-659.

[6] Борисов А.В., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. Многомерное нелинейное уравнений Шредингера в поле осциллятора//Известия вузов, Физика. 2005. №7. С.70-75.

[7] Trifonov A.Yu., Bezverbny A.V., Borisov A.V., Shapovalov A.V. Temporal kinetics of atomic ensemble in a light field/ in MPLP-2004 Proceedings.– Novosibirsk. 2005. P. 65-76.

[8] Borisov A.V., Shapovalov A.V., and Trifonov A.Yu. Transverse Evolution Operator in Semiclassical Approximation//Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2005. V.1. Paper 019. 17p. /http://www.imath.kiev.ua/ sigma/2005/Paper019/ http://www.emis.de/journals/SIGMA/

[9] Борисов А.В., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. Квазиклассическое приближение для нестационарного двумерного нелинейного уравнения Шредингера с внешним полем в полярных координатах//Известия вузов, Физика. 2006. №7. С. 49-56.