Томский государственный университет
Физический факультет

На правах рукописи

Куприянов Владислав Геннадьевич

Квантование нелагранжевых теорий

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск 2007 г.

Работа выполнена на кафедре квантовой теории поля физического факультета Томского государственного университета.

Научные руководители: доктор физико-математических наук,
профессор кафедры квантовой теории поля
Томского государственного университета
Семен Леонидович Ляхович;

доктор физико-математических наук,
профессор, директор департамента ядерной физики
Института физики университета Сан Пауло (Бразилия)
Дмитрий Максимович Гитман.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
высшей математики и математической физики
Томского политехнического университета
Андрей Юрьевич Трифонов;

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры теоретической физики
Томского государственного университета
Иван Владиславович Горбунов.

Ведущая организация: Томский государственный педагогический университет.

Защита состоится 20 декабря 2007 г. в 14^{30} часов на заседании диссертационного совета Д 212.267.07 в Томском государственном университете по адресу:
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, ТГУ.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан «   » ноября 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.267.07
доктор физ.-мат. наук, ст. н. с.

И.В. Ивонин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Существует широкий класс интересных физические систем, классические уравнения движения которых не допускают вариационной формулировки. В числе примеров можно упомянуть самодуальные поля Янга-Миллса, уравнения безмассовых полей высших спинов, теорию киральных бозонов, максвелловскую электродинамику с монополями, а также различные диссипативные системы. Назовём все такие системы нелагранжевыми. Хотя задание уравнений движения полностью определяет динамику классической системы, традиционный переход к квантовомеханическому описанию опирается на существование функционала действия, из которого данные уравнения движения получаются варьированием. Именно этим определяется важность вариационной формулировки для физических систем.

Задача построения функционала действия по заданной системе дифференциальных уравнений известна как обратная вариационная задача. Ещё в 1887 году Гельмгольц сформулировал известный критерий лагранжевости для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Обратная вариационная задача для одномерного движения была полностью решена Дарбу. Случай двух степеней свободы рассматривался Дугласом, в частности, им были найдены явные примеры систем уравнений второго порядка, которые не могут быть получены на основе вариационного принципа. После этого проблема построения вариационного принципа для многомерных систем исследовалась многими авторами. Так, Хавас предложил рассматривать обратную вариационную задачу в формализме первого порядка. Было доказано, что в формализме первого порядка обратная вариационная задача всегда разрешима (по крайней мере локально). Следует, однако, заметить, что данный результат является чистой теоремой существования, не дающей ни какого конструктивного алгоритма построения функционала действия по заданной системе уравнений первого порядка.

Даже в случае когда обратная задача разрешима ее решение может содержать большой произвол, не сводящийся к добавлению полной производной по времени. В 1950 году Вигнер поставил вопрос: “Определяют ли классические уравнения движения квантовомеханические коммутационные соотношения?” В своей работе Винер предположил, что ответ на этот вопрос зависит от формы гамильтониана и для некоторых систем может быть отрицательным. Детальное изучение проблемы показало, что ответ на поставленный Вигнером вопрос действительно отрицателен и вид квантовомеханических коммутационных соотношений существенно зависит от выбора функции Лагранжа. Тем не менее, полное описание имеющегося здесь произвола известно только в случае одномерных систем и было дано еще Дарбу. А именно, существует столько неэквивалентных лагранжианов сколько функций от двух переменных.

Проблема квантовомеханического описания нелагранжевых систем притягивает интерес физиков на протяжении десятков лет и имеет не мало важных приложений. Если нелагранжевы уравнения описывают некую диссипативную систему, в которой диссипация является следствием взаимодействия с окружающей средой (резервуаром), разумно рассматривать систему и резервуар как две взаимодействующие подсистемы одной замкнутой системы. Тогда квантовое описание диссипативной системы может быть получено из квантовой теории общей системы усреднением по резервуару. Этот подход был предложен Фейнманом и Верноном в 1963г. и далее использовался во многих работах. Недостатками данного подхода является его чрезвычайная громоздкость, необходимость предварительной фиксации некоторой модели резервуара, а также зависимость результата квантования от самой модели резервуара. В простейшем случае, когда резервуар моделируется бесконечным числом осцилляторов, в окончательный ответ входят такие его параметры, как температура T и собственные частоты осцилляторов ω_k. Кроме того, этот подход применим только для квантования диссипативных систем, когда причиной нелагранжевости уравнений движения является диссипация, то есть взаимодействие системы с окружающей средой. Если же нелагранжевость уравнений движения имеет иную природу (как в случае, например, с монополем Дирака) рассматриваемая схема квантования теряет физический смысл.

Альтернативный метод квантования диссипативных систем известен как бэйтмановское квантование. Предложенное Бэйтманом в 1931 г., оно основывается на идее вложения исходной нелагранжевой динамики в более широкую лагранжеву модель. В качестве лагранжиана расширенной системы берется сумма исходных уравнений движения с соответствующими лагранжевыми множителями. Варьирование такого лагранжиана по лагранжевым множителям приводит к исходным уравнениям движения, однако, варьирование по исходным переменным даёт новые динамические уравнения на введенные лагранжевы множители. Таким образом, лагранжевы множители трактуются как новые степени свободы. При этом, не всегда понятно какой физический смысл можно придать этим новым степеням свободы. На квантовом уровне подобный подход также сталкивается с определенными трудностями. Так например, построенная таким образом квантовая теория гармонического осциллятора, как с трением, так и без него, характеризуется непрерывным спектром энергий и невозможностью корректно определить гильбертово пространство состояний системы (индефинитная метрика).

Наконец, имеется подход, стартующий с функционала действия в формализме второго порядка. Для построения действия используется метод интегрирующего множителя. Как отмечалось выше, такой множитель не всегда существует, а когда существует может содержать изрядную долю произвола. Возникающие при этом трудности можно проиллюстрировать на примере нерелятивистского уравнения Лоренца-Дирака. А именно, в работе [1] было показано, что несмотря на существование вариационного принципа для уравнений второго порядка, описывающих движение излучающего точечного нереляивистского заряда в однородном магнитном поле, ни один из возможных лагранжианов не переходит в пределе отключения взаимодействия с электромагнитным полем в лагранжиан свободной частицы. Таким образом, в случае более чем одной степени свободы малая деформация уравнений движения (коей обычно и является диссипация) может не представляться как малая деформация соответствующего функционала действия в формализме второго порядка. Как следствие, и квантовая теория многомерных диссипативных систем, построенная квантованием подобного действия будет входить в противоречие с пертурбативной трактовкой диссипации. Кроме того, известны примеры многомерных динамических систем (Дуглас, 1941 г.), уравнения движения, которых просто не допускают существование интегрирующего множителя, а как следствие, и действия в формализме второго порядка. Отметим, что идея квантования нелагранжевых систем, путем подбора интегрирующего множителя, активно использовалась во многих работах для квантования гармонического осциллятора с трением и некоторых других одномерных моделей. Однако, поскольку гармонический осциллятор одномерен, упомянутые выше проблемы здесь просто не возникают.

Таким образом, ни один из перечисленных подходов к квантованию нелагранжевых систем не лишён внутренних трудностей. А потому, многие вопросы, связанные с квантованием не гамильтоновых и диссипативных систем до сих пор остаются открытыми. Так например, интересным является изучение влияния диссипации на такие квантовомеханические явления как тунелирование и квантовая интерференция. Возможное проявление квантового тунелирования на макроскопическом уровне, где имеет место явление диссипации, в физике низких температур было описано Леггетом в 1978 г. Влияние диссипации на квантовое тунелирование в макроскопических системах впервые было рассмотрено в работах Калдейры и Леггета. Ими же была рассмотрена и задача о квантовой интерференции в присутствии диссипации. Было показано, что в присутствии диссипации вероятность тунелирования макроскопической системы начинает зависеть от феноменологического коэффициента трения. Однако, в обоих случаях авторы пользовались подходом, трактующим диссипацию, как взаимодействие системы с тепловым резервуаром, недостатки которого обсуждались выше.

Существует множество других интересных физических проблем связанных с квантованием нелагранжевых систем. Отметим только две из них: (i) квантовомеханическое описание реакции излучения, альтернативное теоретико-полевому подходу и основанное на квантовании соответствующих нелагранжевых уравнений движения, описывающих эффективную динамику заряженных объектов (частиц, струн и т.д.) во внешних полях, а также (ii) квантовомеханическое описание монополя Дираком. Предложенный Дираком метод квантования магнитного заряда для решения проблемы нелагранжевости уравнений движения электрического заряда в поле монополя использует так называемое "вето Дирака запрещающее электрическому заряду находиться на нити – траектории магнитного заряда. Заметим, однако, что дираковская теория магнитного заряда с "нитями"не свободна от критики.

Таким образом, имееться необходимость в развитии новых подходов и методов квантования динамических систем, заданных классическими уравнениями движения, и не привлекающих ни дополнительных нефизических степеней свободы, ни вспомогательные конструкции подобно тепловому резервуару или нефизическим "нитям". Помимо широкого спектра приложений решение данной задачи имеет и чисто теоретическое значение, так как расширяет наши представления об области применимости квантовой теории и обогащает ее новыми конструкциями и методами.

Цели диссертационной работы

Ключевые цели работы могут быть сформулированы следующим образом:

1. Разработка методов решения обратной вариационной задачи для динамических систем общего вида.

2. Развитие общих методов квантования физических систем, заданных классическими уравнениями движения.

Научная новизна работы

Все основные результаты диссертации (см. заключение автореферата) являются оригинальными и получены впервые.

Научная значимость работы

Научная значимость работы заключается в следующем:

1. Разработан новый конструктивный метод построения функционала действия по известным классическим уравнениям движения системы. Построенная модель содержит информацию только о рассматриваемой физической системе и вовлекает в качестве дополнительного ингредиента, ответственного за квантование, *произвольную* симплектическую структуру на фазовом пространстве. При этом, любая малая деформация исходных уравнений движения оказывается всегда представима как соответствующая малая деформация построенного действия.

2. Разработан подход канонического квантования нелагранжевых теорий, основанный на предложенной лагранжевой формулировке эквивалентной системы уравнений первого порядка. Построено каноническое квантование линейных динамических систем. Показано, что в линейном случае квантовая эволюция системы полностью определяется ее классической эволюцией.

3. Предложен новый подход деформационного квантования нелагранжевых теорий, основанный на псевдо-гамильтоновой формулировке нелагранжевых уравнений движения первого порядка. Построено квантование важных примеров диссипативных систем: линейного затухающего осциллятора и излучающего точечного заряда. Получены точные выражения для эволюции средних значений энергии и углового момента в рассмотренных примерах. Проведён сравнительный анализ двух предложенных подходов.

Защищаемые положения

На защиту выносятся:

1. Явный алгоритм построения вариационной формулировки в формализме второго порядка, в случае, когда рассматриваемая система допускает интегрирующий множитель. Необходимые и достаточные условия существования интегрирующего множителя.

2. Универсальный метод построения функционала действия для систем уравнений первого порядка по решению соответствующей задачи Коши. Полное описание нетривиального произвола (не сводимого к добавлению полной производной по времени) в определении функции Лагранжа.

3. Доказательство несуществования вариационного принципа для классического уравнения Лоренца-Дирака, описывающего эффективную динамику излучающего заряда в электромагнитном поле. Вывод редуцированного уравнения Лоренца-Дирака методом пертурбативного понижения порядка. Вариационный принцип для редуцированного уравнения Лоренца-Дирака в формализме первого порядка.

4. Универсальный метод канонического квантования физических систем по известным уравнений движения. Каноническое квантование линейных динамических систем общего вида, включая негамильтоновы и диссипативные системы. Утверждение о том, что квантовая эволюция линейных динамических систем полностью определяется их классической эволюцией.

5. Псевдо-гамильтонова формулировка для систем линейных неоднородных дифференциальных уравнений с непостоянными коэффициентами. Последовательная процедура деформационного квантования линейных динамических систем, основанная на предложенной псевдо-гамильтоновой формулировке. Деформационное квантование гармонического осциллятора с трением, и излучающего точечного нерелятивистского заряда. Точные выражения для эволюции средних значений энергии и углового момента в рассмотренных примерах.

Апробация работы и публикации

Основные результаты диссертационной работы докладывались на Международной летней школе-семинаре по современным проблемам теоретической и математической физики (Петровские чтения, г. Казань, 2001-04 гг.); Международной школе-семинаре "Quantum Fields and Strings" (п. Домбай, 2003 г.); международной конференции "Fifth international conference on mathematical methods in physics - IC2006" (Rio de Janeiro, Brazil, 2006); международной конференции "XXXIII International conference on high energy physics" (Москва, 2006); международной конференции "Algebras, Representations and Applications" (Maresias, SP, Brazil, 2007) а также на научных семинарах кафедр теоретической физики и квантовой теории поля Томского государственного университета, кафедры высшей математики и математической физики Томского политехнического университета и отделения математической физики университета Сан Пауло, Бразилия.

Результаты диссертации частично опубликованы в 6 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех разделов, заключения, одного приложения и списка цитируемой литературы. Материал изложен на 102 страницах, включает список литературы из 107 наименований. Текст диссертации набран в издательской системе LaTeX.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первом разделе рассматривается вопрос о построении принципа наименьшего действия для заданной системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом интегрирующего множителя, то есть такой невырожденной матрицы, умножение на которую приводит данную систему уравнений к стандартной форме Эйлера-Лагранжа. В параграфе 1.2 предлагается простой метод вывода необходимых и достаточных условий существования интегрирующего множителя для систем уравнений второго порядка. В том случае, когда интегрирующий множитель существует и известен, предъявляется явное выражение для функции Лагранжа системы. Далее, в параграфе 1.3 данный метод применяется для решения обратной вариационной задачи в некоторых простых моделях, а так же приводится пример линейной динамической системы, чьи уравнения движения не допускают существования интегрирующего множителя и, как следствие, не могут быть получены из вариационного принципа.

Следует заметить, что по средствам введения n дополнительных переменных (например $p_i = \dot{q}^i$) всегда возможно перейти от системы n нелагранжевых уравнений второго порядка к эквивалентной системе $2n$ уравнений первого порядка

$$\dot{x}^\alpha \;\; = \;\; f^\alpha(t,x)\,,\;\alpha = 1,..,2n\,, \tag{1}$$

где $f^\alpha(t,x)$ – некоторые функции. В параграфе 1.4 исследуется возможность нахождения интегрирующего множителя Ω для системы (1), показывается, что он должен удовлетворять следующим условиям: невырожденность, антисимметрия, тождество Якоби и уравнение

$$\partial_t \Omega_{\alpha\beta} + \pounds_f \Omega_{\alpha\beta} = 0\,, \tag{2}$$

где $\pounds_f \Omega_{\alpha\beta}$ – производная Ли от 2-формы $\Omega_{\alpha\beta}$ вдоль векторного поля f^γ. В данном случае интегрирующий множитель Ω всегда существует и может быть построен по решению задачи Коши уравнений (1). Результирующий лагранжиан имеет вид:

$$L = J_\alpha \dot{x}^\alpha - H\,, \tag{3}$$

где

$$J_\alpha(t,x) = \int_0^1 x^\beta \Omega_{\beta\alpha}(t,sx)\,sds + \partial_\alpha \varphi(t,x)\,, \tag{4}$$

$$H(t,x) = \int_0^1 ds\, x^\beta \left[\Omega_{\beta\alpha}(t,sx) f^\alpha(t,sx) - \partial_t J_\beta(t,sx)\right] + c(t)\,, \tag{5}$$

$\varphi(t,x)$ и $c(t)$ – произвольные функции. Таким образом, показывается, что физические системы, традиционно называемые нелагранжевыми фактически эквивалентны лагранжевым системам уравнений первого порядка. Предложенная процедура построения вариационного принципа иллюстрируется на примере линейных динамических систем, которые описываются линейным, в общем случае неоднородными дифференциальными уравнениями с непостоянными коэффициентами. Строится квадратичный функционал действия, имеющий в качестве своих уравнений Эйлера-Лагранжа вышеупомянутые линейные уравнения.

Во втором разделе рассматривается задача построения функционала действия для классического и редуцированного уравнения Лоренца-Дирака, описывающего самосогласованную динамику точечного заряда с учетом реакции излучения. В параграфе 2.2 доказывается, что классическое уравнение Лоренца-Дирака

$$g_\mu = -m\ddot{x}_\mu + \frac{e}{c}F_{\mu\nu}\dot{x}^\nu + \frac{2e^2}{3c^3}\left(\dddot{x}_\mu - \frac{1}{c^2}\dot{x}_\mu \ddot{x}_\nu \ddot{x}^\nu\right) = 0\,, \tag{6}$$

равно как и его нерелятивистский аналог

$$\mathrm{g} = -m\ddot{\mathrm{x}} + e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\dot{\mathrm{x}}, \mathbf{H}] + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{x}} = 0\,. \tag{7}$$

где $x^\mu = (t, \mathrm{x})$ – координаты частицы в четырехмерном пространстве-времени, $F_{\mu\nu} = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$ – тензор напряженности электромагнитного поля, константы c и e – суть скорость света и электрический заряд, не допускают интегрирующего множителя и, следовательно, не могут быть получены на основе вариационного принципа ни из какого локального функционала действия. В параграфе 2.3 обсуждается процедура пертурбативного понижения порядка классического уравнения Лоренца-Дирака. Целью этой процедуры является вывод редуцированного уравнения Лоренца-Дирака, то есть уравнения второго порядка, эквивалентного исходному уравнению Лоренца-Дирака в секторе физических решений и не имеющего других (нефизических) решений. В параграфе 2.4 обсуждается обратная вариационная задача для редуцированного нерелятивистского уравнения Лоренца-Дирака. Для этого уравнения обратная вариационная задача может иметь множество решений. В качестве примера рассмотрено движение нерелятивистского заряда в постоянном однородном магнитном поле с учётом силы радиационного трения. В данном случае редуцированное уравнение Лоренца-Дирака имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= A\dot{x} - B\dot{y}\,, \\ \ddot{y} &= B\dot{x} + A\dot{y}\,, \\ \ddot{z} &= 0\,, \end{aligned} \tag{8}$$

где в системе едениц $m = c = 1$

$$A = \frac{6 - \sqrt{6}\sqrt{3 + \sqrt{9 + 64e^6H^2}}}{8e^2} \approx -\frac{2}{3}e^4H^2\,,$$
$$B = \frac{eH\sqrt{6}}{\sqrt{3 + \sqrt{9 + 64e^6H^2}}} \approx eH\,.$$

Коэффициент A имеет смысл коэффициента радиационного трения. Показано, что хотя эта система и допускает существование функционала действия в формализме второго порядка, ни один из возможных лагранжианов не даёт в пределе отключения взаимодействия обычный лагранжиан свободной частицы. Удовлетворительное физическое описание удается построить для эквивалентной системы уравнений первого порядка. Предложенное лагранжево описание динамики излучающего заряда является основой для квантовомеханического описания эффектов радиационной отдачи, альтернативного квантово-полевому описанию, в том же смысле, в котором уравнение Лоренца-Дирака позволяет учитывать реакцию излучения в классической электродинамике.

В третьем разделе обсуждается вопрос о построении квантовых теорий, воспроизводящих в классическом пределе нелагранжевы уравнения движения для средних. Фактически, рассматривается каноническое квантование лагранжевых теорий со связями зависящими от времени, которые соответствуют так называемым нелагранжевым системам. В параграфе 3.2 показывается что, гамильтонизация построенного в главе 1 лагранжевого действия в формализме первого порядка для так называемых нелагранжевых систем приводит к теории с явно зависящими от времени связями второго рода. Таким образом, показывается, что физические системы, традиционно называемые нелагранжевыми, на самом деле эквивалентны лагранжевым системам первого порядка, однако обладающими связями зависящими от времени в гамильтоновом формализме. Каноническое квантование подобных теорий является нетривиальной проблемой и представлено в параграфе 3.3. В параграфе 3.4 общий подход канонического квантования применяется для построения квантовой теории систем, классическая динамика которых описывается системой произвольных линейных, в общем случае неоднородных, дифференциальных уравнений с непостоянными коэффициентами. Далее рассматривается квантование физически интересных примеров диссипативных систем. В параграфе 3.5 в деталях иллюстрируется процедура канонического квантования нелагранжевых систем на примере гармонического осциллятора с трением, а в параграфе 6 строится квантование излучающего точечного заряда.

В четвёртом разделе развивается подход деформационного квантования нелагранжевых теорий. В параграфе 4.2 предложена простая псевдо-гамильтонова формулировка для систем линейных неоднородных дифференциальных уравнений с непостоянными коэффициентами. В отличии от обычной канонической гамильтоновой механики наш подход основан на использовании нестационарных скобок Пуассона и обобщённой производной по времени $D_t = \partial_t + \cdots$, которая дифференцирует введенные скобки Пуассона. Используя эти ингредиенты выводится модифицированное уравнение Лиувиля

$$D_t\rho_{cl} = \{H, \rho_{cl}\}_t \,, \tag{9}$$

которое определяет зависимость от времени классической функции распределения.

В параграфе 4.3 стартуя с этой псевдо-гамильтоновой формулировки развивается последовательная процедура деформационного квантования. Для этого в рассмотрение вводится нестационарное, ассоциативное и некоммутативное звездочка-произведение $*_t$, построенное по нестационарным скобкам Пуассона. Предложенная "обобщённая"производная по времени D_t, дифференцирует $*_t$-произведение. Показано, что как и в обычном случае $*_t$-алгебра физических наблюдаемых допускает единственный (зависящий от времени) следовой функционал Tr_t. Далее определяется квантовое уравнение Лиувиля

$$i\hbar D_t\rho + [\rho, H]_t = 0\,, \tag{10}$$

задающее эволюцию квантовомеханических состояний. В случае линейных динамических систем квантовое уравнение Лиувиля в точности совпадает с классическим модифицированным уравнением Лиувиля, для которого исходная система уравнений движения является уравнением характеристик. Исходя из этого делается вывод, что квантовая эволюция линейных динамических систем полностью определяется соответствующей классической эволюцией. В результате получается полное самосогласованное квантовомеханическое описание произвольной линейной динамической системы.

В параграфе 4.4 предложенный метод квантования иллюстрируется на примере линейных диссипативных систем таких как гармонический осциллятор с трением и излучающий точечный заряд в постоянном однородном магнитном поле. Получены точные выражения для эволюции средних значений энергии и углового момента в рассмотренных примерах. Для излучающего заряда в магнитном поле мгновенный спектр энергии имеет вид

$$\langle H\rangle^t_\rho = e^{2At}E\ , \quad E = \hbar B\left(n+\frac{1}{2}\right)\ , \quad n = 0, 1, ... \tag{11}$$

видно, что энергия эволюционирует по классическому закону, экспоненциально затухая со временем, однако в каждый фиксированный момент времени спектр энергии дискретен как в соответствующей квантовой системе без трения. Мгновенный спектр углового момента может быть записан как

$$\begin{aligned}&\langle M\rangle^t_\rho = M - \alpha(t)E\ , \quad M = \hbar(l-n)\ , \quad l = -n...n\ ,\\ &\alpha(t) = \frac{2A^2e^{At}\cos(Bt) - A^2 + B^2e^{2At}}{B(B^2+A^2)}\ .\end{aligned} \tag{12}$$

После взятия в этом выражении последовательный предел при $t\to\infty$ и $A\to 0$ получается, что предельное значение углового момента $\langle M\rangle^t_\rho$ дается выражением $M - E/B$, такое же предельное значение имеет место в классической теории.

В заключении проводится сравнительный анализ двух предложенных подходов.

Основные результаты

1. Разработан новый конструктивный метод построения вариационного принципа для заданных физических систем по известным уравнениям движения. В том случае если исходные уравнения движения второго порядка не могут быть представлены в виде уравнений Эйлера-Лагранжа определенного действия, всегда возможно переписать их в виде эквивалентной системы дифференциальных уравнений первого порядка, для которых всегда может быть найден функционал действия. Мы явно строим это действие и даём полное описание произвола в его определении.

2. Разработан подход канонического квантования нелагранжевых теорий, основанный на предложенной лагранжевой формулировке эквивалентной системы уравнений первого порядка. Построено каноническое квантование линейных динамических систем.

Показано, что квантовая эволюция рассматриваемых систем полностью определяется классической.

3. Предложен новый подход деформационного квантования нелагранжевых теорий, основанный на псевдо-гамильтоновой формулировке нелагранжевых уравнений движения первого порядка. Построено квантование важных примеров диссипативных систем: линейного затухающего осциллятора и излучающего точечного заряда. Получены точные выражения для эволюции средних значений энергии и углового момента в рассмотренных примерах. Проведён сравнительный анализ двух предложенных подходов.

4. Впервые получены:

   (a) Явный вид лагранжиана для систем дифференциальных уравнений второго порядка, которые допускают существование интегрирующего множителя, то есть такой невырожденной матрицы, умножение на которую сводит рассматриваемую систему уравнений движения к стандартной форме уравнений Эйлера-Лагранжа. Получены необходимые и достаточные условия существования интегрирующего множителя. Предложенный метод решения обратной вариационной задачи проиллюстрирован на различных примерах. Построено лагранжево действие в формализме второго порядка для многомерных диссипативных систем. Также приводится пример линейной динамической системы, уравнения движения которой не допускают интегрирующего множителя.

   (b) Явная процедура построения функционала действия для систем уравнений первого порядка по решению задачи Каши рассматриваемых систем. Получено полное описание нетривиального произвола (не сводимого к добавлению полной производной по времени) в определении функции Лагранжа для заданных систем дифференциальных уравнений первого порядка. Построен квадратичный функционал действия для линейных динамических систем, которые описываются линейными, в общем случае неоднородными дифференциальными уравнениями с непостоянными коэффициентами.

   (c) Доказательство несуществования вариационного принципа для классического уравнения Лоренца-Дирака, равно как и для его нерелятивистского предела. Предложено редуцированное уравнение Лоренца-Дирака, описывающее эффективную динамику излучающего заряда в электромагнитном поле и свободного от нефизических решений. Для этого уравнения обратная вариационная задача может иметь множество решений. В качестве примера рассмотрен нерелятивистский точечный заряд в постоянном однородном магнитном поле с учетом реакции излучения. Показано, что хотя эта система и допускает существование функционала действия в формализме второго порядка, ни один из возможных лагранжианов не даёт в пределе отключения взаимодействия обычный лагранжиан свободной частицы. Удовлетворительное физическое описание удаётся построить для эквивалентной системы уравнений первого порядка.

(d) Метод канонического квантования физических систем с нелагранжевыми уравнениями движения, основанный на предложенной лагранжевой формулировке эквивалентной системы уравнений первого порядка. Гамильтонизация и каноническое квантование построенного лагранжева действия является не тривиальной проблемой, поскольку рассматриваемая теория имеет связи зависящие от времени. Общий подход гамильтонизации и канонического квантования теорий со связями зависящими от времени (Гитман, Тютин 1990) применяется к рассматриваемому случаю. Предложенная схема квантования проиллюстрирована на примере линейных динамических систем. В дополнении рассмотрено каноническое квантование гармонического осциллятора с трением и излучающего заряда.

(e) Псевдо-гамильтонова формулировка для систем линейных неоднородных дифференциальных уравнений с непостоянными коэффициентами. В отличии от обычной канонической гамильтоновой механики наш подход основан на использовании нестационарных скобок Пуассона и "обобщённой"производной по времени $D_t = \partial_t + \cdots$, которая дифференцирует введенные скобки Пуассона. Получено модифицированное уравнение Лиувиля, определяющее зависимость от времени классической функции распределения.

(f) Последовательная процедура деформационного квантования линейных динамических систем, основанная на предложенной псевдо-гамильтоновой формулировке. Рассматриваемая процедура вовлекает нестационарное звездочка - произведение $*_t$. Предложенная "обобщённая"производная по времени $D_t = \partial_t + \cdots$, дифференцирует $*_t$-произведение. Показано, что как и в обычном случае $*_t$-алгебра физических наблюдаемых допускает единственный (зависящий от времени) следовой функционал Tr_t. Используя перечисленные ингредиенты мы строим последовательное самосогласованное квантовомеханическое описание для произвольных линейных динамических систем. Предложенный метод деформационного квантования иллюстрируется на примере линейных диссипативных систем, таких как гармонический осциллятор с трением и излучающий точечный заряд.

Публикации по теме диссертации

1. В.Г. Куприянов, С.Л. Ляхович, А.А. Шарапов, *Обратная вариационная задача для уравнения Лоренца-Дирака* //Новейшие проблемы теории поля/Под ред. А.В. Аминовой. – Казань, 2004. – т. 4. – с. 169.

2. V.G. Kupriyanov, S.L. Lyakhovich and A.A. Sharapov, *Deformation quantization of linear dissipative systems,* J. Phys. **A38** (2005) 8039.

3. V.G. Kupriyanov, *Hamiltonian Formulation and Action Principle for the Lorentz-Dirac System,* Int. J. Theor. Phys. **45** (2006) 1129.

4. D.M. Gitman, V.G. Kupriyanov, *Action principle for so-called non-Lagrangian systems,* **PoS(IC2006)016**.

5. D.M. Gitman, V.G. Kupriyanov, *Quantization of theories with non-Lagrangian equations of motion,* Journal of Mathematical Sciences, **141**, N 4 (2007) 1399-1406.

6. D.M. Gitman, V.G. Kupriyanov, *Canonical quantization of so-called non-Lagrangian theories,* Eur. Phys. J. **C50** (2007) 691-700.

7. D.M. Gitman, V.G. Kupriyanov, *On the action principle for a system of differential equations,* J. Phys. **A40** (2007) 10071-10081.