Томский государственный университет
Физический факультет

На правах рукописи

Казинский Пётр Олегович

# Эффективная динамика сингулярных источников в классической теории поля

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск 2007 г.

Работа выполнена на кафедре квантовой теории поля Томского государственного университета.

| | |
|---|---|
| **Научные руководители:** | доктор физико-математических наук,<br>профессор Семён Леонидович Ляхович;<br>кандидат физико-математических наук,<br>доцент Алексей Анатольевич Шарапов. |
| **Официальные оппоненты:** | доктор физико-математических наук,<br>профессор кафедры теоретической физики<br>Томского государственного университета<br>Владимир Александрович Бордовицын;<br>доктор физико-математических наук,<br>профессор кафедры теоретической физики<br>Томского государственного педагогического университета<br>Владимир Яковлевич Эпп. |
| **Ведущая организация:** | Институт сильноточной электроники ТФ СО РАН (г. Томск). |

Защита состоится « » марта 2007 г. в часов на заседании диссертационного совета Д 212.267.07 в Томском государственном университете по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан « » января 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.267.07
доктор физ.-мат. наук, профессор

И.В. Ивонин

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы

Описание динамики электрически заряженных низкоразмерных структур, таких как частицы, струны, мембраны является традиционным вопросом классической электродинамики. Использование таких моделей обусловлено тем, что они позволяют значительно упростить решение системы интегродифференциальных уравнений Максвелла-Лоренца. Успешное использование низкоразмерных моделей в классической электродинамике стимулировало их использование в других разделах теоретической физики: в гравитации; в теории струн; в теории космических струн; в теории сверхпроводимости, при описании вихрей; в теории дислокаций и т.д. Однако в большинстве случаев исследуется несамосогласованная динамика таких объектов, т.е. обычно считается, что влиянием поля, созданного самим заряженным объектом, можно пренебречь.

Построение уравнений движения с учетом самодействия в рамках классической электродинамики имеет уже столетнюю историю. Для точечной заряженной частицы в четырехмерном пространстве времени эффективные уравнения движения, т.е. уравнения движения с учетом эффектов самодействия, были получены Лоренцом еще в начале прошлого века, а затем обобщены Дираком в 1938 г. на релятивистский случай. Обобщение этих уравнений на произвольный кривой фон было дано ДеВиттом и Бремом в 1960 г. и скорректировано Хоббсом в 1968 г. Обобщения уравнений Лоренца-Дирака на случай заряженной частицы со спином были проведены в 1987-88 гг.

Тем не менее в последние годы снова возрос интерес к получению эффективных уравнений движения в рамках классической теории поля. Это обстоятельство вызвано как ростом экспериментальных возможностей, позволяющих регистрировать влияние эффектов самодействия, так и появлением новых моделей, эффективная динамика которых еще не была исследована. К первым можно отнести изучение эффективной динамики гравитирующих точечных масс, поскольку есть надежда зарегистрировать таким образом реакцию излучения гравитационных волн. Исследования в этой области начались только в последнее десятилетие. Второй фактор роста интереса к эффективным моделям низкоразмерных источников полей во многом обязан теории струн, где возникли модели с дополнительным числом измерений пространства-времени, а также такие фундаментальные объекты как браны. В этой связи особое значение имеет получение самосогласованных уравнений движения протяженных релятивистских объектов (бран) в рамках классической теории поля, которые можно рассматривать как низкоэнергетический предел соответствующих квантовополевых уравнений, поскольку последовательного квантования моделей с бранами до сих пор не построено. Стоит также отметить про непрекращающийся интерес к исследованию динамики сверхпроводящих космологических струн и струн, приближенно описывающих вихри в сверхпроводниках и плазме. Даже в рамках классической электродинамики продолжаются исследования эффективных моделей. Особенно актуальным в этой области на данный момент является получение релятивистских эффективных моделей для неточечных (расширенных) объектов, т.е. для систем заряженных частиц, исходя из системы уравнений Максвелла-Лоренца.

Учет самодействия низкоразмерных (сингулярных) источников полей связан с определенными трудностями, как принципиального, так и технического характера. Поэтому анализ силы самодействия обычно ограничивался первыми *двумя* ведущими вкладами для частиц и *одним* ведущим вкладом для протяженных объектов (бран). Кроме того, учет самодействия сингулярных источников всегда проводился в рамках *линейных* (линеаризованных) моделей, т.е. для тех моделей, в которых создаваемые источником поля подчиняются линейным дифференциальным уравнениям.

### Цели диссертационной работы

Ключевые цели работы могут быть сформулированы следующим образом:

1. Развитие методов вывода эффективных уравнений движения, позволяющих находить высшие поправки от самодействия, как в линейных, так и в нелинейных моделях классической теории поля.

2. Получение самосогласованных уравнений движения сингулярных источников в классической теории поля и исследование их эффективной динамики.

### Научная новизна работы

Все основные результаты диссертации (см. заключение автореферата) являются оригинальными и получены впервые.

### Научная и практическая значимость работы

Проведенные исследования практически закрывают проблему вывода эффективных уравнений движения в линейных моделях с сингулярными источниками, сводя эту проблему к *дифференцированию* конкретных выражений, указанных в диссертации. Эффективность этого метода была продемонстрирована большим количеством примеров, рассмотренных в диссертационной работе. Предложенная пертурбативная процедура нахождения членов асимптотического ряда для силы самодействия вместе с критерием перенормируемости, сформулированным в диссертации, закладывают основы для дальнейших исследований эффективной динамики в нелинейных моделях с сингулярными источниками. Рассмотренные эффективные модели, помимо того, что они являются яркой демонстрацией особенностей изложенных общих методов, представляют также самостоятельный интерес (см. актуальность темы).

### Защищаемые положения

На защиту выносятся:

1. Ковариантный метод регуляризации силы самодействия сингулярных источников в линейных и нелинейных моделях классической теории поля. Доказательство лагранжевости сингулярной части силы самодействия в линейной модели с сингулярными источниками в случае невырожденности метрики, индуцированной на мировом ли-

сте сингулярного источника. Доказательство классической перенормируемости линейных моделей с сингулярными источниками и критерий классической перенормируемости для нелинейных моделей.

2. Явные выражения для расходимостей и конечной части силы самодействия в модели электрически заряженной браны, распространяющейся на фоне пространства Минковского произвольной размерности, в частности, в моделях массивной и безмассовой заряженных частиц. Явные выражения для расходимостей и конечной части силы самодействия в модели браны, взаимодействующей с антисимметричным тензорным полем неминимальным образом на фоне плоского пространства-времени специальной размерности. Явные выражения для расходимостей в моделях частиц с взаимодействием Фолди.

3. Эффективные уравнения движения релятивистской электрически заряженной струны с током. Уравнения на внешние электромагнитные поля, при которых возможны стационарные состояния абсолютно эластичной заряженной струны, имеющей форму кольца (окружности). Решения эффективных уравнений движения абсолютно эластичного заряженного кольца в отсутствии внешних полей, а также во внешнем постоянном однородном магнитном поле. Оценка частоты, на которой можно наблюдать излучение создаваемое кольцом. Класс решений эффективных уравнений движения абсолютно несжимаемой заряженной струны с током.

4. Условия на константы связи в модели $p$-браны на фоне пространства Минковского произвольной размерности, взаимодействующей с мультиплетом полей: антисимметричным тензорным полем, скалярным полем и линеаризованной гравитацией, – обеспечивающие сокращение двух ведущих расходимостей.

5. Пуанкаре-инвариантное описание эффективной динамики локализованной системы заряженных частиц в классической электродинамике при помощи ее собственных мультипольных моментов. Релятивистски-инвариантное определение мультипольных моментов, как для точечных систем, так и для систем, приближенно описываемых протяженными релятивистскими объектами (бранами). Новый общековариантный функционал действия для релятивистской идеальной жидкости. Эффективная модель для нейтральной системы заряженных частиц, обладающей собственным дипольным моментом и общее решение ее свободных уравнений движения.

6. Условия применимости теории возмущений и соответствующих линеаризованных уравнений в моделях: гравитирующей браны; браны, взаимодействующей с безмассовым скалярным полем с вершиной $\phi^n$; браны, взаимодействующей с антисимметричным тензорным полем и эйнштейновской гравитацией. Доказательство классической неперенормируемости гравитационного самодействия браны коразмерности $k > 2$. Доказательство классической перенормируемости моделей частицы, взаимодействующей со скалярными полями с вершинами $\phi^3$ и $\phi^4$. Явное выражения для первой нелинейной поправки в силу самодействия для модели частицы, взаимодействующей со скалярным полем с вершиной $\phi^n$. Явное выражение для суммы всех

одновершинных вкладов в силу самодействия частицы, взаимодействующей со скалярным полем с вершиной $\phi^4 \exp(-\beta\phi^2)$, $\beta > 0$, в пределе снятия регуляризации.

### Апробация работы и публикации

Основные результаты докладывались на Международной летней школе-семинаре по современным проблемам теоретической и математической физики (Петровские чтения, г. Казань, 2001-06 гг.); Международной школе-семинаре "Quantum Fields and Strings" (п. Домбай, 2003 г.); XLII Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс" (г. Новосибирск, 2004 г.); VII Всероссийской конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Наука и образование" (г. Томск, 2003 г.); а также на научных семинарах кафедр теоретической физики и квантовой теории поля Томского государственного университета, кафедры высшей математики и математической физики Томского политехнического университета.

Результаты диссертации частично опубликованы в 8 работах, список которых приведен в конце автореферата.

### Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех разделов, заключения, четырех приложений и списка цитируемой литературы. Материал изложен на 157 страницах, включает 7 рисунков и список литературы из 145 наименований. Текст диссертации набран в издательской системе LaTeX.

## СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

**В первом разделе** поставлена проблема реакции излучения (самодействия) в линейных моделях с сингулярными источниками и дано ее решение для сингулярных источников, распространяющихся на фоне плоского пространства-времени.

В начале этого раздела дается определение линейной модели общего вида и выявляется общая структура силы самодействия в таких моделях. Оказывается, что сила самодействия не является, вообще говоря, лагранжевой, т.е. не может быть получена варьированием некоторого эффективного функционала действия. Причиной этого является вклад в силу самодействия от антисимметричной части запаздывающей функции Грина рассматриваемой линейной модели.

*В первом подразделе* этого раздела дается определение сингулярного источника и вводятся основные обозначения. Кроме того, здесь приводится общий вид запаздывающей функции Грина для локальной пуанкаре-инвариантной линейной модели теории поля, а также ее симметричной и антисимметричной части.

*Во втором подразделе* дается общая пуанкаре-инвариантная процедура регуляризации самодействия в произвольной линейной модели с сингулярным источником. Приведены явные выражения для членов асимптотического ряда по параметру регуляризации для силы самодействия. При этом существенным образом использовались морсовские координаты на мировом листе источника (бране), т.е. такие координаты, в которых квадрат интервала между двумя точками браны в объемлющем пространстве-времени совпадает с квадратом интервала между этими точками на бране:

$$\eta_{\mu\nu}(x^\mu(\tau) - x^\mu(s))(x^\nu(\tau) - x^\nu(s)) = \eta_{ij}(\tau^i - s^i)(\tau^j - s^j),$$

где $\eta_{\mu\nu}$ и $\eta_{ij}$ – соответствующие метрики Минковского. Существование таких координат обеспечивается невырожденностью метрики, индуцированной на мировом листе браны. В диссертации приведены явные формулы, связывающие морсовские координаты с произвольной системой координат.

Введено понятие производящей функции расходимостей, разложение которой в асимптотический ряд дает все потенциально возможные расходимости в рассматриваемой линейной модели. Доказана лагранжевость сингулярной части асимптотического ряда для силы самодействия в предположении невырожденности метрики, индуцированной на мировом листе источника. Отметим, что сингулярная часть асимптотического ряда силы самодействия линейной модели содержит конечное число слагаемых, в том числе и в случае вырожденной метрики.

Также в этом подразделе дана интерпретация получающимся асимптотическим рядам и исследована их зависимость от выбора схемы регуляризации. Оказалось, что в классе однопараметрических регуляризаций, определяемых квадратом интервала (объемлющего) пространства-времени, конечная часть инвариантна относительно выбора регуляризации "по модулю" добавления к ней слагаемых, пропорциональных вкладам, содержащимся в расходящейся части, с коэффициентами пропорциональности не зависящими от полей $x(\tau)$. Весь асимптотический ряд определятся однозначно, с точностью до умножения членов ряда при различных отличных от нуля степенях параметра регуляризации на некоторые числа и добавления членов, стоящих при низших степенях параметра регуляризации. Указан класс эквивалентности, которому будут принадлежать асимптотические ряды силы самодействия, полученные в рамках различных однопараметрических схем регуляризации, сохраняющих ковариантность модели.

**Во втором разделе** рассматриваются различные примеры линейных моделей, для которых строятся эффективные уравнения движения, т.е. уравнения движения с учетом самодействия, а в некоторых случаях проводится также исследование получающихся эффективных моделей.

*В первом подразделе* найдены явные выражения для первых двух членов производящей функции расходимостей в случае электрически заряженной браны. Высшие члены асимптотического разложения более громоздки, вследствие чего в диссертации не приведены. Оказалось, что ведущий вклад от самодействия поглощается перенормировкой массы (натяжения браны). Первая нетривиальная поправка от самодействия описывает жесткость частицы (браны). Также найдено, что в модели электрически заряженной браны самодействие приводит к $[(d-n)/2]$ расходящимся слагаемым, поэтому указанные два члена производящей функции расходимостей исчерпывают все расходимости в эффективной модели электрически заряженной браны, коразмерность которой не превосходит пяти.

Более детально рассмотрены модели массивной частицы на фоне пространства-времени произвольной размерности и безмассовой частицы в $d = 4$.

В первом случае приведены явные формулы для производящей функции расходимостей эффективного действия (первые шесть членов) и силы самодействия (первые четыре члена), т.е., фактически, для потенциала и напряженности электромагнитного поля, взятых в малой окрестности точечного источника. Найденных членов производящих функций оказалось достаточно, чтобы получить явные выражения для расходимостей эффективной модели массивной заряженной частицы в размерностях $d = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ и силы самодействия в $d = 3, 4, 5, 6$. Отметим, что в нечетномерном пространстве-времени конечная часть силы самодействия нелокальна и задается довольно обширным выражением.

Самодействие безмассовой заряженной частицы в $d = 4$ рассматривается на классе *невырожденных* изотропных траекторий, т.е. траекторий, для которых $\ddot{x}^2 < 0$. Вырожденные траектории образуют намного более узкий класс и, практически, исчерпываются изотропными траекториями с прямыми участками. Необходимые и достаточные условия на внешние поля, при которых траектория безмассовой частицы будет вырожденной, сформулированы в диссертации.

Поскольку индуцированная на мировой линии безмассовой частицы метрика вырождена (равна нулю), то при построении эффективной модели обобщается понятие морсовских координат и заново выводятся формулы, связывающие эти координаты с натуральной параметризацией. В этом и состоит особенность вывода эффективных уравнений движения в модели безмассовой частицы. Затем применяется общая процедура регуляризации и выводится выражение для силы самодействия безмассовой заряженной частицы. Оказалось, что в эффективной модели возникают три расходимости, одна из которых *нелагранжева*. Эту расходимость естественно отождествить с мощностью излучения безмассовой заряженной частицы. Для лагранжианов оставшихся двух расходимостей приведены явные выражения. Кроме того, с точностью до несущественных в рассматриваемой модели членов, найдено явное выражение для одной из двух лагранжевых расходимостей, которые, дополнительно к трем только что указанным расходимостям, возникают в силе самодействия безмассовой заряженной частицы в $d = 6$.

В заключение рассмотрена модификация дираковской процедуры вывода эффективных уравнений движения заряженных частиц применительно к безмассовому случаю (формализм тензора энергии-импульса). Здесь также показано, что дираковская схема регуляризации дает *другой* результат для *высших* членов асимптотического ряда, нежели используемая в диссертации ковариантная регуляризация функции Грина. Тем не менее получаемые в рамках этих двух схем регуляризации асимптотические ряды принадлежат одному классу эквивалентности, определенному в заключении первого раздела. Приведено уравнение трубки, окружающей мировую линию частицы, через которую необходимо считать поток тензора энергии-импульса, чтобы воспроизвести результат, полученный в рамках используемой в диссертации схемы регуляризации.

*Во втором подразделе* найдены явные выражения для расходимостей в эффективной модели $(n-1)$-браны, распространяющейся на фоне $(2n+1)$-мерного пространства Минковского и взаимодействующей с полем $n$-формы.

В случае четномерной браны найден явный вид лагранжиана эффективного действия (производящего действия расходимостей). Все расходимости рассматриваемой модели получаются варьированием производящего действия расходимостей. Чтобы получить конечную часть силы самодействия необходимо вычесть расходимости из регуляризованного выражения для силы самодействия и взять предел снятия регуляризации. В результате получается нелокальное выражение. Однако, если "отключить" минимальное взаимодействие, то сила реакции излучения локализуется и становится лагранжевой. Выражение для лагранжиана силы самодействия в этом случае также приведено. В обоих случаях в эффективной модели возникает $(n+2)/2$ расходимости, функциональный вид которых такой же, как для первых $(n+2)/2$ расходимостей в эффективной модели электрически заряженной браны.

Для нечетномерной браны сразу рассматривается случай, когда сила самодействия локализуется и, как результат, становится лагранжевой. Однако, несмотря на то что сила самодействия локализовалась, лагранжиан для нее задается нелокальным выражением. Явные выражения для лагранжиана и силы самодействия в диссертации приведены. Оказалось, что в эффективной модели возникает $(n+1)/2$ расходимостей, наиболее сингулярное из которых может включено в натяжение браны. В качестве примера рассмотрен случай $n=1$, т.е. частица в $d=3$. Найдено явное выражение для силы самодействия такой частицы. Единственная возникающая в этом случае расходимость поглощается перенормировкой массы.

*В третьем подразделе* рассмотрена эффективная динамика электрически заряженной струны с током с учетом первой поправки от самодействия. Показано, что учет самодействия в струнных моделях приводит к уравнениям Лондонов для тока в сверхпроводнике, при условии, что свободное действие струны инвариантно относительно подгруппы группы диффеоморфизмов струны, генерируемой векторными полями, дуальными к векторному полю плотности тока на струне, в частности, для репараметризационно-инвариантного действия. Полученные уравнения обобщают известное ранее условие сверхпроводимости в струнных моделях. Также найдено общее решение этих уравнений при отсутствии внешних электромагнитных полей.

Для моделей струн, обладающих вышеуказанной симметрией, найден интеграл движения, который в полуклассическом подходе (например, при квантовании по Бору-Зоммерфельду) должен принимать дискретные значения. Если пренебречь самодействием струны, то квантование этого интеграла движения приводит к хорошо известному квантованию магнитного потока через поверхность, натянутую на замкнутую струну.

Далее рассмотрена эффективная модель абсолютно эластичной заряженной струны в форме кольца. Такая модель описывает сильноточный пучок заряженных частиц, движущихся по окружности. Найдены уравнения на внешние электромагнитные поля, при выполнении которых струна будет сохранять свою конфигурацию. Оказалось, что при одинаковых внешних полях, заряде и радиусе кольца существуют два стационарных положения кольца, имеющего различные угловые скорости (два стационарных режима). Такая ситуация возможна только в полях определенной конфигурации, которые указаны в диссертации. Также найдены решения эффективных уравнений движения абсолютно эластичного заряженного кольца в отсутствии внешних полей и во внешнем однородном магнитном поле. Дана оценка частоты колебаний такого кольца около положения равновесия. Квантование интеграла движения, о котором упоминалось выше, приводит к квантованию положений равновесия кольца и, соответственно, к квантованию частот колебаний.

Затем рассматривается эффективная динамика абсолютно несжимаемой струны с током. Формулируется понятие релятивистской несжимаемости и выводятся соответствующие эффективные уравнения движения. Кроме того, найдены стационарные положения такой струны при отсутствии внешнего поля, а также нерелятивистский предел эффективных уравнений движения в случае заряженного диэлектрика и незаряженного проводника. Для эффективных уравнений движения равномерно заряженного диэлектрика и проводника с током указан класс точных решений, описывающих текущую вдоль себя струну.

В заключение подраздела дана гидродинамическая интерпретация модели несжимаемой струны. Оказалось, что эта модель эквивалентна модели $(1+1)$-гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости, вложенной в пространство Минковского. Такая ковариантная формулировка модели абсолютно несжимаемой струны позволила легко найти ее релятивистские интегралы движения.

*В четвертом подразделе* указан класс моделей со специальным типом взаимодействия, приводящим к локализации поля на носителе источника. Взаимодействия такого типа были впервые исследованы Фолди в рамках спинорной электродинамики и применяются в феноменологических моделях при описании внутреннего распределения зарядов нуклонов. Следуя терминологии Фолди константы связи, возникающие в такого типа взаимодействии, будем называть аномальными зарядами.

В качестве примера рассматривается точечная электрически заряженная частица с аномальным зарядом в рамках классической электродинамики. Найдено явное выражение для силы самодействия такой частицы. Оказалось, что в силе самодействия возникают такие же структуры, что и в силе самодействия электрически заряженной точечной частицы, но с другими коэффициентами, зависящими от параметра регуляризации. В частности, в данной эффективной модели появляется три лагранжевых расходимости (вместо одной для электрически заряженной частицы), наиболее сингулярная из которых пропорциональна свободным уравнениям движения частицы.

Для первой нетривиальной поправки от самодействия возникает два конкурирующих слагаемых: сила Лоренца-Дирака; и лагранжевое слагаемое с высшими производными, связанное с самодействием аномальной составляющей тока, явный вид которого приведен в диссертации. Указаны значения параметров эффективной модели, при которых будет доминировать либо первый, либо второй вклад. Исходя из физической интерпретации аномальных зарядов, как некоторых форм-факторов внутреннего распределения заряда, естественно предположить, что аномальный ток создает некоторое малое электромагнитное поле, пропорциональное параметру регуляризации, вне мировой линии частицы. В этом случае аномальные заряды ведут себя также как и электрические: одноименные заряды отталкиваются, а разноименные – притягиваются. При этом сила взаимодействия аномальных зарядов зависит от расстояния между частицами как $r^{-8}$. Аномальные заряды также взаимодействуют с электрически заряженными частицами с силой пропорциональной $r^{-6}$, причем можно так определить знак аномальных зарядов, чтобы заряды (аномальный и электрический) одного знака отталкивались, а разных знаков – притягивались.

В заключение сформулирована квантовая модель *скалярных* частиц с взаимодействием Фолди. К сожалению, не удалось найти каких-либо нетривиальных решений самосогласованной системы уравнений движения скалярных и электромагнитных полей. В сферически симметричном стационарном случае система самосогласованных уравнений сводится к гамильтоновой системе четырех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказать наличие или отсутствие локализованных решений у этих уравнений не удалось. Безусловно, такие частице-подобные решения представляют определенный физический интерес. Тем более, что получившиеся уравнения накладывают серьезные ограничения на возможный выбор свободных параметров модели и, в частности, в связывают аномальный заряд с полной энергией локализованного решения.

*В пятом подразделе* рассмотрена эффективная модель браны, взаимодействующей с мультиплетом полей: скалярным полем, антисимметричным тензорным полем и эйнштейновской гравитацией. Анализ расходимостей ограничивался линейным приближением по константам связи. Оказалось, что константы связи могут быть выбраны таким образом, что две ведущие расходимости обращаются в нуль. Условие, обеспечивающее сокращение расходимостей, приведено в диссертации. В результате такого сокращения в эффективной модели остается $[(d-n-4)/2]$ расходимостей. Другим словами, если константы взаимодействия связаны вышеуказанным соотношением, то эффективная динамика браны, с коразмерностью не превышающей пяти, свободна от расходимостей в линейном приближении.

В случае четырехмерного пространства Минковского условия, обеспечивающие сокращение *ведущей* расходимости, были известны для массивной частицы, взаимодействующей с мультиплетами скалярных и векторных полей, и для струны на фоне антисимметричного тензорного поля, скалярного поля и поля линеаризованной гравитации. Проведенный в диссертации анализ обобщает эти результаты на случай браны, вложенной в пространство-время произвольной размерности. Более того, в диссертации найдены условия сокращения *двух* ведущих расходимостей.

Проведенный здесь, а также вышеупомянутых работах, анализ не является полным в том смысле, что необходимо также исследовать нелинейные вклады в самодействие, чтобы утверждать, что эффективная модель свободна от расходимостей.

*В шестом подразделе* предложен метод описания эффективной динамики локализованных систем заряженный частиц, либо локализованных заряженных жидкостей, в терминах их собственных мультипольных моментов. Дано релятивистское определение собственных мультиполей, совпадающее в нерелятивистском пределе со стандартным определением. Исходя из этого определения получены мультипольные разложения потенциалов Льенара-Вихерта и полного тока системы с точностью до мультиполей второго порядка включительно.

Далее, при наложении определенных ограничений на характерные масштабы системы, построена эффективная модель для *заряженной* системы частиц, описывающая ее состояние посредством задания траектории центра масс и собственного дипольного момента. В пределе точечной системы уравнения движения центра масс переходят в уравнения Лоренца-Дирака. Также получены эволюционные уравнения для мультиполей второго порядка. В том случае, когда система заряженных частиц состоит из частиц одного сорта, т.е. с одинаковыми удельными зарядами, уравнения эволюции мультиполей второго порядка несколько упрощаются в силу того, что для таких систем собственный дипольный момент равен нулю. Для этого случая уравнения движения центра масс и уравнения, задающие эволюцию вторых мультипольных моментов, также приведены. В частности, при отсутствии внешних электромагнитных полей и постоянном квадрупольном моменте системы, уравнения, описывающие эволюцию магнитного момента, переходят в хорошо известные уравнения Баргманна-Мишеля-Телегди, правда, с дополнительными связями на эволюцию магнитного момента. Из общей теории, изложенной в первом разделе, следует, что члены асимптотического ряда для силы самодействия при полуцелых степенях параметра регуляризации лагранжевы. Лагранжиан для вышеупомянутых вкладов в силу самодействия системы заряженных частиц в диссертации приведен.

Затем рассматривается эффективная динамика *нейтральной* точечной системы частиц, обладающей собственным дипольным моментом. Оказалось, что уравнения движения центра масс точечного диполя и собственного дипольного момента отличаются от аналогичных уравнений точечной частицы с магнитным моментом и, по-видимому, впервые получены в этой диссертационной работе. В нерелятивистском пределе уравнения движения центра масс без учета самодействия совпадают с известными ранее уравнениями и, в то же время, отличаются от их известных релятивистских обобщений.

Также, после вычисления полной мощности излучения точечного диполя, которая совпала (с точностью до некоторых опечаток) с известной ранее мощностью излучения точечного магнитного момента, найден так называемый связанный импульс точечного диполя. Выражение для связанного импульса является локальной величиной, что согласуется с общим утверждением, сформулированным в диссертации. Таким образом, проведен анализ эффективной модели точечного диполя, аналогичный тейтельбомовскому анализу модели точечной заряженной частицы. Заключительным этапом исследования эффективной динамики точечного диполя стало решение его эффективных уравнений движения в отсутствии внешних полей. Найдено общее решение этих уравнений, которое описывает свободный, медленно вращающийся, излучающий диполь.

В заключение этого подраздела рассматривается эффективная динамика локализованной заряженной идеальной жидкости. Предложено новое ковариантное действие для идеальной жидкости. Оказалось, что при выполнении дополнительного условия параллельности векторов плотности тока массы и электрического заряда, эффективная модель релятивистской заряженной пыли совпадает с ранее рассмотренной эффективной моделью для системы заряженных частиц. В конце этого подраздела дано обобщение понятия мультипольных моментов для систем, приближенно описываемых протяженными релятивистскими объектами (бранами). Другими словами, дано пуанкаре-инвариантное определение линейной плотности дипольного момента для струн, поверхностной плотности магнитного момента для мембран и т.п.

**В третьем разделе** проводится пертурбативное изучение самодействия в *нелинейных* моделях с сингулярными источниками.

*В первом подразделе* дается общая постановка проблемы самодействия в нелинейных моделях с сингулярными источниками.

*Во втором подразделе* предложена общая лоренц-инвариантная процедура регуляризации самодействия в нелинейных моделях с сингулярными источниками в рамках теории возмущений. Указан способ вычисления порядка ведущего вклада диаграммы по ее составляющим и метод нахождения функционального вида такого вклада. В частности, для модели сингулярного источника скалярных полей $\phi$ с вершиной $\phi^n$ ведущий вклад от самодействия может быть включен в натяжение браны (массу, в случае частицы). В случае одной вершины приведено явное выражения для ведущего вклада диаграммы (численного коэффициента). Отметим, что изложенная процедура пертурбативного нахождения членов асимптотического ряда позволяет найти вклад любого порядка по степеням констант связи и параметров регуляризации.

Предложенная процедура регуляризации не является единственно возможно лоренц-инвариантной процедурой регуляризации. Исходя из физических соображений среди всех процедур регуляризации выделено два типа: А) процедура регуляризации применяется только к внешним линиям; Б) процедура регуляризация применяется ко всем функциям Грина, при этом функции Грина, отвечающие одному типу полей, деформируются одним и тем же параметром регуляризации. С физической точки зрения первый способ состоит в том, что “размазываются” сингулярные источники, а параметр регуляризации характеризует степень “размазывания”. Второй способ можно интерпретировать как усреднение по всем мелкомасштабным флуктуациям полей вплоть до некоторого масштаба, характеризуемого параметром регуляризации и своего для каждого поля.

Также проводится общий анализ регуляризованных вкладов теории возмущений и формулируется понятие *классически перенормируемой* модели: модель называется классически перенормируемой, если в ней возникает *конечное* число расходимостей. Более строго, от классически перенормируемой модели требуется применимость теории возмущений в пределе снятия регуляризации. Эти две формулировки практически всегда дают одинаковый результат, за исключением “пограничных” моделей, для которых вклады ряда теории возмущений с *различным* числом источников разлагаются по степеням параметра регуляризации, начиная с *одной и той же* его степени. Отметим, что согласно такому определению перенормируемости линейные модели с сингулярными источниками классически перенормируемы.

В заключение подраздела формулируется *критерий перенормируемости* для нелинейной модели с сингулярными источниками, аналогичный критерию перенормируемости в квантовой теории поля, основанный на размерности констант связи.

**В четвертом разделе** рассматриваются примеры регуляризации силы самодействия в нелинейных моделях с сингулярными источниками.

*В первом подразделе* рассмотрена нелинейная эффективная модель гравитирующей браны. Найдено условие применимости теории возмущений над плоским фоном. Оказалось, что эффективная модель гравитирующей $(n_0 - 1)$-браны классически перенормируема, если, и только если, $d - n_0 \leq 2$. Более того, при выполнении этого условия в эффективная модели гравитирующей браны вообще отсутствуют расходимости. При $d - n_0 > 2$ (например, для гравитирующей частицы на фоне четырехмерного пространства-времени) каждая диаграмма теории возмущений расходится в пределе снятия регуляризации, причем степень расходимости диаграммы нарастает с увеличением числа источников.

В заключение проанализирована принципиальная возможность экспериментальной проверки выполнения, или не выполнения, вышеуказанного условия применимости теории возмущений. Оказалось, что если величина параметра регуляризации может быть зафиксирована из каких-либо физических соображений, то такая проверка возможна, поскольку в этом случае можно экспериментально определить все параметры эффективной модели (в том числе и затравочную массу). Отметим, что для самосогласованных уравнений движения гравитирующих тел не выполнен, так называемый, слабый принцип эквивалентности, говорящий о том, что все тела в однородном гравитационном поле падают с одинаковым ускорением. В то же время поправка, нарушающая этот принцип, порядка отношения радиуса Шварцшильда рассматриваемого объекта к его характерным размерам. Требование малости этой величины возникает как необходимое условие применимости теории возмущений, в рамках которой и получается выражение для этой поправки.

*Во втором подразделе* рассмотрена эффективная модель $(n_0 - 1)$-браны, взаимодействующей со скалярным безмассовым полем с вершиной $\phi^n$. Найдено условие применимости теории возмущений над нулевым фоном $\phi = 0$. Показано, что при $(n-1)/(n-2) \geq (d - n_0)/2$ эффективная модель является классически перенормируемой. В пограничном случае, $(n-1)/(n-2) = (d-n_0)/2$, вклад от каждой диаграммы теории возмущений расходится как $\varepsilon^{-1/(n-2)}$, $\varepsilon \to 0$. Из общего анализа, приведенного в предыдущем разделе, следует, что ведущая расходимость может быть поглощена перенормировкой натяжения (массы) браны. После этого "пограничные" модели при $n > 4$ становятся конечными, при $n = 3$ в модели остается бесконечное число расходящихся слагаемых при $\varepsilon^{-1/2}$ и $\ln \varepsilon$, а при $n = 4$ остаются только логарифмические расходимости. Модели, удовлетворяющие условию $(n-1)/(n-2) = (d-n_0)/2$, являются конформно-инвариантными, поэтому от всех расходимостей можно избавиться другим способом – переопределив константы связи, или другими словами, выбрав в качестве масштаба длины в такой модели величину параметра регуляризации.

В случае частицы на фоне четырехмерного пространства Минковского эффективная модель является классически перенормируемой, если, и только если, $n \leq 4$, что совпадает с известным условием перенормируемости в квантовой теории поля. В частности, при

$n = 3$ эффективная модель в пределе снятия регуляризации становится линейной, т.е. нелинейные поправки будут давать исчезающе малый вклад.

Далее найдено явное выражение для ведущего вклада первой нелинейной поправки от самодействия в модели частицы, взаимодействующей со скалярным полем с вершиной $\phi^n$ на фоне плоского пространства-времени произвольной размерности. Проанализирована зависимость результата от выбора схемы регуляризации типа А или Б. Для простоты изложения рассматривался случай четномерного пространства-времени. В этом случае найдены явные выражения для наиболее существенного вклада по степеням параметра регуляризации в первую нелинейную поправку в рамках регуляризации типа Б. Также дана асимптотическая оценка при больших $n$ отношения ведущих вкладов, возникающих при регуляризациях типа А и Б. Оказалось, что в четырехмерном пространстве-времени в достаточно большом интервале чисел $n$ обе схемы регуляризации дают практически один и тот же результат.

Можно всегда расширить класс полученных перенормируемых моделей, добавив к ним такие модели, которые при больших значениях полей, создаваемых сингулярным источником, эффективно сводятся к известным перенормируемым. В таких моделях необходимо будет ввести такое же конечное число новых параметров, поглощающих все расходимости, как и в той перенормируемой модели, к которой она сводится при больших значениях полей.

В качестве примера перенормируемой модели, полученной в результате такого расширения, рассмотрена модель браны, взаимодействующей с безмассовым скалярным полем с вершиной $\phi^4 \exp(-\beta\phi^2)$, $\beta > 0$. Эта модель становится линейной и безмассовой при больших значениях полей (асимптотически свободна) и инвариантна относительно замены $\phi \to -\phi$. В случае частицы на фоне четномерного пространства Минковского найден ведущий вклад в самодействие от всех одновершинных диаграмм данной модели в рамках регуляризации типа А. Оказалось, что этот вклад конечен в пределе снятия регуляризации. Явная формула для получающегося конечного выражения приведена в диссертации. В силу того что *ведущий* вклад конечен, можно ожидать, что *высшие поправки* к нему по степеням параметра регуляризации обращаются в нуль в пределе снятия регуляризации. Приведенных выше общие рассуждений дают основание полагать, что такого же эффекта следует ожидать и для сумм всех двухвершинных, трехвершинных и т.д. диаграмм, т.е. они будут давать конечные вклады в силу самодействия.

*В третьем подразделе* рассмотрена модель электрически заряженной частицы, взаимодействующей, помимо электромагнитных полей, с эйнштейновской гравитацией, т.е., фактически, рассмотрена система уравнений Эйнштейна-Максвелла с сингулярным источником. Найдено условие применимости теории возмущений над фоном $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $A_\mu = 0$ для описания эффективной динамики такой модели. Поскольку используется регуляризацию типа А, в эффективной модели возникает два параметра регуляризации – каждый для своего типа источников. Кроме того, при выводе условия применимости теории возмущений размерность пространства-времени и размерность сингулярного источника не фиксировались, что позволяет использовать полученное условие при анализе модели $(n_0 - 1)$-браны, взаимодействующей с калибровочным полем $n_0$-форм на фоне эйнштейновской гравитации. Оказалось, что при $d-n_0>2$ при стремлении параметров (или даже одного параметра) регуляризации к нулю, высшие члены ряда теории возмущений будут давать большие вклады чем низшие, и для их перенормировки потребуется вводить в эффективную модель бесконечное число новых параметров, т.е. модель не является классически перенормируемой. В частности, модель заряженной частицы на фоне эйнштейновской гравитации в $d=4$ не является перенормируемой.

В заключение для гравитирующей электрически заряженной частицы в четырехмерном пространстве-времени выписаны необходимые условия применимости для описания ее эффективной динамики уравнений, получающихся в рамках соответствующих линейных моделей: уравнений Лоренца-Дирака; и уравнений, учитывающих реакцию излучения линеаризованной гравитации. Если найденные условия не выполнены, то основной вклад в силу самодействия электрически заряженной гравитирующей частицы будет даваться нелинейными поправками.

## Основные результаты

1. Разработан новый ковариантный метод регуляризации силы самодействия сингулярных источников. Для *линейных моделей* найдены явные выражения для членов асимптотического ряда, задающего силу самодействия. Доказана лагранжевость его сингулярной части в случае невырожденности метрики, индуцированной на мировом листе сингулярного источника. Для *нелинейных моделей* разработана пертурбативная процедура нахождения членов асимптотического ряда силы самодействия. Найдено явное выражение для ведущей расходимости.

2. Введено понятие классической перенормируемости модели теории поля с сингулярными источниками аналогичное понятию перенормируемости в квантовой теории поля. Доказано, что линейные модели *классически перенормируемы*. Для нелинейных моделей указан *критерий классической перенормируемости*, основанный на размерности констант связи, входящих в действие модели. Найден класс перенормируемых нелинейных моделей с сингулярными источниками.

3. Впервые получены:

   (a) Явные выражения для расходимостей и конечной части силы самодействия в модели *электрически заряженной браны*, распространяющейся на фоне пространства Минковского произвольной размерности, в частности, в моделях массивной и безмассовой заряженных частиц. Полученные эффективные уравнения движения обобщают уравнения Лоренца-Дирака для массивной заряженной частицы в четырехмерном пространстве-времени. Найдены явные выражения для расходимостей и конечной части силы самодействия в модели браны, взаимодействующей с антисимметричным тензорным полем *неминимальным* образом на фоне плоского пространства-времени специальной размерности. Получены явные выражения для расходимостей в моделях частиц с так называемым *взаимодействием Фолди*.

(b) Эффективные уравнения движения релятивистской электрически заряженной *струны с током.* Показано, что репараметризационная инвариантность свободного действия струны накладывает ограничения на возможный вид тока. Получены уравнения на внешние электромагнитные поля, при которых возможны стационарные состояния *абсолютно эластичной* заряженной струны, имеющей форму кольца (окружности). Найдены решения эффективных уравнений движения абсолютно эластичного заряженного кольца в отсутствии внешних полей, а также во внешнем постоянном однородном магнитном поле. В последнем случае дана оценка частоты, на которой можно наблюдать излучение создаваемое кольцом. Найден класс решений эффективных уравнений движения *абсолютно несжимаемой* заряженной струны с током.

(c) Условия на константы связи в модели $(n-1)$-браны на фоне $d$-мерного пространства Минковского, взаимодействующей с мультиплетом полей: антисимметричным тензорным полем, скалярным полем и линеаризованной гравитацией, – обеспечивающие *сокращение* двух ведущих расходимостей. Показано, что асимптотический ряд силы самодействия сингулярного источника содержит $[(d-n-4)/2]$ расходящихся слагаемых.

(d) Пуанкаре-инвариантное описание эффективной динамики локализованной *системы заряженных частиц* в классической электродинамике при помощи ее собственных мультипольных моментов. Дано релятивистски-инвариантное определение собственных мультипольных моментов, как для точечных систем, так и для систем, приближенно описываемых протяженными релятивистскими объектами (бранами). Предложен новый общековариантный функционал действия для релятивистской идеальной жидкости. В случае релятивистской заряженной пыли доказана эквивалентность описания проблемы реакции излучения мультипольных моментов в модели частиц и гидродинамической модели. Получена эффективная модель для нейтральной системы заряженных частиц, обладающей собственным *дипольным моментом*, и описана ее свободная динамика.

(e) Условия применимости теории возмущений и соответствующих линеаризованных уравнений в моделях гравитирующей браны; браны, взаимодействующей с безмассовым скалярным полем с вершиной $\phi^n$; браны, взаимодействующей с антисимметричным тензорным полем и эйнштейновской гравитацией. Установлена классическая *неперенормируемость* гравитационного самодействия браны коразмерности $k > 2$. Доказана классическая *перенормируемость* моделей частицы, взаимодействующей со скалярными полями с вершинами $\phi^3$ и $\phi^4$. Для модели частицы, взаимодействующей со скалярным полем с вершиной $\phi^n$, найдено явное выражения для первой *нелинейной поправки* в силу самодействия. Получено явное выражение для суммы всех одновершинных вкладов в силу самодействия частицы, взаимодействующей со скалярным полем с вершиной $\phi^4\exp(-\beta\phi^2)$, $\beta > 0$, и установлена *конечность* этого выражения в пределе снятия регуляризации.

**Публикации по теме диссертации**


1. Kazinski P.O., Lyakhovich S.L., Sharapov A.A. Radiation reaction and renormalization in classical electrodynamics of a point particle in any dimension//Phys. Rev. D. – 2002. – v. 66. – p. 025017. hep-th/0201046.

2. Kazinski P.O., Sharapov A.A. Radiation reaction for a massless charged particle//Class. Quant. Grav. – 2003. – v. 20. – p. 2715. hep-th/0212286.

3. Kazinski P.O. Radiation reaction for multipole moments//hep-th/0604168.

4. Казинский П.О., Шарапов А.А. Реакция излучения и перенормировка в классической теории поля с сингулярными источниками//ТМФ. – 2005. – т. 143. – с. 375.

5. Казинский П.О. Эффективная динамика электрически заряженной струны с током//ЖЭТФ. – 2005. – т. 128. – с. 312. hep-th/0507237.

6. Казинский П.О., Шарапов А.А. Реакция излучения и перенормировка в теории протяженных релятивистских объектов//Новейшие проблемы теории поля/Под ред. А.В. Аминовой. – Казань, 2004. – т. 4. – с. 117.

7. Казинский П.О. Реакция излучения протяженных релятивистских объектов//Материалы VII Всероссийской конференции студентов, аспирантов и молодых ученых “Наука и образование”. Томский государственный педагогический университет. Томск. 14-18 апреля 2003 г. – Томск, 2003. – т. 1. – с. 114.

8. Казинский П.О. Регуляризация реакции излучения в линейных теориях поля с сингулярным источником//Материалы XLII Международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс”: Физика. Новосибирский государственный университет. Новосибирск. 13-15 апреля 2004 г. – Новосибирск, 2004. – с. 185.