На правах рукописи

ГАЛАЖИНСКАЯ Оксана Николаевна

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОДАЖИ ОДИНОЧНОГО ТОВАРА НЕТЕРПЕЛИВЫМ ПРОДАВЦОМ

05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2007

Работа выполнена в Томском государственном университете

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, профессор
Терпугов Александр Федорович

Официальные оппоненты:
Доктор физ.-мат. наук, профессор
Кошкин Геннадий Михайлович,
Доктор физ.-мат. наук, профессор
Якупов Рафаэль Тимирович.

Ведущая организация: Сибирский государственный аэрокосмический университет (г. Красноярск)

Защита состоится 22 февраля 2007 г. в 10-30 в ауд. 102 второго учебного корпуса Томского государственного университета.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Томского государственного университета.

Отзывы на автореферат, в двух экземплярах, подписанные и заверенные печатью, просьба направлять по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, ученому секретарю ТГУ Буровой Н.Ю.

Автореферат разослан   января 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор техн. наук, профессор Скворцов А.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы

Проблема продажи дорогостоящих товаров длительного пользования (объекты недвижимости, транспортные средства и др.) всегда существует в современном обществе. Однако зачастую владелец этого товара не может заранее определить ту цену, которую он может выручить за свой товар, даже несмотря на рекомендации экспертов. Кроме того, часто бывает, что продавец товара ограничен во времени (например, он куда-то уезжает) или ему срочно нужны денежные средства, которые он рассчитывает выручить от продажи товара. В такой ситуации ему приходится постепенно снижать цену на свой товар, чтобы продать его с наименьшими для него потерями. Возникает проблема «нетерпеливого продавца», который стоит перед противоречием: с одной стороны, продать свой товар побыстрее, а с другой – выручить за него как можно больше денег.

Подобные ситуации относятся к так называемой теории микроструктуры рынка, в которой рассматриваются процессы изменения цены с учетом нетерпеливости как продавцов, так и покупателей. Однако эта теория разработана в настоящее время для фондовых рынков, где ведется продажа акций и других финансовых активов. Поэтому разработка и исследование математических моделей процесса изменения цены при продаже нетерпеливым продавцом одиночного товара выглядят интересными и актуальными.

Состояние проблемы

Наиболее близкими к тематике настоящего исследования являются работы по управлению запасами и по микроструктуре рынка, которая начала интенсивно развиваться в последнее десятилетие (Biais B., Hasbrouck J., O’Hara M., Parlour C., Vayanos D., Wang J. и др.).

Теория управления запасами в настоящее время – очень подробно разработанный раздел экономико-математических моделей. В ней найдены подходы к оптимизации работы складов, которые являются атрибутом очень большого числа экономических объектов. Исследованы самые разнообразные модели, отличающиеся по виду запасов, структуре системы хранения, способу контроля уровня запасов, структуре запасов. Разнообразны также и математические модели управления запасами: статические и динамические, детерминированные и стохастические, стационарные и нестационарные, замкнутые и разомкнутые по спросу, со случайными поставками и временем поставок и т.д. Этому направлению посвящены работы Громенко В.М., Лотоцкого В.А., Мандель А.С., Первозванского А.А., Рубальского Г.Б. и др.

Однако в данных работах основным является учет потерь на хранение запасов на складах, а также потерь от переполнения и опустошения склада. К процессу торговли это не имеет непосредственного отношения, так как в торговле совершенно другие критерии оптимальности – получение максимальной выгоды в единицу времени, возможность регулировать спрос, изменяя розничную цену, ограничения на время продажи партии товара (скоропортящиеся товары должны быть проданы в строго определенный промежуток времени), ухудшение потребительских свойств товара с течением времени и т.д.

Основная идея работ по микроструктуре рынка состоит в следующем. Имеется классическая теория ценообразования, которая излагается во всех учебниках по микроэкономике и которая построена на основании соотношений спрос–цена и производство–цена. Эти зависимости определяют так называемую равновесную цену, то есть ту цену, по которой продается товар в состоянии равновесия рынка.

Однако этой равновесной цены еще надо достичь. Поэтому имеется целый ряд моделей (паутинообразная модель, модель с прогнозированием цены, модель с учетом складов), описывающих процесс достижения равновесной цены. Однако эти модели не имеют практического применения (Аллен Р., Данилов Н.Н., Интрилигатор М., Ланкастер К. и др.).

Процесс установления цены, не имеющий большого значения для товарных рынков, имеет очень существенное значение для фондовых рынков, для которых характерны быстрое изменение цен и спекулятивный характер использования этих изменений. Именно для этих рынков и предлагаются различные модели изменения цены со временем, они могут быть использованы на практике для краткосрочного прогноза цен финансовых активов. В этих моделях учитываются такие факторы, как:

– стремление продавца поскорее продать свои активы, а покупателя – купить нужный ему актив;
– наличие активных и неактивных участников рынка;
– различие в информации, которой обладают участники рынка, в частности наличие инсайдерской информации;
– возможность обучения участников торгов в процессе функционирования фондового рынка.

По-видимому, данную работу также можно отнести к теории микроструктуры рынка, только не фондового, а товарного, так как процесс торговли, изменения цены товара в зависимости от времени и количества товара, имеющегося в наличии, есть также микроструктура рынка.

Таким образом, данная работа имеет следующие особенности, отличающие ее от работ по управлению запасами и по микроструктуре рынка:

1. Покупатель продает одиночный товар большой стоимости. Он не является профессиональным торговцем, и поэтому не имеет или почти не имеет опыта продажи подобного рода товаров.

2. Рассматривается не фондовый, а товарный рынок. В отличие от фондового рынка, где совершается очень много сделок и где, как правило, игроки достаточно хорошо знают друг друга, на товарном рынке, где продаются одиночные товары большой стоимости (недвижимость, транспорт и т.д.), продавец и покупатель практически ничего друг о друге не знают и об инсайдерской информации не идет и речи.

Цель работы

При выполнении данной работы ставилась задача разработать математическую модель постепенного снижения цены на продаваемый одиночный товар нетерпеливым продавцом и рассчитать основные характеристики этой модели. Также ставилась задача построить математическую модель рынка нетерпеливых продавцов и найти ее основные характеристики.

Методика исследования

При решении поставленных задач использовались методы теории вероятностей и теории случайных процессов. При построении и исследовании модели рынка нетерпеливых продавцов использовались методы теории массового обслуживания.

Положения, выносимые на защиту. Автор выносит на защиту следующие научные результаты:

1. Четыре математические модели снижения цены нетерпеливым продавцом при продаже одиночного товара, а именно: а) модель с непрерывным изменением цены; б) модель со ступенчатым изменением цены, когда длительность фазы (периода времени, когда цена остается постоянной) фиксирована; в) модель со ступенчатым изменением цены, когда длительность фазы определяется числом покупателей, отказавшихся от покупки; г) комбинированная модель.

2. Основные вероятностные характеристики всех указанных выше моделей, а именно:

– распределение вероятностей номера фазы, на которой товар будет продан;

– плотность вероятностей цены, по которой товар будет продан (продажной цены);

– среднее время, проходящее между выставлением товара на продажу и моментом его покупки;

– плотность вероятностей времени, проходящего между выставлением товара на продажу и моментом его покупки;

– распределение вероятностей длительности фазы, на которой не было покупки и на которой покупка была совершена;

– оптимизационная задача на определение цены, по которой товар продается на каждой фазе, и численный алгоритм ее решения.

3. Модель рынка нетерпеливых продавцов в виде бесконечно линейной бесконечно фазной системы массового обслуживания, в которой каждая линия соответствует продавцу, а каждая фаза – цене, по которой продается товар. После прохождения фазы продавец либо покидает систему (товар продан), либо переходит на следующую фазу (товар не продан, цена на него снижена).

Доказательство того факта, что распределение вероятностей числа продавцов, находящихся на какой-то фазе, является распределением Пуассона и эти распределения независимы для разных фаз. Явный вид параметра распределения Пуассона, и в ряде случаев необходимые или достаточные условия существования стационарного режима в рассматриваемой системе.

Научная новизна работы

К новым научным результатам автор относит следующие:

1. Предложенные автором математические модели изменения цены нетерпеливым продавцом.

2. Формулы, выражающие основные вероятностные характеристики рассматриваемых моделей.

3. Математическая модель рынка нетерпеливых продавцов и доказательство того факта, что распределения вероятностей числа продавцов, находящихся на каждой фазе, является распределением Пуассона и эти распределения независимы.

Теоретическое значение работы, по мнению автора, заключается в том, что предложенные в ней математические модели могут быть обобщены на случай нетерпеливых покупателей. На основании этих моделей может быть создана обобщенная модель рынка, на котором присутствуют и нетерпеливые покупатели и нетерпеливые продавцы, и они взаимодействуют друг с другом.

Практическое значение работы, по мнению автора, заключается в том, что полученные в ней результаты могут быть полезны при эконометрическом исследовании рынка недвижимости, рынка транспортных средств и т.д.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на научных конференциях:

1. Четвертой Всероссийской научно-технической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование». Анжеро-Судженск, 2005 г.
2. Пятой Всероссийской конференции «Финансово-актуарная математика и смежные вопросы». Красноярск, 2006 г.
3. Десятой Всероссийской научно-практической конференции «Научное творчество молодежи». Анжеро-Судженск, 2006 г.
4. Шестой Всероссийской конференции «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур». Шушенское, 2006 г.
5. Международной научной конференции «Проблемы кибернетики и информатики». Баку, Азербайджан, 2006 г.
6. Пятой Международной научно-технической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование». Анжеро-Судженск, 2006 г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 печатных работ, в том числе 4 работы в журналах из перечня ВАК.

Логическая **структура диссертации,** последовательно раскрывающая цель и задачи исследования, состоит из введения, пяти глав, заключения, библиографического списка из 61 наименования, изложена на 125 страницах, содержит 25 рисунков.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава работы посвящена математической модели продажи товара нетерпеливым продавцом при непрерывном изменении цены. Эта модель имеет следующий вид: продавец меняет цену на свой товар непрерывно со временем. Через $S(t)$ будем обозначать ту цену, за которую продавец готов продать свой товар в момент времени *t*. Будем предполагать, что $S(t)$ строго монотонно убывает со временем от некоторой цены $S_0 = S(0)$, так что уравнение $S(t) = S$

можно однозначно разрешить относительно аргумента t, то есть получить соотношение $t = t(S)$.

Что касается покупателей, то будем считать, что потенциальные покупатели образуют пуассоновский поток постоянной интенсивности λ. Вступая в контакт с продавцом после ознакомления со свойствами продаваемого товара, покупатель приобретает его с вероятностью $R(S)$, разумеется зависящей от той цены, которую запрашивает продавец, и с вероятностью $1-R(S)$ отказывается от покупки. Будем считать далее, что $R(S)$ есть монотонно убывающая функция, так что с уменьшением запрашиваемой цены вероятность покупки возрастает. Кроме этого, будем считать, что существует некоторая минимальная цена S_m, так что $R(S_m)=1$, то есть по этой цене товар покупается всегда. Соответственно этому будем считать, что $\lim\limits_{t\to\infty} S(t) = S_m$.

Будем называть цену, по которой товар будет продан, продажной ценой товара и обозначать ее как S_e. Разумеется, что в рамках предлагаемой модели эта цена будет случайной величиной. В п. **1.3** получены основные характеристики продажной цены. В частности, показано, что математическое ожидание продажной цены имеет вид

$$m_{1S}(S_0) = S_m \cdot \exp\left(-\int_{S_m}^{S_0} g(x)dx\right) + \int_{S_m}^{S_0} yg(y)\exp\left(-\int_{y}^{S_0} g(x)dx\right)dy,$$

где $g(S) = \lambda R(S)/a(S)$ и $a(S) = -\left.\dfrac{dS}{dt}\right|_{t=t(S)}$.

Второй начальный момент продажной цены имеет вид

$$m_{2S}(S_0) = S_m^2 \cdot \exp\left(-\int_{S_m}^{S_0} g(x)dx\right) + \int_{S_m}^{S_0} y^2 g(y)\exp\left(-\int_{y}^{S_0} g(x)dx\right)dy,$$

а плотность вероятностей продажной цены – вид

$$p_S(S_e) = \delta(S_e - S_m)\exp\left(-\int_{S_m}^{S_0} g(x)dx\right) + g(S_e)\exp\left(-\int_{S_e}^{S_0} g(x)dx\right).$$

В п. **1.4** рассмотрены характеристики длительности продажи товара. Показано, что:

– математическое ожидание длительности продажи товара имеет вид

$$m_t(S_0) = \frac{1}{\lambda}\cdot \exp\left(-\int_{S_m}^{S_0} g(x)dx\right) + \int_{S_m}^{S_0} \frac{1}{a(y)}\exp\left(-\int_{y}^{S_0} g(x)dx\right)dy;$$

– плотность вероятностей длительности продажи товара имеет вид

$$p(\tau)=\begin{cases} -g(S(\tau))\exp\left(-\int\limits_{S(\tau)}^{S_0} g(x)dx\right)S'(\tau), & 0\le\tau<t(S_m),\\ \lambda e^{-\lambda(\tau-t(S_m))}\cdot\exp\left(-\int\limits_{S_m}^{S_0} g(x)dx\right), & \tau\ge t(S_m).\end{cases}$$

В п. **1.5** рассмотрена оптимизационная задача. Предполагается, что если товар будет продан в момент времени τ, то продавец товара потерпит убыток, равный $K(\tau)$. Так как продажная цена $S_e=S(\tau)$, то общий доход продавца от продажи товара равен

$$Q=\int\limits_0^\infty (S(\tau)-K(\tau))\lambda R(S(\tau))\exp\left(-\int\limits_0^\tau \lambda R(S(t))dt\right)d\tau,$$

и задача принимает вид $Q\Rightarrow\max\limits_{S(\tau)}$.

Эта задача решается методами вариационного исчисления. Показывается, что ее решение сводится к решению дифференциального уравнения первого порядка

$$\left[2-\frac{R(S(\tau))R''(S(\tau))}{(R'(S(\tau)))^2}\right]S'(\tau)-\lambda\frac{R^2(S(\tau))}{R'(S(\tau))}-K'(\tau)=0,$$

в котором неизвестная постоянная интегрирования находится из условия

$$\frac{R(S(0))}{R'(S(0))}+S(0)-K(0)=\int\limits_0^\infty (S(t)-K(t))\lambda R(S(t))\cdot\exp\left(-\int\limits_0^t \lambda R(S(v))dv\right).$$

В п. **1.6** рассмотрен иллюстративный пример на выведенные выше формулы, когда зависимость цены от времени имеет вид

$$S(t)=S=S_m+(S_0-S_m)e^{-\alpha t},$$

а $R(S)$ имеет вид

$$R(S)=\frac{S_M-S}{S_M-S_m},$$

так что $R(S_M)=0$ и $R(S_m)=1$. Величина S_M имеет смысл той максимальной цены, по которой предлагаемый товар никто не покупает. Приведены результаты численных расчетов.

Во **второй главе** рассмотрена продажа товара нетерпеливым продавцом при ступенчатом изменении цены, когда длительность фазы фиксирована. Изучаемая математическая модель выглядит следующим образом: в момент начала продажи устанавливается цена S_1, которую продавец держит в течение времени

T_1. Если за это время товар не будет продан, то устанавливается цена S_2, которая держится в течение времени T_2. Если за это время товар не будет продан, то устанавливается цена S_3, которая держится в течение времени T_3, и т.д.

Каждый такой период будем называть **фазой**. Итак, n-я фаза имеет длительность T_n и на ней устанавливается цена S_n. Поток покупателей считается пуассоновским потоком постоянной интенсивности λ. На n-й фазе покупатель купит товар с вероятностью $R_n = R(S_n)$, где $R(S)$ – некоторая функция от цены S.

В п. **2.2** рассматривается распределение номера продажной фазы. Обозначим через P_i безусловную вероятность того, что **при нахождении на *i*-й фазе** товар не будет куплен. Тогда показано, что $P_i = e^{-\lambda T_i R_i}$. Пусть Q_n есть вероятность того, что товар будет куплен на n-й фазе. Это означает, что он не будет куплен на фазах с номерами 1, 2, 3, … , $n-1$, поэтому

$$Q_n = P_1 P_2 P_3 \ldots P_{n-1}(1-P_n) = \prod_{i=1}^{n-1} P_i \cdot (1-P_n),$$

где считается, что $\prod_{i=1}^{0} P_i = 1$.

Теорема. Если $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda T_i R_i = +\infty$, то с вероятностью 1 товар будет продан.

Если товар будет продан на n-й фазе, то продажная цена будет равна S_n. Поэтому продажная цена S_e есть дискретная случайная величина, принимающая значения S_n с вероятностями Q_n:

$$P\{S_e = S_n\} = Q_n, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

В п. **2.4** найдено среднее время до продажи товара. Показано, что оно имеет вид

$$M\{\tau\} = \overline{\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \psi_1(\lambda R_n T_n) \prod_{i=1}^{n-1} P_i,$$

где $\psi_1(x) = (1-e^{-x})/x$.

В п. **2.5** найдена плотность вероятностей длительности τ продажи товара. Показано, что для участка

$$T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1} \le \tau \le T_1 + T_2 + \ldots + T_n$$

плотность вероятностей величины τ имеет вид

$$p_n(\tau) = \lambda R_n \exp\left(-\sum_{i=1}^{n-1} \lambda R_i T_i \right) \exp\left(-R_n(\tau - T_1 - T_2 - \ldots T_{n-1})\right).$$

В п. **2.6** рассмотрен **иллюстративный пример**, когда $R(S)$ имеет вид

$$R(S) = \frac{S_M - S}{S_M - S_m},$$

все T_i одинаковы и равны T, а закон изменения цены – вид

$$S_i = S_m + (S_M - S_m) z^i, \quad 0 \le z < 1,$$

что является обобщением экспоненциального убывания цены со временем. Полученные формулы иллюстрированы графиками.

В п. **2.7** рассмотрен случай, когда фазы имеют случайную длительность, так что длительность T_i i-й фазы есть случайная величина с функцией распределения $B_i(T)$. Безусловная вероятность P_i отсутствия покупки на i-й фазе равна в этом случае

$$P_i = \int_0^\infty e^{-\lambda R_i T} dB_i(T).$$

Вероятность Q_n того, что товар будет куплен на n-й фазе, равна, как и выше,

$$Q_n = \prod_{i=1}^{n-1} P_i (1 - P_n),$$

что и определяет распределение вероятностей цены покупки:

$$P\{S_e = S_n\} = Q_n, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

В п. **2.8** найдено распределение вероятностей длительности пребывания на фазе при условии, что покупка произошла. Показано, что безусловная плотность вероятностей величины τ в этом случае имеет вид

$$p(\tau) = \lambda R e^{-\lambda R \tau} \int_\tau^\infty \frac{dB(T)}{1 - e^{-\lambda R T}}.$$

В п. **2.9** найдена средняя длительность времени продажи товара. Она имеет вид

$$\overline{\tau} = \sum_{n=1}^\infty T_n \psi_1(\lambda R_n) \prod_{i=1}^{n-1} P_i,$$

где

$$\psi_1(\lambda R_n) = \int_0^\infty e^{-\lambda R_n T} dB_n(T) + \left[\frac{1}{\lambda R_n \overline{T}_n} - \frac{1}{\overline{T}_n} \int_0^\infty \frac{T dB_n(T)}{e^{\lambda R_n T} - 1} \right] \cdot \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda R_n T} dB_n(T) \right).$$

В п. **2.10** найдено преобразование Лапласа от плотности вероятностей длительности времени продажи товара. Оно имеет вид

$$G(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n-1} \left(P_i G_i(q) \right) \cdot (1 - P_n) \cdot G_\tau(q),$$

где

$$G_\tau(q) = \frac{\lambda R_n}{q + \lambda R_n} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-(q+\lambda R_n)T}}{1 - e^{-\lambda R_n T}} dB_n(T), \quad G_i(q) = \int_0^\infty e^{-qT} dB_i(T).$$

К сожалению, найти обратное преобразование Лапласа в общем виде без конкретизации функций $G_i(q)$ автору не удалось.

В п. **2.11** рассмотрена задача на оптимизацию постановки цены на каждой фазе. Пусть K_n есть потери продавца, если товар будет продан на n-й фазе. Доход продавца – это цена, по которой продан товар. Поэтому математическое ожидание общего дохода продавца равно

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} (S_n - K_n)(1 - P_n) \prod_{i=1}^{n-1} P_i$$

и задача оптимизации имеет вид $\Phi \Rightarrow \max\limits_{\{S_n\}}$. В работе показано, что последовательность цен $\{S_n\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_m - K_m + \frac{e^{\lambda R(S_m)T_m} - 1}{\lambda R'(S_m)T_m} = S_{m+1} - K_{m+1} + \frac{1 - e^{-\lambda R(S_{m+1})T_{m+1}}}{\lambda R'(S_{m+1})T_{m+1}},$$

которое может быть решено численно.

В **третьей главе** рассматривается случай ступенчатого изменения цены, но длительность фазы зависит от числа пришедших покупателей.

Пусть в момент начала продажи устанавливается цена S_1. Продавец ждет, пока за товаром не обратится m_1 потенциальный покупатель. Если товар будет продан – процесс закончен. Если из пришедших m_1 покупателей никто товар не купил, то устанавливается цена S_2, которая держится на m_2 потенциальных покупателях. Если товар будет продан – процесс закончен, если нет – устанавливается цена S_3, которая держится на m_3 потенциальных покупателях и т.д.

Как и ранее, поток потенциальных покупателей считается пуассоновским потоком постоянной интенсивности λ. На n-й фазе покупатель купит товар с вероятностью $R_n = R(S_n)$, где $R(S)$ – некоторая функция от цены S.

В п. **3.2** рассматривается распределение номера продажной фазы. Обозначим через P_i безусловную вероятность того, что **при нахождении на *i*-й фазе** товар не будет куплен. Так как покупатели независимы, то $P_i = (1 - R_i)^{m_i}$.

Пусть Q_n есть вероятность того, что товар будет куплен на *n*-й фазе. Это означает, что он не будет куплен на фазах с номерами 1, 2, 3, … , $n-1$, поэтому

$$Q_n = P_1 P_2 P_3 \ldots P_{n-1}(1 - P_n) = \prod_{i=1}^{n-1}(1 - R_i)^{m_i} \cdot (1 - (1 - R_n)^{m_n}).$$

Если товар будет продан на *n*-й фазе, то продажная цена будет равна S_n. Поэтому продажная цена S_e есть дискретная случайная величина, принимающая значения S_n с вероятностями Q_n:

$$P\{S_e = S_n\} = Q_n, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

В п. **3.4** находится среднее время до продажи товара. Оно определяется из формулы

$$\lambda M\{\tau\} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(R_n, m_n) \cdot \prod_{i=1}^{n-1}(1 - R_i)^{m_i},$$

где $\psi(R,m) = (1 - (1 - R)^m)/R$.

В п. **3.5** находится плотность вероятностей длительности τ продажи товара. Показывается, что она имеет вид

$$p(\tau) = e^{-\lambda\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda R_n}{(1 - R_n)^{M_{n-1}}} \left(\sum_{s=M_{n-1}}^{M_n - 1} \frac{(\lambda(1 - R_n)\tau)^s}{s!} \right) \prod_{i=1}^{n-1}(1 - R_i)^{m_i},$$

где $M_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

В п. **3.6** в качестве иллюстративного примера рассмотрен случай, когда $R(S)$ имеет вид

$$R(S) = \frac{S_M - S}{S_M - S_m},$$

а закон изменения цены – вид $S_i = S_m + (S_M - S_m)z^i$, $0 \le z < 1$. Результаты расчетов приведены в виде графиков.

В п. **3.7** рассмотрен случай, когда возможное число покупателей на фазе устанавливается случайным образом. Обозначим через $p_i(m)$ вероятность того, что *i*-я фаза закончится, если покупку не совершит *m* покупателей. Тогда безусловная вероятность отсутствия покупки на *i*-й фазе равна

$$P_i = \sum_{m=1}^{\infty} (1 - R_i)^m \, p_i(m).$$

Если на фазе не совершено покупки, то плотность вероятностей $b(t)$ длительности фазы t равна

$$b(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m t^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda t} p(m).$$

Плотность вероятностей времени τ от момента начала фазы до момента покупки при условии, что покупка имеет место, равна

$$b_1(\tau) = \frac{R\lambda e^{-\lambda\tau}}{1-P} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\lambda\tau(1-R)]^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{m=k}^{\infty} p(m).$$

В п. **3.9** находится средняя длительность времени продажи товара. Показывается, что она имеет вид

$$\lambda\bar{\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{m}_n \psi_1(R_n) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} P_i,$$

где

$$\psi_1(R_n) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[(1-R_n)^m + \frac{1}{\overline{m}_n R_n} \left[1 - (1-R_n)^{m+1} - (m+1) R_n (1-R_n)^m \right] \right] p(m).$$

В п. **3.10**, как и в предыдущей главе, рассматривается задача на максимизацию функционала

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} (S_n - K_n)(1 - P_n) \prod_{i=1}^{n-1} P_i,$$

и показывается, что оптимальная последовательность цен определяется следующим рекуррентным соотношением:

$$S_l - K_l + \frac{(1 - R(S_l))\left[1 - (1 - R(S_l))^{m_l}\right]}{m_l R'(S_l)(1 - R(S_l))^{m_l}} = S_{l+1} - K_{l+1} + \frac{(1 - R(S_{l+1}))\left[1 - (1 - R(S_{l+1}))^{m_{l+1}}\right]}{m_{l+1} R'(S_{l+1})}.$$

В **четвертой главе** рассмотрен комбинированный вариант. Он состоит в том, что для фазы выбираются два параметра – T и m. Фаза заканчивается, если

1) пришло m покупателей и все они отказались от покупки

или

2) истекло время T и покупка не состоялась.

Разумеется, каждая фаза характеризуется ценой S и вероятностью покупки R. В дальнейшем индекс у всех этих величин обозначает номер фазы.

В п. **4.2** рассмотрено распределение вероятностей номера продажной фазы и продажной цены. Показано, что вероятность того, что товар не будет куплен на какой-то фазе, равна

$$P=(1-R)^m+\sum_{k=0}^{m-1}\left[(1-R)^k-(1-R)^m\right]\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}.$$

Дальнейшее аналогично предыдущему. Вероятность Q_n того, что товар будет куплен на n-й фазе, равна

$$Q_n=\prod_{i=1}^{n-1}P_i\cdot(1-P_n),$$

что и определяет распределение вероятностей продажной цены S_e в случае, когда $\prod_{i=1}^{\infty}P_i=0$:

$$P\{S_e=S_n\}=Q_n,\quad n=\overline{1,\infty}.$$

В п. **4.3** найдены плотность вероятностей $b(t)$ длительности фазы без покупки

$$b(t)=\frac{\lambda^m t^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda t}+\delta(t-T)\ e^{-\lambda T}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(\lambda T)^k}{k!},\qquad 0\le t\le T,$$

и математическое ожидание длительности фазы без покупки

$$\lambda\bar{t}=\varphi_0(\lambda T,m)=m\left[1-e^{-\lambda T}\sum_{k=0}^{m}\frac{(\lambda T)^k}{k!}\right]+\lambda Te^{-\lambda T}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(\lambda T)^k}{k!}.$$

В п. **4.4** найдены условная плотность вероятностей длительности интервала времени до покупки товара на фазе при условии, что покупка была совершена,

$$b_1(\tau)=\frac{R}{1-P}\sum_{k=1}^{m}(1-R)^{k-1}\frac{\lambda^k\tau^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda\tau},0\le\tau\le T,$$

и условное среднее время, проходящее между началом фазы и покупкой товара при условии, что покупка была совершена,

$$\lambda\bar{\tau}(1-P)=\varphi_1(\lambda T,R,m),$$

$$\varphi_1(\lambda T,R,m)=\frac{1-(1-R)^{m+1}-(m+1)R(1-R)^m}{R}-$$

$$-\frac{1}{R}\sum_{s=0}^{m}\frac{(\lambda T)^s}{s!}\left[(1-R)^s-(1-R)^{m+1}+s(1-R)^{s-1}-(m+1)R(1-R)^m\right].$$

В п. **4.5** найдено математическое ожидание $\bar{\tau}$ времени, проходящего от момента выставления товара на продажу до самой продажи,

$$\lambda\bar{\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(\lambda T_n, R_n, m_n) \prod_{i=1}^{n-1} P_i ,$$

$$\psi(\lambda T_n, R_n, m_n) = \varphi_0(\lambda T_n, m_n) P_n + \varphi_1(\lambda T_n, R_n, m_n) .$$

В п. **4.6** рассмотрена оптимизационная задача вида

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} (S_n - K_n)(1 - P_n) \prod_{i=1}^{n-1} P_i \Rightarrow \max_{\{S_n\}}$$

и показано, что в общем случае ее решение дается следующей рекуррентной формулой:

$$S_m - K_m - \frac{1 - P_m}{P'_m} = S_{m+1} - K_{m+1} - \frac{P_{m+1}(1 - P_{m+1})}{P'_{m+1}} .$$

Пятая глава диссертации посвящена математической модели рынка нетерпеливых продавцов, которые приходят на него со своим товаром и уходят с него после его продажи. Такие модели можно строить на базе теории массового обслуживания. По нашему мнению, такой моделью может служить бесконечно линейная система массового обслуживания, каждая линия которой содержит бесконечное число фаз, соответствующих той цене, которую продавец просит за товар на этой фазе.

Итак, в систему поступает пуассоновский поток заявок интенсивности Λ, где под каждой заявкой понимается продавец. Сама система состоит из бесконечного числа линий, так что поступившая заявка занимает любую свободную линию. С другой стороны, каждая линия представляет собой бесконечно фазную однолинейную систему массового обслуживания (СМО).

В п. **5.2** эта система исследована в случае экспоненциального времени обслуживания, когда на *k*-й фазе обслуживание экспоненциальное ($k = \overline{1,\infty}$) с параметром μ_k, так что среднее время пребывания на *k*-й фазе равно $1/\mu_k$. После окончания обслуживания на *k*-й фазе заявка с вероятностью P_k переходит на следующую фазу и с вероятностью $1 - P_k$ покидает систему.

Пусть $i_k(t)$ есть число заявок, находящихся на *k*-й фазе обслуживания в момент времени *t*. Введем для краткости записи вектор $I = \{i_1, i_2, i_3, ...\}$ и через $R(I) = P\{i_1(t) = i_1,\, i_2(t) = i_2,\, i_3(t) = i_3, ...\}$ обозначим вероятность того, что в момент времени *t* на *k*-й фазе находится i_k заявок ($k = \overline{1,\infty}$). Для стационарного распределения $R(I)$ не зависит от времени *t*. В работе показано, что многомерное распределение $R(I)$ факторизуется, то есть является произведением одномерных распределений:

$$R(I) = \prod_{n=1}^{\infty} R_n(i_n),$$

где каждый сомножитель $R_n(i_n)$ – распределение Пуассона с параметром ρ_n, где

$$\rho_n = \begin{cases} \dfrac{\Lambda}{\mu_1}, & n = 1, \\ \dfrac{\Lambda}{\mu_n} \prod_{k=1}^{n-1} P_k, & n \geq 2. \end{cases}$$

Теорема. Если для системы с бесконечным числом фаз ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \prod_{m=1}^{k-1} P_m$$

сходится, то в рассматриваемой СМО существует стационарный режим.

В п. **5.3** рассматривается бесконечно линейная бесконечно фазная СМО с управляемым переходом на другую фазу. На вход системы поступает стационарный пуассоновский поток заявок интенсивности Λ. Поступившая заявка занимает одну из свободных линий, начиная обслуживаться на первой фазе.

Будем считать, что во время обслуживания на k-й фазе на нее поступают два пуассоновских потока событий – поток с интенсивностью μ_{k0} (поток 0) и поток с интенсивностью μ_{k1} (поток 1). Если наступит событие первого потока, то заявка переходит на (k + 1)-ю фазу, если же наступит событие из потока 0, то заявка покидает систему. Таким образом, поступающие потоки 0 и 1 управляют пребыванием заявки на фазе. Под потоком 0 можно понимать, например, поток тех покупателей, которые купят товар, а под потоком 1 – поток тех моментов времени, когда нетерпеливый продавец изменяет цену на свой товар.

Теорема. Многомерное стационарное распределение $R(I)$ имеет мультипликативный вид

$$R(I) = \prod_{n=1}^{\infty} R_n(i_n),$$

где одномерные распределения $R_n(i_n)$ являются распределениями Пуассона с параметрами ρ_n, определяемыми соотношениями:

$$\rho_n = \frac{\Lambda}{\mu_{n0} + \mu_{n1}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\mu_{k1}}{\mu_{k0} + \mu_{k1}}.$$

Обозначим через T математическое ожидание времени пребывания заявки в системе. Тогда в работе показано, что

$$T=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_{n0}+\mu_{n1}}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\mu_{k1}}{\mu_{k0}+\mu_{k1}}$$

и стационарный режим в рассматриваемой системе существует при выполнении условия сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k$.

В п. **5.4** рассмотрен случай, когда на k-й фазе время обслуживания является случайной величиной с функцией распределения $B_k(x)$, зависящей от номера фазы, но одинаковой для всех линий. Для исследования этой системы был использован метод просеянного потока, предложенный А.А. Назаровым. Показано, что

$$R(I)=\prod_{k=1}^{\infty}R_k(i_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\Lambda_k^{\ i_k}}{i_k!}e^{-\Lambda_k}\ ,$$

где

$$\Lambda_k=\begin{cases}\Lambda b_1, & \text{при}\quad k=1,\\ \Lambda b_k\prod\limits_{v=1}^{k-1}P_v, & \text{при}\quad k\geq 2\end{cases}$$

и $b_k=\int\limits_0^{\infty}xdB_k(x)=\int\limits_0^{\infty}(1-B_k(x))dx$.

Этот результат легко переносится и на следующий случай: пусть заявка перешла на k-ю фазу. Тогда могут произойти следующие два события: а) спустя случайное время τ_{k0} с функцией распределения $B_{k0}(x)$ придет покупатель, который купит товар, и продавец покинет систему; б) спустя время τ_{k1} с функцией распределения $B_{k1}(x)$ у нетерпеливого продавца «сдадут нервы», и он снизит цену и перейдет на следующую фазу. Реализуется то событие, которое наступит раньше, то есть время пребывания заявки на k-й фазе $\tau_k=\min(\tau_{k0},\tau_{k1})$.

В этом случае верны предыдущие формулы со следующими значениями параметров:

$$P_k=P\{\tau_{k1}<\tau_{k0}\}=\int\limits_0^{\infty}dB_{k0}(x)\int\limits_0^{x}dB_{k1}(y)=\int\limits_0^{\infty}dB_{k1}(y)\int\limits_y^{\infty}dB_{k0}(x)\,,$$

$$b_k=M\{\min(\tau_{k0},\tau_{k1})\}=\int\limits_0^{\infty}xdB_{k0}(x)\int\limits_x^{\infty}dB_{k1}(y)+\int\limits_0^{\infty}ydB_{k1}(y)\int\limits_y^{\infty}dB_{k0}(x)\,.$$

В **заключении** к диссертации приведены основные результаты работы.

Публикации по работе

Результаты работы опубликованы в следующих статьях и материалах научных конференций:

1. Галажинская О.Н. Математическая модель продажи одиночного товара нетерпеливым продавцом // Вестник Томского государственного университета. Бюллетень оперативной научной информации. 2006. Февраль. № 58. – 91 с.
2. Галажинская О.Н. Продажа товара нетерпеливым продавцом при ступенчатом изменении цены // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 293. С.
3. Галажинская О.Н. Математическая модель продажи товара нетерпеливым продавцом при непрерывном изменении цены // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2006. Март. № 16. С. 202–208.
4. Галажинская О.Н. Бесконечно линейная бесконечно фазная система массового обслуживания со случайным прерыванием обслуживания // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2006. Август. № 18. С. 261–266.
5. Галажинская О.Н. Продажа товара нетерпеливым продавцом при ступенчатом изменении цены // PCI 2006. The international conference «Problems of cybernetics and informatics». Baku, 2006. Vol. 1. P. 186–189.
6. Галажинская О.Н. Продажа товара нетерпеливым продавцом при ступенчатом изменении цены // Пятая Всероссийская конференция по финансово-актуарной математике и смежным вопросам: Тезисы докладов. Красноярск, 2006. С. 22–23.
7. Галажинская О.Н. Бесконечно линейная бесконечно фазная система массового обслуживания с произвольным распределением времени обслуживания на каждой фазе // Научное творчество молодежи: Материалы X Всероссийской научно-практической конференции (21–22 апреля 2006 г., Анжеро-Судженск). Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. Ч. 1. С. 131–134.
8. Галажинская О.Н. Продажа товара нетерпеливым продавцом при ступенчатом изменении цены // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2006): Материалы V Международной научно-практической конференции (10–11 ноября 2006 г., Анжеро-Судженск). Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. Ч. 2. С. 103–106.