На правах рукописи

Резаев Роман Олегович

Нелинейное уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова в квазиклассическом траекторно-когерентном приближении

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2007

Работа выполнена на кафедре высшей математики и математической физики Томского политехнического университета

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
профессор Трифонов Андрей Юрьевич

Научный консультант:
доктор физико-математических наук
профессор Шаповалов Александр Васильевич

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
профессор Дубровский Владислав Георгиевич

доктор физико-математических наук
профессор Кистенев Юрий Владимирович

Ведущая организация: Казанский государственный университет

Защита состоится “ 24 ” января 2008 г. в 10 час. на заседании диссертационного совета Д 212.267.07 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук при Томском государственном университете по адресу: 634050, Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан “ 24 ” декабря 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук
профессор И.В. Ивонин

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Фундаментальной проблемой в изучении сложных систем (классических, квантовых, биологических и т.д.) является построение и анализ теоретических моделей, учитывающих влияние на систему большого числа случайных факторов. Учет влияния случайных воздействий на систему может проводиться как в формализме стохастических дифференциальных уравнений, так и в формализме уравнения Фоккера–Планка. В первом случае адекватным методом исследования служит компьютерное моделирование. Аналитические методы более естественно использовать в моделях, основанных на уравнении Фоккера–Планка.

Нелинейное уравнение Фоккера–Планка естественным образом возникает при описании моделей сложных систем со стохастической обратной связью в приближении самосогласованного поля[1]. Интерес к изучению моделей таких систем обусловлен прежде всего тем, что они описывают процессы с учетом неопределенности в эволюции системы. Область приложения уравнений Фоккера–Планка достаточно широка: ферромагнетизм, нелинейная гидродинамика, физика плазмы, астрофизика, биофизика, атомная физика и др. Например, описание явлений в нелинейной оптике базируется на когерентных квантовых ансамблях (К. Коэн-Таннуджи, Э. Корнелл), которые моделируются нелинейными уравнениями, в частности, Фоккера–Планка или в формализме стохастических дифференциальных уравнений. В настоящее время активно исследуется воздействие случайных возмущений на эволюцию начального распределения частиц в ускорительной камере, описание которого также может быть проведено на основе нелинейного уравнения Фоккера–Планка.

Развитие методов интегрирования уравнения Фоккера–Планка или связанных с ним стохастических дифференциальных уравнений является актуальной задачей. Существует ограниченное число методов построения точных решений многомерных нелинейных уравнений с нелокальными слагаемыми. Поэтому задача построения аналитических решений таких уравнений осо-

[1] T.D. Frank Non-linear Fokker–Planck equations. Fundamentals and applications, Springer 2004

бенно важна не только с точки зрения математической физики, но и для тех физических явлений, которые эти уравнения описывают.

Среди приближенных методов решения задач теоретической физики заметное место занимают асимптотические методы. Одним из наиболее распространенных асимптотических методов является метод квазиклассических асимптотик. Квазиклассическое приближение показало свою эффективность при решении проблем, связанных как с принципиальными вопросами квантовой теории, так и с расчетом конкретных физических эффектов, в том числе и описываемых нелинейными уравнениями. Поэтому развитие методов построения квазиклассических решений для многомерного уравнения Фоккера–Планка с нелокальной нелинейностью и их приложение являются актуальной задачей.

Цели и задачи работы

Целью работы является развитие квазиклассических методов интегрирования уравнения Фоккера–Планка с нелокальной нелинейностью и приложение этих методов к реальным задачам.

В соответствии с общей целью работы в диссертации решаются следующие основные задачи:

1. Разработать асимптотические методы построения аналитических решений нелинейных задач теоретической физики на примере многомерного уравнения Фоккера–Планка с переменными коэффициентами и нелокальной нелинейностью.

2. Определить класс потенциалов внешнего поля нелинейного уравнения Фоккера–Планка, для которых развитые квазиклассические методы дают точные решения. Применить разработанный асимптотический метод к построению точных решений и операторов симметрии уравнения Фоккера–Планка.

3. Рассмотреть приложение полученных результатов к процессам, происходящим при формировании и распространении пучков в ускорительных камерах.

Научная новизна

Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми.

Впервые разработан метод квазиклассического траекторно-когерентного приближения для интегрирования многомерного уравнения Фоккера–Планка с нелокальной нелинейностью. На его основе построено формальное асимптотическое решение задачи Коши для уравнения Фоккера–Планка в классе траекторно-сосредоточенных функций. Получена система Эйнштейна–Эренфеста, описывающая с заданной точностью эволюцию центрированных моментов функции распределения. Впервые в явном виде построены семейство операторов симметрии и оператор эволюции уравнения Фоккера–Планка с квадратичным оператором и квадратичной нелокальной нелинейностью и с их помощью найдено семейство решений исходного нелинейного уравнения. Разработан метод расчета распределения интенсивности переходного излучения при пролете заряженных частиц, распределенных по заданному закону, через мишень произвольной формы. Исследована зависимость концентрации интенсивности излучения от геометрии мишени.

Теоретическая и практическая ценность работы

Результаты диссертации вносят вклад в развитие асимптотических методов нелинейной математической физики сложных систем.

Разработанный метод приближенного решения задачи Коши для уравнения Фоккера–Планка открывает возможность изучения физических систем со стохастической обратной связью. В частных случаях применение метода дает точные решения исходного нелинейного уравнения, что представляет несомненный интерес для описания физических процессов с учетом их стохастической природы. Полученные характеристические динамические системы (системы Эйнштейна–Эренфеста с самодействием) позволяют определить поведение ряда параметров исследуемой нелинейной системы, не прибегая к интегрированию нелинейного уравнения Фоккера–Планка.

В качестве приложения исследуется ряд задач ускорительной техники. Предложена схема эксперимента по определению длины банча с использованием дифракционного излучения, что открывает широкие возможности для невозмущающей диагностики и контроля пучков.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Метод построения асимптотических решений многомерного нестационарного уравнения Фоккера–Планка с нелокальной нелинейностью в классе траекторно-сосредоточенных функций с точностью $O(D^{N/2}), N \geq 3$. В классе траекторно-сосредоточенных функций в явном виде получено формальное асимптотическое решение задачи Коши, удовлетворяющее с точностью $O(D^{N/2}), N \geq 3$ уравнению Фоккера–Планка и заданным начальным условиям.
2. Оператор эволюции многомерного уравнения Фоккера–Планка с нелокальной нелинейностью с точностью $\hat{O}(D^{N/2})$, $N \geq 3$, в классе траекторно-сосредоточенных функций в явном виде. Точные решения задачи Коши уравнения Фоккера–Планка с квадратичным оператором и квадратичной нелокальной нелинейностью. С помощью оператора эволюции получено семейство операторов симметрии.
3. Система Эйнштейна–Эренфеста, с точностью $O(D^{N/2})$ описывающая эволюцию центрированных моментов функции распределения. Построены в явном виде фазовые потоки, параметрически зависящие от подмногообразия фазового пространства, сохраняющие или не сохраняющие фазовый объем, в зависимости от параметров, и описывающие эволюцию носителя решения (при $D \to 0$) уравнения Фоккера–Планка.
4. Метод расчета распределения интенсивности переходного излучения при пролете заряженных частиц, распределенных по заданному закону, через мишень произвольной формы. Показано, что при выборе специальной (параболической) формы мишени наблюдается увеличение концентрации интенсивности излучения на детекторе по сравнению с плоской мишенью.

Апробация диссертации и публикации

Результаты диссертации докладывались на международных конференциях:

— XV международная летняя школа-семинар по современным проблемам теоретической и математической физики, 2003 г., Казань;

— Международная научно-практическая конференция «Физико-технические проблемы атомной энергетики и промышленности», 2004 г., Томск;

— XVII международная летняя школа-семинар по современным проблемам теоретической и математической физики, 2005 г., Казань;
— I Всероссийская конференция студентов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», 2005 г., Томск;
— XI Международная конференция студентов и молодых ученых «Современная техника и технологии», 2005 г., Томск;
— XXXV Международная конференция по «Физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами», 2005 г., Москва;
— II Международная конференция студентов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», 2006 г., Томск;
— Int. Seminar «Day on Diffraction'2006», S. Petersburg,
— III Международная конференция студентов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», 2007 г., Томск;
— Int. Seminar «Day on Diffraction'2007», S. Petersburg,
— International Workshop «Gravity, Strings and Quantum Field Theory», 2007, Tomsk,

а также на научных семинарах кафедры высшей математики и математической физики Томского политехнического университета, кафедр теоретической физики и квантовой теории поля Томского государственного университета, кафедре прикладной математики Московского института электроники и математики, на Томском общегородском семинаре по теоретической физике.

По теме диссертации опубликовано 9 статей в отечественной и зарубежной научной печати, а также 6 тезисов докладов на всероссийских и международных конференциях.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, двух приложений, заключения и списка цитируемой литературы, содержащего 140 библиографических ссылок. Общий объем диссертации составляет 104 страницы. Работа содержит 20 рисунков.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, проведен краткий обзор литературы и установлена связь результатов, представленных в диссертации, с результатами работ других авторов. Дано описание структуры диссертации и сформулированы основные задачи, решаемые в ней.

В **первой главе** диссертации вводится класс траекторно-сосредоточенных функций $\mathcal{P}_t^D(\vec{X}(t,D),S(t,D))$. Функции этого класса при стремлении малого параметра к нулю сосредоточены в окрестности точки, движущейся по некоторой заданной кривой. Рассматривается одномерное уравнение Фоккера–Планка с нелокальной нелинейностью в классе траекторно-сосредоточенных функций и коэффициентом диффузии, зависящим от координаты и времени:

$$-D\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}+D^2\frac{\partial}{\partial x}B(x,t)\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}+D\frac{\partial}{\partial x}A(f,x,t)f(x,t)=0, \qquad (1)$$

$$A(f,x,t)=V_x(x,t)+\varkappa\int\limits_{-\infty}^{+\infty}W_x(x,y,t)f(y,t). \qquad (2)$$

Для уравнения (1), (2) приведена система обыкновенных дифференциальных уравнений — система Эйнштейна–Эренфеста, описывающая динамику центральных моментов функции распределения.

Нелинейному уравнению Фоккера–Планка сопоставлена вспомогательное семейство ассоциированных линейных уравнений Фоккера–Планка. Ключевая идея предлагаемого метода построения решения задачи Коши для нелинейного уравнения состоит в следующем: решения задачи Коши для линейного ассоциированного уравнения при определенном выборе параметров семейства являются приближенными решениями нелинейного уравнения. В результате удается построить приближенный «нелинейный» оператор эволюции исходного нелинейного уравнения в классе траекторно-сосредоточенных функций и с любой точностью по $O(D^{N/2})$ получить формальное решение задачи Коши.

Во **второй главе** предложен метод приближенного интегрирования уравнения Фоккера–Планка с нелокальной нелинейностью в многомерном случае:

$$D\frac{\partial u(\vec{x},t)}{\partial t}=\langle\hat{\vec{\pi}},T\hat{\vec{\pi}}\rangle u(\vec{x},t)+\langle\hat{\vec{\pi}},\Big[V_{\vec{x}}(\vec{x},t)u(\vec{x},t)+$$
$$+\varkappa u(\vec{x},t)\int\limits_{\mathbb{R}^n}W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)u(\vec{y},t)d\vec{y}\Big]\rangle,\quad \vec{x}\in\mathbb{R}^n. \qquad (3)$$

Здесь $t \in \mathbb{R}^1$; $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\intercal \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\intercal \in \mathbb{R}^n$ — независимые переменные; $(x_1, \ldots, x_n)^\intercal$ означает транспонированный вектор или матрицу; угловые скобки $\langle .,. \rangle$ представляют евклидово скалярное произведение; $d\vec{x} = dx_1 \ldots dx_n$; T — матрица диффузии; $V(\vec{x}, t), W(\vec{x}, \vec{y}, t)$ — заданные функции, а D — малый параметр.

Для уравнения (3) получена динамическая система Эйнштейна–Эренфеста, описывающая эволюцию моментов функции распределения. Как и в одномерном случае, нелинейному уравнению Фоккера–Планка сопоставлено вспомогательное семейство ассоциированных линейных уравнений Фоккера–Планка. Построена биортогональная система функций

$$v_\nu(\vec{x}, t, \mathfrak{g}^{(M)}(t, \mathbf{C})), \quad w_\mu(\vec{x}, t, \mathfrak{g}^{(M)}(t, \mathbf{C})), \quad \mu, \nu \in \mathbb{Z}^n_+, \tag{4}$$

являющихся решениями прямого и обратного ассоциированных уравнений Фоккера–Планка с квадратичным потенциалом соответственно. Функции (4) являются многомерными функциями Эрмита.

Построена производящая функция для биортогональной системы функций в классе траекторно-сосредоточенных функций и рассмотрены ее свойства.

С помощью функции Грина

$$G_0(\vec{x}, \vec{y}, t, s, \mathfrak{g}^{(M)}(t, \mathbf{C}))$$

ассоциированного линейного квадратичного уравнения Фоккера–Планка получена функция Грина нелинейного уравнения Фоккера–Планка и нелинейный оператор эволюции уравнения (3) в классе траекторно-сосредоточенных функций с точностью $O(D^{3/2})$, определяемый соотношением

$$u^{(0)}(\vec{x}, t) = \hat{U}_0(t, \varphi(\vec{x}))(\vec{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(\vec{x}, \vec{y}, t, s, \mathbf{C})\big|_{\mathbf{C}=\mathbf{C}_\varphi} \varphi(\vec{y}) d\vec{y}, \tag{5}$$

где постоянные $\mathbf{C}_\varphi$ определяются из уравнения $\vec{x}(0, \mathbf{C}) = x_\varphi(0)$. Вектор $\vec{x}_\varphi(t)$ — математическое ожидание, вычисленное по функции $\varphi(\vec{x})$, а $\vec{x}(0, \mathbf{C})$ — общее решение системы Эйнштейна–Эренфеста.

Функция $u^{(0)}(\vec{x}, t)$ является асимптотическим с точностью до $O(D^{3/2})$ решением уравнения (3), удовлетворяющим начальному условию

$$u\big|_{t=0} = \varphi(\vec{x}). \tag{6}$$

Построен оператор эволюции $\hat{U}^{(N)}(t, \varphi(\vec{x}))(\vec{x})$ и формальные асимптотические решения задачи Коши $u^{(N)}(\vec{x}, t)$ с точностью до $O(D^{(N+1)/2})$.

Метод квазиклассических траекторно-сосредоточенных функций позволяет в ряде случаев получить точные результаты.

В **третьей главе** для уравнения Фоккера–Планка с квадратичным потенциалом и квадратичной нелокальной нелинейностью построены точные решения уравнения (3) для градиентов потенциалов

$$V_{\vec{x}}(\vec{x},t) = K_1\vec{x}, \quad W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t) = K_2\vec{x} + K_3\vec{y}. \tag{7}$$

где K_1, K_2, K_3 — произвольные постоянные матрицы порядка $n \times n$. В явном виде построены точные оператор эволюции и операторы симметрии уравнения Фоккера–Планка (3), (7) путем редукции исходной нелинейной задачи к линейной. Предлагаемый метод иллюстрируется рядом примеров. В частности, в явном виде вычислены операторы симметрии исходного нелинейного уравнения.

Исследована зависимость системы Эйнштейна–Эренфеста от области локализации решений уравнения Фоккера–Планка (3). Рассмотрен класс функций, квазиклассически сосредоточенных на многообразии Λ_t^k, $k < n$, в следующем смысле:

$$\lim_{D\to 0} u(\vec{x},t) = \int\limits_{\Lambda_t^k} \delta(\vec{x} - \vec{x}(t,\tau))d\tau. \tag{8}$$

Здесь $d\tau$ — мера на многообразии. Уравнение $\vec{x} = \vec{x}(t,\tau)$ параметрически определяет многообразие Λ_t^k. На множестве функций (8) получена система Эйнштейна–Эренфеста нулевого порядка с самодействием k-го порядка

$$\dot{\vec{x}}(t,\tau) = -V_{\vec{x}}(\vec{x}(t,\tau),t) - \varkappa \int\limits_{\Lambda_t^k} W_{\vec{x}}(\vec{x}(t,\tau),\vec{x}(t,\alpha),t)d\alpha. \tag{9}$$

Система (9) порождает фазовые потоки $\hat{g}_t(\Lambda_0^k)$, параметрически зависящие от подмногообразия в фазовом пространстве. Система (9) для квадратичных потенциалов (7) проинтегрирована в явном виде. Показано, что фазовый поток $\hat{g}_t(\Lambda_0^k)$ существенно зависит от многообразия Λ_0^k. В частности, фазовый поток $\hat{g}_t(\Lambda_0^0)$ при определенных условиях может являться диссипативным (фазовый объем стремится к нулю с ростом t), а фазовый поток $\hat{g}_t(\Lambda_0^1)$ сохраняет фазовый объем. На рис. 1 изображена обратная ситуация. В зависимости от параметров потенциалов (7) оба фазовых потока $\hat{g}_t(\Lambda_0^0)$ и $\hat{g}_t(\Lambda_0^1)$ могут сохранять фазовый объем (рис. 2).

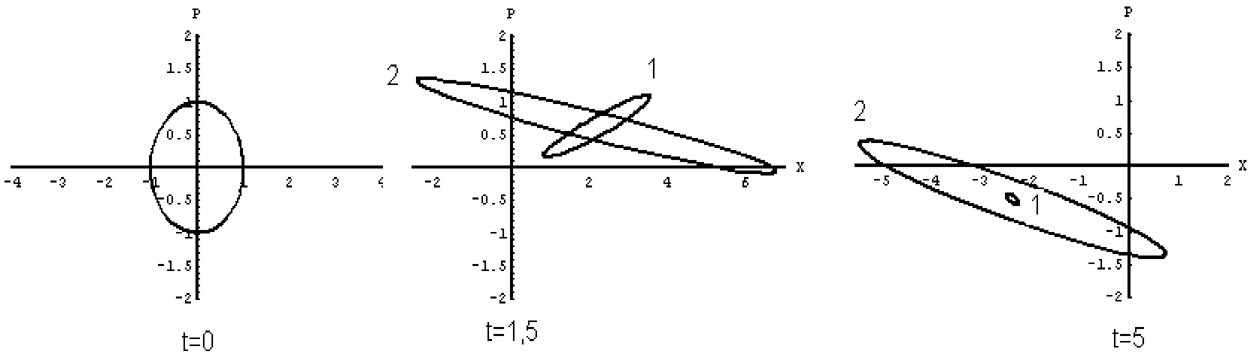

Рис. 1: Эволюция начальной кривой Λ_0^1 при наличии вынуждающей силы $\vec{F}(t) = (A\cos(\nu t), 0)^\intercal$: *1* — $\Lambda_t^1 = \hat{g}_t(\Lambda_0^0)\Lambda_0^1$, *2* — $\Lambda_t^1 = \hat{g}_t(\Lambda_0^1)\Lambda_0^1$.

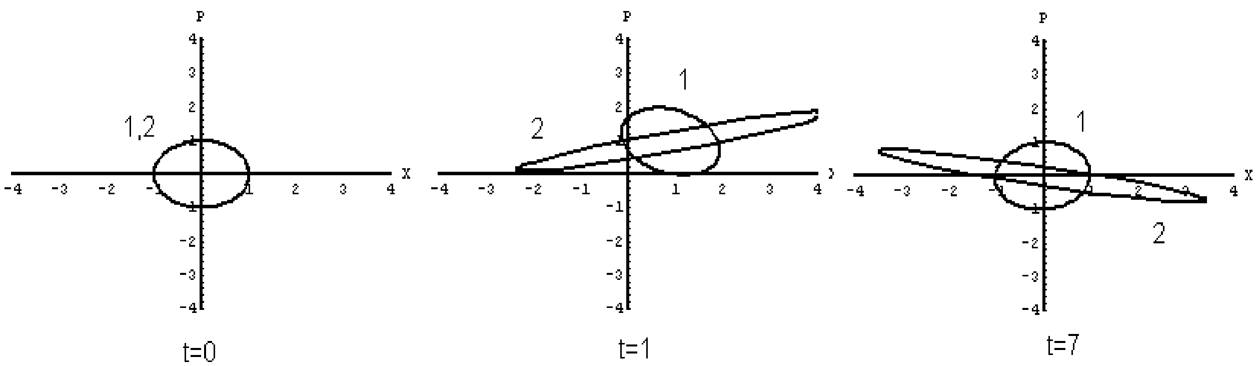

Рис. 2: Эволюция начальной кривой Λ_0^1 при наличии вынуждающей силы $\vec{F}(t) = (A\cos(\nu t), 0)^\intercal$ и отсутствии силы трения: *1* — $\Lambda_t^1 = \hat{g}_t(\Lambda_0^0)\Lambda_0^1$, *2* — $\Lambda_t^1 = \hat{g}_t(\Lambda_0^1)\Lambda_0^1$.

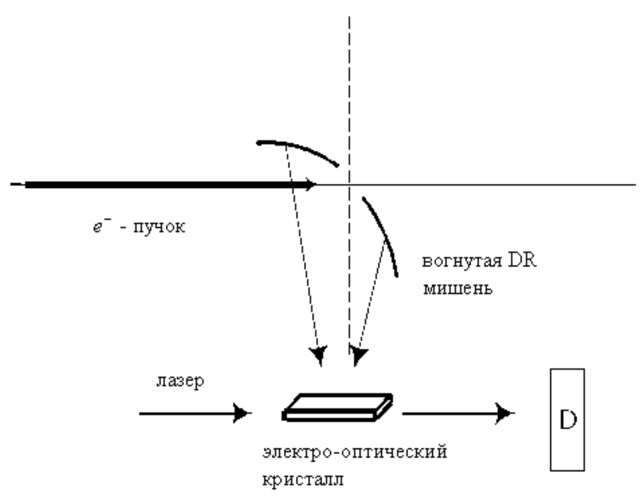

Рис. 3: Схема эксперимента по определению длины банча

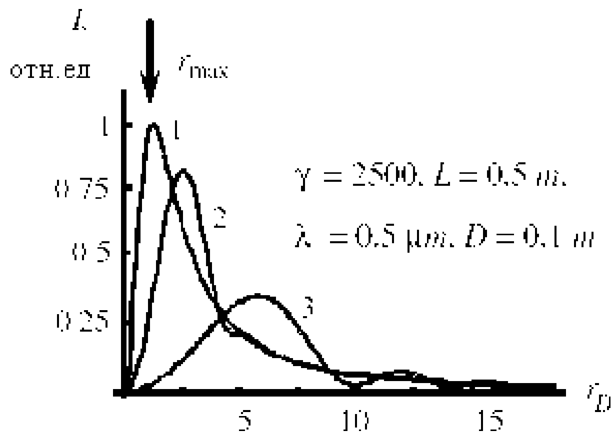

Рис. 4: Распределение интенсивности радиальной компоненты переходного излучения от мишени параболической формы для различных фокусных расстояний: $p = 5000$ (*1*), 2500 (*2*), 800 отн. ед. (*3*); $R = 0{,}16$.

В **четвертой главе** рассматривается приложение полученных результатов к процессам, происходящим при формировании и распространении пучков в ускорительных камерах.

Рассмотрена задача о влиянии начальных возмущений на поперечное распределение частиц в пучке, функция распределения которых удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка. Обсуждается проблема невозмущающей диагностики пучков. Предлагается метод диагностики пучков ультрарелятивистских заряженных частиц (рис. 3), основанный на дифракционном излучении частиц, пролетающих вблизи проводящих мишеней. Показано, что соответствующим выбором формы мишени можно добиться эффекта самофокусировки излучения (рис. 4). Эффект самофокусировки, в свою очередь, дает возможность снизить стоимость диагностирующей аппаратуры за счет удешевления линз, требующих жесткой юстировки.

В **приложении А** приведены свойства решений системы в вариациях, необходимые для полноты изложения.

В **приложении Б** описан способ получения функции Грина задачи Коши линейного ассоциированного уравнения Фоккера–Планка с квадратичным потенциалом методом преобразования Фурье.

В **заключении** излагаются основные результаты диссертации.

Основные результаты работы

В работе впервые получены следующие основные результаты:

1. Развит метод построения асимптотических решений многомерного нестационарного уравнения Фоккера–Планка с нелокальной нелинейностью в классе траекторно-сосредоточенных функций с точностью $O(D^{N/2}), D \to 0, N \geq 3$.
2. Построено с точностью $O(D^{N/2})$, $D \to 0$, $N \geq 3$ формальное асимптотическое решение задачи Коши для уравнения Фоккера–Планка в классе траекторно-сосредоточенных функций.
3. Построен в явном виде с точностью $\hat{O}(D^{N/2}), D \to 0, N \geq 3$ в классе траекторно-сосредоточенных функций оператор эволюции многомерного уравнения Фоккера–Планка с нелокальной нелинейностью. С точностью $\hat{O}(D^{N/2})$ в классе траекторно-сосредоточенных функций построены семейства квазиклассических операторов симметрии.
4. Получена с точностью $O(D^{N/2})$ система Эйнштейна–Эренфеста, описывающая эволюцию центрированных моментов функции распределения. В явном виде построено семейство операторов симметрии и оператор эволюции уравнения Фоккера–Планка с квадратичным оператором и квадратичной нелокальной нелинейностью. С помощью операторов симметрии найдено семейство решений исходного нелинейного уравнения. Построены параметрические семейства фазовых потоков, определяющих эволюцию носителя решения нелинейного уравнения Фоккера–Планка.
5. Разработан метод расчета распределения интенсивности переходного излучения при пролете заряженных частиц, распределенных по заданному закону, через мишень произвольной формы. Исследована зависимость концентрации интенсивности излучения на детекторе по сравнению с плоской мишенью от геометрии мишени.

Основные работы, опубликованные по теме диссертации:

1. Безвербный А.В., Гоголев А.С., Резаев Р.О., Трифонов А.Ю. Нелинейное уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова в квазиклассическом траекторно-

когерентном приближении // Известия вузов. Физика. — 2005. — Т. 48, № 6. — С. 38-47.

2. Потылицын А.П., Резаев Р.О. Фокусировка переходного и дифракционного излучения ультрарелятивистских частиц в изогнутых мишенях // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2006. — № 3. — С. 77-83.

3. Potylitsyn A.P., Rezaev R.O. Focusing of transition radiation and diffraction radiation from concave targets // Nuclear Instrument and Methods in Physics Research B. — 2006. — Vol. 252. — P. 44-49.

4. Rezaev R.O., Trifonov A.Yu., Shapovalov A.V. Symmetry operators for the Fokker–Plank–Kolmogorov equation with nonlocal quadratic nonlinearity // Symmetry Integrability and Geometry: Methods and Applications — 2007. — Vol. 3, 005 (P. 1–17).

5. Резаев Р.О., Трифонов А.Ю. Квазиклассические траекторно-сосредоточенные решения двумерного уравнения ФПК с квадратичным потенциалом // Труды I Всероссийской конференции «Перспективы развития фундаментальных наук». — Томск: ТПУ, 2004. — С. 153-154.

6. Резаев Р.О., Трифонов А.Ю. Решение нелинейного уравнения Фоккера–Планка с квадратичным потенциалом // Труды II Международной конференции «Перспективы развития фундаментальных наук». — Томск: ТПУ, 2005. — С. 257-259.

7. Резаев Р.О., Потылицын А.П. Фокусировка и дефокусировка переходного и дифракционного излучений ультрарелятивистских частиц в изогнутых мишенях // Труды XI Международной конференции «Современная техника и технологии». — Томск: ТПУ, 2005. — С. 315-317.

8. Резаев Р.О., Потылицын А.П. Расчет переходного и дифракционного излучения // Труды II Международной конференции «Перспективы развития фундаментальных наук». — Томск: ТПУ, 2005. — С. 73-76.

9. Резаев Р.О., Левченко Е.А., Трифонов А.Ю. Характеристики нелинейного уравнения Фоккера–Планка // Труды IV Международной конференции «Перспективы развития фундаментальных наук». — Томск: ТПУ, 2007. — С. 148-151.