На правах рукописи

Шарапов Алексей Анатольевич

Нелагранжевы калибровочные системы: геометрия и квантование

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Томск – 2007 г.

Работа выполнена на кафедре квантовой теории поля Томского государственного университета.

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор
Ляхович Семен Леонидович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Ольшанецкий Михаил Аронович

доктор физико-математических наук, профессор
Дубровский Владислав Георгиевич

доктор физико-математических наук, профессор
Шаповалов Александр Васильевич

Ведущая организация: Физический институт Российской Академии наук
им. П. Н. Лебедева

Защита состоится 29 мая 2008 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.267.07 в Томском государственном университете по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина 36, ауд. 119.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан   2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета   Ивонин И. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследований. Прогресс квантовой теории поля как математической основы физики фундаментальных взаимодействий был всегда неразрывно связан с разработкой общих методов квантования. Так, создание в конце 40-х – начале 50-х годов прошлого века квантовой электродинамики породило концепцию фейнмановского интеграла по траекториям, а открытие неабелевых калибровочных теорий и построение на их основе теоретико-полевых моделей сильного и электрослабого взаимодействий придало мощный импульс развитию общих методов квантования систем со связями. Важным шагом на этом пути явилось определение Фаддеевым и Поповым континуального интеграла для полей Янга-Миллса, вовлекающего наряду с исходными полевыми переменными дополнительные нефизические поля (ду́хи), а также открытие Бекки, Руэ, Стора и Тютиным (БРСТ) глобальной фермионной симметрии, смешивающей калибровочные поля с ду́хами Фаддеева-Попова. Открытие БРСТ-симметрии стало прологом к разработке методов обобщенного канонического квантования Баталина-Вилковыского-Фрадкина и лагранжевого квантования Баталина-Вилковыского, составляющих теперь основу общей БРСТ-теории.

В настоящее время БРСТ-теория является наиболее мощным и универсальным методом квантования калибровочных теорий. Помимо собственно задачи квантования, данный метод оказывается эффективным в теории перенормировок, при анализе аномалий, а также как инструмент построения совместных взаимодействий в калибровочных моделях. Заметен рост интереса к использованию БРСТ-методов и в ряде разделов математики, особенно в задачах, связанных с деформацией алгебраических структур (квантовые группы и алгебры, деформационное квантование и пр.). Практически все наиболее важные, с современной точки зрения, алгебраические структуры могут быть адекватно сформулированы или реинтерпретированы на языке производящих уравнений БРСТ-алгебры для подходящих калибровочных систем. Активное проникновение методов БРСТ-теории и связанной с ней гомологической алгебры в различные разделы теоретической и математической физики привело даже к появлению термина "когомологическая физика".

Можно констатировать, что современный этап развития квантовой теории поля характеризуется все большим смещением акцента в сторону разработки непертурбативных методов анализа классической и квантовой динамики полей с нетривиальной геометрией фонового, конфигурационного или фазового пространства. Неудивительно, что движение в этом направлении сопровождается интенсивным применением самых современных идей и конструкций дифференциальной геометрии, гомологической алгебры, алгебраической топологии и их синтезом с методами БРСТ-теории. Среди наиболее востребованных методов, имеющих непосредственное отношение к задачам непертурбативной квантовой теории поля, следует выделить метод деформационного квантования.

Концепция деформационного квантования, возникшая в 70-х годах прошлого века как математически строгая и последовательная схема квантования гамильтоновых систем с нелинейным фазовым пространством, получила бурное развитие в течение последних двадцати лет и является в настоящее время активным полем исследований как математиков, так и физиков-теоретиков. Среди последних ярких достижений в этой области можно отметить конструкцию деформационного квантования Федосова симплектических многообразий, а также общую схему деформационного квантования пуассоновых многообразий, предложенную Концевичем. Помимо решения собственно проблемы квантования теорий с нелинейным фазовым пространством, многие развиваемые в этой области идеи и методы находят применение и в других (существенно отличных по характеру) задачах теоретической и математической физики, в частности, являются эффективным инструментом построения новых физических моделей. Среди последних можно упомянуть виттеновскую формулировку полевой теории струн, калибровочные теории на некоммутативных пространствах, модели взаимодействия полей высших спинов. В этом своем аспекте теория деформационного квантования тесно переплетается с математическими конструкциями некоммутативной геометрии Коннэ, являющейся нетривиальным и многообещающим обобщением классического дифференциального исчисления на гладких многообразиях.

Следует заметить, что переход от механических к теоретико-полевым моделям, т. е. системам с бесконечномерным фазовым пространством, приводит к необходимости решения ряда вопросов, выходящих за рамки формальной математической процедуры деформационного квантования. Наличие квантовых расходимостей, например, делает нетривиальным вопрос о выборе правильной схемы квантования даже для полей с простой геометрией фазового пространства. Считается общепринятым, что последовательное квантование теоретико-полевых моделей должно основываться на представлении операторов рождения-уничтожения, т. е. виковском символе для полевых операторов. К сожалению, для большинства физических моделей такое представление известно лишь на уровне свободных полей, а вклад взаимодействия учитывается пертурбативно. Несмотря на известные достижения пертурбативной теории поля, такое разложение на свободную часть и взаимодействие не всегда адекватно физической ситуации, так как может разрушать фундаментальные симметрии исходной классической модели. Важными примерами такого рода теорий могут служить нелинейные сигма-модели и, в частности, струны в пространстве анти-де Ситтера. Стандартное разложение по методу ковариантного фонового поля над плоским фоном приводит к спонтанному нарушению симметрий сигма-модели, что делает, например, принципиально невозможным прямое отождествление спектра элементарных возбуждений струны с известным спектром элементарных частиц в пространстве анти-де Ситтера, а также оставляет открытым вопрос о точном (непертурбативном) значении критических параметров теории. Класс виковских символов является, таким образом, выделенным с точки зрения квантовой теории поля и заслуживает дальнейшего развития в сторону непертурбативного учета глобальной геометрии полей в существенно нелинейных моделях и системах со связями. Решение этих задач, по-видимому, невозможно без глубокого синтеза методов деформационного квантования и БРСТ-теории.

Еще одной выраженной тенденцией развития современной теоретической физики высоких энергий является все возрастающий интерес к калибровочным теориям, классические уравнения движения которых не допускают естественной вариационной формулировки, т. е. не могут быть получены из принципа наименьшего действия. Среди наиболее фундаментальных моделей такого рода стоит отметить самодуальные поля Янга-Миллса, киральные бозоны, уравнения Дональдсона-Уленбек-Яу, различные многомерные конформные теории поля с расширенной суперсимметрией, уравнения Зайберга-Виттена, теории безмассовых полей высших спинов, а также уравнения, описывающие самосогласованную динамику частиц струн и бран во внешних динамических полях. Отсутствие вариационной формулировки для этих моделей делает принципиально невозможным непосредственное применение стандартных рецептов квантования (операторного БВФ или ковариантного БВ), поэтому обычный подход к квантованию таких теорий состоит в конверсии исходной нелагранжевой динамики в лагранжеву путем введения некоторой системы вспомогательных полей. Вспомогательные поля вводятся так, чтобы эффективная лагранжева теория была динамически эквивалентна исходной (нелагранжевой) теории (т. е. чтобы вспомогательные поля входили в теорию либо чисто алгебраически и исключались на уравнениях движения, либо оказывались чисто калибровочными модами). Хотя в некоторых простых случаях такой подход оказывается действительно эффективным, выбор вспомогательных полей, а также включение их в исходную (нелагранжеву) динамику до сих пор остается в большей степени искусством нежели конструктивной процедурой. Показательным примером здесь может служить теория безмассовых полей высших спинов. Так, на свободном уровне состав вспомогательных полей и соответствующие лагранжианы были найдены еще в 70-х годах Фронсдалом. В то же время идентификация полного набора вспомогательных полей для нелинейных уравнений высших спинов (уравнений Васильева) до сих пор остается открытой проблемой. Указанные трудности делают актуальной разработку общих методов квантования нелагранжевых калибровочных теорий, которые выводили бы известные схемы БВ- и БВФ-БРСТ-квантований за рамки вариационной динамики.

Основные цели и задачи работы. Исходя из описанного выше общего контекста развития современной теоретической физики высоких энергий и имеющегося круга нерешенных проблем в данной диссертации были поставлены следующие конкретные цели и задачи: сформулировать ковариантную процедуру виковского квантования гамильтоновых систем с нелинейной геометрией фазового пространства и/или связями; обобщить схему деформационного квантования Федосова на широкий класс нерегулярных скобок Пуассона, ассоциированных с симплектическими алгеброидами Ли; разработать методы получения, исследования и перенормировки эффективных уравнений движения протяженных релятивистских объектов (бран) с учетом реакции излучения; построить и проквантовать релятивистские модели частиц высших спинов в пространстве-времени произвольной размерности; обобщить методы БРСТ-квантования на случай нелагранжевых и негамильтоновых калибровочных систем общего вида, а также отработать практику применения этих методов в ряде актуальных моделей теории поля; разработать теорию характеристических классов калибровочных систем как инструмента исследования глобальной геометрической структуры калибровочной динамики и квантовых аномалий.

Научная новизна и практическая значимость работы. Все основные результаты диссертации являются оригинальными и получены впервые. В частности, автору принадлежит обобщение методов БВ- и БВФ-БРСТ-квантований на нелагранжевы и негамильтоновы калибровочные теории общего вида. Данное обобщение существенно расширяет класс калибровочных теорий, допускающих последовательное квантовомеханическое описание. В работе впервые построено БРСТ-квантование квазисимплектических многообразий, а также виковское обобщение деформационного квантования Федосова. Указаны конкретные способы приложения ковариантной виковской техники к проблеме квантования нелинейных сигма-моделей, динамическим системам на римановых многообразиях и некоммутативной теории поля. Предложена новая модель спиновой частицы, способная единообразно описывать частицы произвольного спина в пространстве-времени произвольной размерности. Показано, что, в отличие от ранее известных моделей, данная модель спиновой частицы допускает непротиворечивое взаимодействие с гравитационными и электромагнитными полями общего вида. Разработана теория характеристических классов калибровочных систем. Будучи глобальными инвариантами калибровочной динамики, характеристические классы являются потенциально важными объектами при исследовании непертурбативных эффектов в существенно нелинейных теориях, а также в задачах о построении совместных взаимодействий и исследовании квантовых аномалий. Впервые сформулирован общий критерий классической перенормируемости теоретико-полевой модели с сингулярными источниками, предложен ковариантный метод регуляризации расходимостей и выведены ранее неизвестные эффективные уравнения движения релятивистских частиц и бран с учетом реакции излучения. Полученные асимптотические разложения для силы реакции излучения могут быть непосредственно использованы и для описания эффективной динамики макроскопических заряженных объектов, допускающих аппроксимацию сингулярными токами.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации, неоднократно докладывались и обсуждались на семинарах отделения теоретической физики ФИ РАН, группы математической физики ИТЭФ, лаборатории теоретической физики ОИЯИ, отделения теоретической и математической физики Брюссельского университета, в Международном институте математической физики им. Э. Шредингера (Вена), а также на семинарах кафедр теоретической физики и квантовой теории поля Томского государственного университета. Основные результаты были также представлены на 20 международных конференциях и семинарах, включая конференции памяти А.Д. Сахарова (Москва, ФИ РАН, 1996, 2002 гг.), Петровские чтения (Казань, 2000-2007 гг.), конференции “Theories of Fundamental Interactions” (Майнут, Ирландия, 1995 г.), “Supersymmetry and Quantum Symmetries” (Дубна, ОИЯИ, 1995-1997 гг.), “Supersymmetry and Quantum Field Theory” (Харьков, 2000 г.), “Theoretical and Experimental problems of General Relativity and Gravity” (Томск, 2002 г.), “Quantum Fields and Strings” (Домбай, Россия, 2003 г.), "Classical and Quantum Integrable Systems"(Дубна, 2004 г.), “International Conference on Theoretical Physics” (Москва, ФИ РАН, 2005 г.), “Poisson Sigma Models, Lie Algebroids, Deformations and Higher Analogues” (Вена, 2007 г.).

Публикации. Основу диссертации составляют результаты, опубликованные в 30 научных статьях, указанных в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, семи глав основного содержания, заключения, двух приложений и списка цитируемой литературы из 321 наименования. Материал изложен на 229 страницах, набранных в издательской системе LaTeX.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **Введении** формулируются основные цели и задачи диссертации в контексте развития современной квантовой теории поля, а также дается краткий обзор ключевых результатов работы и методов их получения.

ГЛАВА I. Деформационное квантование виковского типа

Концепция деформационного квантования, основы которой были заложены в работах Березина, а также французской группы математиков (Байен, Флато, Фронсдал, Лихнерович, Штернхаймер), получила бурное развитие в последние десятилетия. Вопрос о существовании ассоциативного $*$-произведения на произвольном симплектическом многообразии был положительно решен в начале 80-х годов де Вильдом и Лекомтом и независимо Карасевым и Масловым. Явная геометрическая конструкция $*$-произведения, а также следовой меры на $*$-алгебре функций была предложена Федосовым. Позднее было показано, что каждое $*$-произведение на симплектическом многообразии эквивалентно федосовскому. Работа Федосова послужила толчком для многочисленных переосмыслений, обобщений и приложений конструкции деформационного квантования в различных задачах теоретической и математической физики. Наконец, в известной работе Концевича 1997 года было построено деформационное квантование для произвольных пуассоновых многообразий.

Наряду с общей теорией деформационного квантования определенный интерес представляет изучение специальных типов $*$-произведений, удовлетворяющих дополнительным алгебраическим или геометрическим требованиям. Так, например, конструкция геометрического квантования и исчисление символов операторов на кэлеровых многообразиях мотивировали изучение деформационного квантования многообразий, оснащенных парой трансверсальных поляризаций, которое может рассматриваться как естественное обобщение алгебры виковских и qp-символов. Виковские символы являются также неизменным орудием квантования и многочастичной интерпретации теоретико-полевых систем. Начиная с пионерских работ Березина по квантованию в однородных комплексных областях, к настоящему времени накоплено большое количество результатов, относящихся к деформационному квантованию на поляризованных многообразиях. Однако во всех известных нам конструкциях виковского $*$-произведения явно используются специальные координатные системы ("разделенные переменные"), что не является вполне адекватным с точки зрения физических приложений, поскольку большинство физических теорий обладает общекоординатной инвариантностью. По этой причине представляется естественным связать виковскую поляризацию не с наличием адаптированной системы координат, а с некоторой дополнительной дифференциально-геометрической структурой. Такая геометрическая структура была найдена в работах [9, 10] и названа *виковской структурой*. Там же была предложена модификация метода Федосова, приводящая к явно ковариантному виковскому $*$-произведению, а также сформулированы необходимые и достаточные условия, обеспечивающие глобальную эквивалентность между вейлевским и виковским квантованиями (в том случае, когда последнее существует). Изложению этих результатов посвящены разделы 1-3 настоящей главы.

В **первом разделе** вводится понятие многообразия Федосова-Вика (ФВ). По определению, ФВ-многообразием называется пара (M, Λ), где M – гладкое многообразие, а Λ – билинейная комплекснозначная форма на касательном расслоении, удовлетворяющая условиям:

1) $\omega = \frac{1}{2}(\Lambda - \Lambda^t)$ – вещественная невырожденная 2-форма,

2) $\dim_{\mathbb{C}} \ker \Lambda = \frac{1}{2} \dim M$,

3) левое (правое) ядерное распределение $\ker \Lambda$ интегрируемо.

Из этих условий непосредственно следует, что (i) ω – симплектическая 2-форма на M; (ii) симметричная часть $g = \frac{1}{2}(\Lambda + \Lambda^t)$ билинейной формы Λ невырождена, (iii) композиция $I = g^{-1} \circ \omega : T^{\mathbb{C}}M \to T^{\mathbb{C}}M$ задает интегрируемую инволютивную структуру, т. е. $I^2 = \mathrm{id}$ и тензор Нейенхейса $N(I)$ равен нулю; (iv) существует единственная симметричная связность ∇, в отношении которой форма Λ ковариантно постоянна.

Во **втором разделе** строится виковское обобщение деформационного квантования Федосова. Результатом квантования является ассоциативное $*$-произведение на $C^\infty(M)[[\hbar]]$, а также следовая мера $d\mu$, определяющая непрерывный следовой функционал на алгебре $(C^\infty(M)[[\hbar]], *)$. При этом выполняется следующее "граничное условие":

$$f * g = f \cdot g + \frac{i\hbar}{2} \Lambda^{ij} \partial_i f \partial_j g + O(\hbar^2)\,, \qquad \Lambda^{ij} \equiv g^{in} \Lambda_{nm} g^{mj}\,.$$

Кроме того, для любой открытой области $U \subset M$ и любой комплекснозначной функции $f \in C^\infty(U)$, инвариантной относительно действия правого (левого) ядерного распределения формы Λ, выполняется равенство $f * g = f \cdot g$ $(g * f = g \cdot f)$.

В **третьем разделе** исследуется взаимосвязь между вейлевским и виковским квантованиями ФВ-многообразий. Центральным результатом раздела является следующая

Теорема [10]. *Для того, чтобы виковское деформационное квантование ФВ-многообразия (M,Λ) было эквивалентно вейлевскому квантованию, необходимо и достаточно, чтобы замкнутая 2-форма $R^l_{ijk}I^k_l dx^k\wedge dx^l$ определяла нулевой класс когомологий де Рама M.*

Здесь R^l_{ijk} – тензор кривизны единственной симметричной связности ∇, согласованной с виковской структурой Λ, а I^k_i – тензор инволютивной структуры.

В **четвертом разделе** формулируется обобщение виковской схемы квантования на случай гамильтоновых систем со связями второго рода. В частности, формулируются явные условия, которым должны удовлетворять связи теории, чтобы исходная (почти-)виковская поляризация объемлющего фазового пространства индуцировала интегрируемую виковскую поляризацию на поверхности связей.

В **пятом разделе** ставится задача о построении естественного виковского квантования для кокасательных расслоений к римановым многообразиям. Таким образом, исходным объектом конструкции является гладкое многообразие M (рассматриваемое как конфигурационное пространство некоторой механической системы), наделенное римановой метрикой $g=g_{ij}(x)dx^i dx^j$. Соответствующее фазовое пространство T^*M обладает естественной симплектической структурой $\omega=dx^i\wedge dp_i$. Последняя интерпретируется как кэлерова 2-форма, отвечающая некоторой кэлеровой метрике

$$G=G_{ij}(x,p)dx^i dx^j+G^j_i(x,p)dx^i dp_j+G^{ij}(x,p)\nabla p_i\nabla p_j.$$

Здесь ∇ – симметричная связность в T^*M, согласованная с метрикой g, а структурные функции G_{ij}, G^j_i и G^{ij} ищутся в виде формальных рядов по импульсам p_i с коэффициентами, являющимися тензорными полями на M; при этом требуется выполнение следующих условий:

1) $G|_M=g_{ij}(x)dx^i dx^j$,

2) $\mathrm{dim}_{\mathbb{C}}\mathrm{ker}(G+i\omega)=\mathrm{dim}M$,

3) $\mathrm{ker}(G+i\omega)$ – интегрируемое распределение.

Показано, что условие интегрируемости левого (правого) ядерного распределения виковской формы $\Lambda=G+i\omega$ приводит к цепочке рекуррентных соотношений на коэффициенты разложения G. Исходя из этих соотношений формулируется явная пертурбативная процедура восстановления G по заданной римановой метрике g и описывается общий произвол в решении. Конкретное применение этой процедуры иллюстрируется на примерах римановых многообразий постоянной кривизны и нелинейных сигма-моделей. В частности, в последнем случае указывается некоторый естественный класс метрик на конфигурационном пространстве полей сигма-модели, приводящий в линейном пределе к стандартному представлению операторов рождения-уничтожения.

В **шестом разделе** предложена модель бозонной струны с некоммутативной геометрией мирового листа. В основе конструкции лежит простое наблюдение, что, как любое двумерное риманово многообразие (M,g), мировая поверхность струны (в евклидовом пространстве) обладает естественной кэлеровой (а, следовательно, виковской) структурой

$$\Lambda = g + i\omega\,, \qquad \omega = \sqrt{\det g} d\tau \wedge d\sigma\,,$$

где g – метрика Полякова на M. Используя Λ на множестве струнных полей $X^A(\tau,\sigma)$, задающих вложение мировой поверхности M в объемлющее евклидово пространство, вводится виковское $*$-умножение. Действие некоммутативной бозонной струны имеет вид [13]:

$$S_\nu[X,g] = \frac{1}{\nu^2}\int_M \mathrm{d}\mu \left([X^A,X^B]*[X_A,X_B]+\nu^2\alpha^2\right) = \int_M \omega\left(\{X^A,X^B\}^2+\alpha^2\right) + O(\nu)\,. \qquad (1)$$

Здесь квадратные скобки означают коммутатор по отношению к виковскому $*$-произведению, $d\mu$ – соответствующую следовую меру, ν – параметр деформации, а α – обратное значение параметра натяжения струны. В пределе $\nu \to 0$ действие S_ν переходит в действие обычной бозонной струны в формулировке Шилда.

В *секции 4.2* исследуются инстантонные решения струнных уравнений движения (1) в четырехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$. Последние удовлетворяют уравнениям

$$\left([X^A,X^B]+\alpha^{AB}\right)_\pm = 0\,, \qquad \alpha_\pm^{AB}\alpha_{AB} = \alpha^2\,, \qquad (2)$$

где значок $\pm$ означает проекцию на самодуальную (антисамодуальную) часть антисимметричного тензора. Для уравнений (2) строится общее решение в классе полей аналитичных по ν. Показывается, что эти решения исчерпывают все глобальные минимумы функционала (1) и соответствуют в коммутативном пределе $\nu \to 0$ голоморфным кривым в $\mathbb{C}^2$.

ГЛАВА II. Деформационное квантование квазисимплектических многообразий

В данной главе излагаются результаты работ [15, 16, 17] по квантованию нерегулярных пуассоновых многообразий. Напомним, что скобка Пуассона называется *нерегулярной*, если ранг отвечающего ей пуассонова бивектора не постоянен, т. е. может меняться от точки к точке. Уже сам факт вырожденности скобки Пуассона означает, что любая гамильтонова система, построенная на основе этой скобки, не допускает вариационной формулировки.

В отличие от регулярного случая (где имеется теорема Дарбу о локальной эквивалентности пуассоновых структур одинакового ранга) квантование нерегулярных скобок Пуассона оказывается нетривиальной задачей даже в локальной постановке. Прямое перенесение квантования Федосова с регулярных на нерегулярные пуассоновы многообразия оказывается принципиально невозможным ввиду отсутствия аффинной связности (ковариантной производной), согласованной с нерегулярной скобкой Пуассона. Тем не менее, в упомянутых выше работах было показано, что, в отличие от квантования Федосова, *метод Федосова* допускает нетривиальные обобщения и может быть использован для квантования довольно широкого класса нерегулярных пуассоновых структур. Чтобы дать представление о рассматриваемом классе многообразий приведем следующее выражение для скобок Пуассона:

$$\{f,g\} = \omega^{ab}(X_a^\mu\partial_\mu f)(X_b^\nu\partial_\nu g)\,, \qquad \det(\omega^{ab}) \neq 0\,, \qquad \forall f,g \in C^\infty(M)\,. \qquad (3)$$

Матрицы X и ω, входящие в это выражение, подчиняются некоторым дифференциальным условиям, гарантирующим выполнение тождества Якоби. Геометрический смысл этих условий состоит в том, что X является якорем некоторого алгеброида Ли $\mathcal{E} \to M$ над пуассоновым многообразием M, а ω^{-1} – 2-$\mathcal{E}$-формой, замкнутой относительно Ли-алгеброидного внешнего дифференциала, $d_{\mathcal{E}}\omega^{-1} = 0$. Заметим, что эта интерпретация не накладывает каких-либо жестких ограничений на ранг матрицы X, так что скобка (3) может быть вполне нерегулярной (хотя и вовлекает невырожденную форму ω). Рассматриваемые многообразия занимают, таким образом, некоторое промежуточное положение между симплектическими и общими пуассоновыми многообразиями, а потому были названы *квазисимплектическими*.

Первый раздел главы является подготовительным. Здесь даются необходимые определения, фиксируются обозначения и обсуждаются основные дифференциально геометрические конструкции, связанные с симплектическими алгеброидами Ли.

Второй раздел начинается с изложения основной идеи предлагаемого метода квантования, суть которой состоит в том, чтобы проквантовать квазисимплектическое многообразие M посредством его вложения в некоторое суперпуассоново многообразие с "более простой" скобкой Пуассона. Сама по себе процедура построения вложения включает три шага. Прежде всего, пуассоново многообразие $(M, \{-,-\})$ реализуется как поверхность связей второго рода в тотальном пространстве расслоения $\mathcal{E}^*$ дуального расслоению алгеброида Ли $\mathcal{E}$. На следующем шаге теория со связями второго рода на $\mathcal{E}^*$ конвертируется в эквивалентную калибровочную теорию (т. е. теорию со связями первого рода) на тотальном пространстве прямого произведения векторных расслоений $\mathcal{N} = \mathcal{E}^* \oplus \mathcal{E}$. Эквивалентность означает, что пуассонова алгебра физических наблюдаемых на $\mathcal{N}$ изоморфна пуассоновой алгебре функций на $(M, \{-,-\})$. Наконец, полученная классическая калибровочная система квантуется методом БВФ-БРСТ-квантования. Ключевым моментом при этом является то, что пространство физических наблюдаемых на $\mathcal{N}$, будучи отождествлено с определенной БРСТ-когомологией, оказывается наделенным довольно простой пуассоновой структурой, допускающей простое квантование. По построению, $*$-произведение на алгебре физических наблюдаемых $\mathcal{N}$ индуцирует $*$-произведение на исходном квазисимплектическом многообразии M.

Пуассонова структура на пространстве (неабелевой) конверсии $\mathcal{N}$ строится в терминах некоторой симметричной Ли-алгеброидной связности ∇, согласованной с ω и имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\{x^\mu, x^\nu\} = 0\,, && \{p_a, x^\mu\} = X^\mu_a(x)\,, \\
&\{x^\mu, y^a\} = 0\,, && \{p_a, y^b\} = -\Gamma^b_{ac}(x) y^c\,, \\
&\{y^a, y^b\} = \omega^{ab}(x)\,, && \{p_a, p_b\} = \omega_{ab}(x) + f^c_{ab}(x) p_c - \tfrac{1}{2} R_{abcd}(x) y^c y^d\,.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Здесь $\{p_a\}$ и $\{y^a\}$ – линейные координаты на слоях $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^*$, соответственно, f^c_{ab} – структурные функции алгеброида Ли, Γ^c_{ab} – коэффициенты связности ∇, а R_{abcd} – ее тензор кривизны (все индексы поднимаются и опускаются с помощью ω). Легко видеть, что скобки (4) хорошо определены и удовлетворяют тождеству Якоби; последнее воспроизводит определение тензора кривизны через коэффициенты связности, тождество Бианки, а также определяющие соотношения симплектического алгеброида Ли $(\mathcal{E}, X, \omega)$. При этом, исходное квазисимплектическое многообразие M вкладывается в $\mathcal{N}$ как поверхность связей второго рода: $y^a = 0\,, p_a = 0$. Далее показывается, что данная система связей второго рода может быть заменена на эквивалентную систему первого рода

$$T_a = p_a + \sum_{n=1}^{\infty} t_{ab_1\cdots b_n}(x) y^{b_1} \cdots y^{b_n}\,, \tag{5}$$

где коэффициенты разложения по y^a находятся из требования инволюции: $\{T_a, T_b\} = f_{ab}^c T_c$.

Третий раздел посвящен БРСТ-БВФ-квантованию гамильтоновой системы со связями первого рода (5). В соответствии с общей процедурой – для каждой связи первого рода $T_a \approx 0$ вводится пара антикоммутирующих переменных $(\mathcal{C}^a, \mathcal{P}_b)$, подчиненных каноническим коммутационным соотношениям. Духи $\mathcal{C}^a$ и $\mathcal{P}_b$ естественным образом интерпретируются как линейные координаты в слоях (нечетных) векторных расслоений $\Pi\mathcal{E}$ и $\Pi\mathcal{E}^*$, соответственно. Таким образом, исходное фазовое пространство расширяется до тотального пространства прямой суммы супервекторных расслоений $\mathcal{M} = \mathcal{N} \oplus \Pi\mathcal{N}$; при этом, как и переменные конверсии y^a, духовые переменные преобразуются как сечения векторного расслоения над M. Эта геометрическая интерпретация приводит к следующему (неканоническому) продолжению пуассоновой структуры с многообразия $\mathcal{N}$ на $\mathcal{M}$:

$$\{p_a, \mathcal{C}^b\} = -\Gamma_{ac}^b(x)\mathcal{C}^c\,, \qquad \{p_a, \mathcal{P}_b\} = \Gamma_{ab}^c(x)\mathcal{P}_c\,. \tag{6}$$

Тогда классический БРСТ-заряд дается выражением $\Omega = \mathcal{C}^a T_a$.

Далее, в пуассоновой алгебре функций на $\mathcal{M}$ выделяется подалгебра $\mathcal{A}$, порождаемая функциями от $x^\mu, y^a, \mathcal{C}^a$ и $\mathcal{C}^a p_a$. Алгебра $\mathcal{A}\otimes[[\hbar]]$ допускает относительно простое деформационное квантование в терминах ассоциативного $\circ$-умножения и содержит помимо квантового БРСТ-заряда $\hat{\Omega}$ все наблюдаемые исходной теории. А именно: показывается, что для каждой функции $a \in C^\infty(M)$ существует единственный элемент $\hat{a} \in \hat{\mathcal{A}} \otimes [[\hbar]]$, не зависящий от $\mathcal{C}^a$ и удовлетворящий условиям

$$\hat{\Omega} \circ \hat{a} - \hat{a} \circ \hat{\Omega} = 0\,, \qquad \hat{a}|_{y=0} = a\,, \qquad \mathrm{gh}(\hat{a}) = 0\,. \tag{7}$$

Таким образом, имеет место линейный изоморфизм $\sigma : a \mapsto \hat{a}$ между пространством наблюдаемых исходной теории $C^\infty(M) \otimes [[\hbar]]$ и квантовыми БРСТ-когомологиями с духовым числом 0. Искомое ассоциативное $*$-произведение на квазисимплектическом многообразии $(M, \{-,-\})$ определяется теперь как обратный образ $\circ$ относительно изоморфизма σ:

$$a * b = (\hat{a} \circ \hat{b})|_{y=0} = a \cdot b + \frac{i\hbar}{2}\{a, b\} + O(\hbar^2)\,, \qquad \forall a, b \in C^\infty(M)\,.$$

В **четвертом разделе** ставится вопрос о наиболее общей дифференциально геометрической структуре, обеспечивающей факторизацию (3) пуассонова бивектора $\alpha \in \Gamma(\wedge^2 TM)$

в терминах инволютивного распределения $F=\mathrm{span}\{X_a\}\subset TM$ и невырожденной формы $\omega=(\omega^{ab})\in\Gamma(\wedge^2\mathcal{E})$. Частичный ответ на это вопрос дает уже рассмотренная конструкция симплектического алгеброида Ли. Для анализа более общих возможностей предполагается, что $C^\infty(M)$-модуль $\Gamma(F)$ допускает конечную локально свободную резольвенту

$$0\leftarrow\Gamma(F)\stackrel{d_1^*}{\longleftarrow}\Gamma(\mathcal{E}_1)\stackrel{d_2^*}{\longleftarrow}\Gamma(\mathcal{E}_2)\leftarrow\cdots\leftarrow\Gamma(\mathcal{E}_{n-1})\stackrel{d_n^*}{\longleftarrow}\Gamma(\mathcal{E}_n)\leftarrow 0\,, \tag{8}$$

где $\mathcal{E}_k\to M$ и d_k некоторая последовательность векторных расслоений над M и их гомоморфизмов (не обязательно постоянного ранга), причем $\mathcal{E}_1=\mathcal{E}$, а $d_1=X$. Далее показывается, что по каждой резольвенте (8) может быть построено NQ-многообразие, отвечающее инъективному n-алгеброиду Ли, а также приводятся примеры пуассоновых структур, факторизующихся в терминах 2-алгеброидов. Основным результатом данного раздела является следующая терема, дающая ответ на поставленный выше вопрос в случае 2-алгеброидов Ли.

Теорема. *Пусть задан следующий набор данных:*

1) короткая точная последовательность

$$0\to\mathcal{E}_2\stackrel{d}{\to}\mathcal{E}_1\stackrel{X}{\to}F\to 0\,,$$

в которой $\mathcal{E}_1\to M$ и $\mathcal{E}_2\to M$ – векторные расслоения над гладким многообразием M, F – интегрируемое подрасслоение в TM, а d и X – гомоморфизмы векторных расслоений над M (не обязательно постоянного ранга);

2) невырожденная, кососимметрическая, билинейная форма ω на $\mathcal{E}_1$, индуцирующая пуассонов бивектор на базовом многообразии по правилу:

$$\alpha=\langle\omega,X\wedge X\rangle\in\wedge^2TM\,,\qquad[\alpha,\alpha]=0\,.$$

(Здесь мы отождествляем $X:\mathcal{E}_1\to F\subset TM$ с сечением $\mathcal{E}_1^*\otimes TM$.)

Тогда с каждым набором таких данных можно связать расслоение антипуассоновых алгебр $\mathcal{F}$ над M вместе с абелевой связностью D дифференцирующей $\mathcal{F}$ так, что уравнение нулевой кривизны $D^2=0$ генерирует все структурные соотношения, возникающие из условия интегрируемости F и тождества Якоби для α.

ГЛАВА III. Эффективные нелагранжевы модели в классической теории поля

В данной главе рассматривается специальный класс нелагранжевых моделей, описывающих эффективную динамику заряженных релятивистских объектов (бран) с учетом радиационного трения. В самом общем виде проблему учета реакции излучения можно сформулировать как задачу о самосогласованном решении классических уравнений движения для двух взаимодействующих полевых систем, определенных на пространствах различной размерности. В случае, когда одна из полевых систем является линейной, отвечающие ей уравнения движения могут быть явно решены методом функций Грина. Формальная подстановка этого решения в оставшиеся уравнения движения приводит к эффективным динамическим уравнениям для второй подсистемы (браны). Основная трудность при этом заключается в том, что, поскольку функция Грина в локальной теории поля имеет сингулярность в пределе совпадения аргументов, соответствующие эффективные уравнения движения оказываются плохо определенными (содержат бесконечности). Для "изгнания" этих бесконечностей и получения физически осмысленных результатов приходится прибегать к той или иной схеме регуляризации и перенормировки.

Целью данной главы является развитие систематической процедуры регуляризации и перенормировки в классической теории поля с сингулярными источниками, а также приложение этой процедуры для исследования реакции излучения в ряде линейных и *нелинейных* моделей теории поля.

В **первом разделе** обсуждается общая постановка задачи о реакции излучения в линейных моделях теории поля, а также структура запаздывающих функций Грина и сингулярных токов, ассоциированных с бранами. Устанавливается критерий лагранжевости самодействия.

Во **втором разделе** формулируется ковариантная процедура регуляризации самодействия. Как известно, запаздывающая функция Грина $G(x)$ безмассовых релятивистских волновых уравнений имеет неинтегрируемую особенность в вершине светового конуса $x^2 = 0$. Именно наличие этой сингулярности является источником всех расходимостей, возникающих при попытке самосогласованного решения уравнений для взаимодействующей системы (поле)+(брана). Суть предлагаемого метода регуляризации состоит в сглаживании этой особенности путем аппроксимации светового конуса будущего (который, в зависимости от размерности пространства, либо ограничивает, либо задает носитель запаздывающей функции Грина $G(x)$) семейством гладких гиперболоидов $x^2 = \varepsilon^2$, $x_0 > 0$ так, что при $\varepsilon > 0$ функция $G_\varepsilon(x)$ является регулярной обобщенной функцией на пространстве Минковского. Основным результатом данного раздела является вывод асимптотического разложения по параметру регуляризации для так называемого *производящего интеграла расходимостей*

$$I = \int \theta(-X^0(\tau))\, \delta(X^2(\tau) - \varepsilon^2)\, \varphi(\tau)\, d^n\tau, \qquad X^\mu(\tau) \equiv x^\mu(\tau' + \tau) - x^\mu(\tau')\,. \tag{9}$$

Здесь τ^i – координаты на мировой поверхности браны, $\varphi(\tau)$ – некоторая гладкая функция, вид которой зависит от структуры взаимодействия поля и браны, а также волнового оператора поля. Если мировая поверхность браны N вложена в $\mathbb{R}^{d-1,1}$ так, что индуцированная метрика $h_{ij}(\tau) = \partial_i x^\mu \partial_j x_\mu$ на N невырождена, то $\tau = 0$ является невырожденной критической точкой функции $X^2(\tau)$. Последнее обстоятельство позволяет ввести в окрестности точки $\tau = 0$ координаты Морса, использование которых значительно упрощает вывод асимптотического разложения. Подробности вычислений собраны в Приложениях A и B.

Третий раздел посвящен исследованию реакции излучения в ряде конкретных моделей взаимодействия бран с фоновыми полями. Так в *секции 3.1* рассматривается эффективная динамика $(n-1)$-браны $N \subset \mathbb{R}^{d-1,1}$, минимально связанной с калибровочным полем n-формы

H. Динамика полной системы (поле)+(брана) описывается функционалом действия

$$S = S_N + \int_{\mathbb{R}^{d-1,1}} dH \wedge *dH + e \int_N H\,, \tag{10}$$

где S_N – действие свободной браны, а e – константа связи.

Применение развитой техники регуляризации позволяет показать, что учет самодействия в модели (10) приводит к $[(d-n)/2]$ расходящимся структурам, первые две из которых имеют вид

$$I_1 = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\sqrt{|h|}\,, \qquad I_2 = \frac{3}{4}\frac{(-1)^n}{n!}\sqrt{|h|}\nabla^2 x_\mu \nabla^2 x^\mu\,, \tag{11}$$

где ∇_i – ковариантные производные, построенные по индуцированной метрике h_{ij}. Видно, что наиболее сингулярное слагаемое I_1 отвечает за перенормировку параметра натяжения браны (при $n = 1$ – массы частицы). Параметр при втором сингулярном члене I_2 обычно называется жесткостью, поэтому сокращение этой расходимости осуществляется за счет перенормировки жесткости. Формула (11) исчерпывает все контрчлены, необходимые для перенормировки классической модели (10), в случае, когда коразмерность браны N не превышает пяти.

В *секции 3.2* указаны специальные типы неминимального взаимодействия бран, приводящие к локализации поля самодействия на мировой поверхности браны. Этот класс моделей интересен тем, что эффективные уравнения движения браны оказываются не только локальными, но и лагранжевыми.

Известно, что знак (направление) силы самодействия источника существенно зависит от тензорной природы поля, которое он порождает. Для неприводимого тензорного поля спина s этот знак равен $(-1)^s$ (два одноименных электрических заряда отталкиваются, а две гравитирующие массы притягиваются). Это простое наблюдение указывает на принципиальную возможность взаимного сокращения расходимостей в моделях с достаточно разнообразным спектром полей. Ввиду этого, в *секции 3.2* были получены эффективные уравнения движения $(n-1)$-браны, минимально взаимодействующей со следующим мультиплетом тензорных полей: калибровочным полем n-формы, скалярным полем и полем линеаризованной гравитации. Показано, что за счет выбора свободных параметров можно всегда сократить две ведущие расходимости, что обеспечивает конечность эффективной динамики в случае браны коразмерности не выше пяти.

Четвертый раздел посвящен выводу силы реакции излучения в модели безмассовой электрически заряженной частицы в $\mathbb{R}^{3,1}$. Случай безмассовой частицы является особым, поскольку индуцированная метрика на изотропности мировой линии частицы равна тождественно нулю, что приводит к дополнительным (как лагранжевым, так и нелагранжевым) расходимостям по сравнению с массивным случаем. Применение ковариантной процедуры регуляризации позволяет получить следующие эффективные уравнения движения [20]:

$$\frac{d}{d\tau}\left(e\frac{dx_\mu}{d\tau}\right) = F^{ext}_{\mu\nu}(x(\tau))\frac{dx^\nu}{d\tau} + F^{rr}_\mu\,, \qquad \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau} = 0\,, \qquad w \equiv \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\frac{d^2x_\mu}{d\tau^2} < 0\,,$$

где регуляризованная сила реакции излучения имеет вид

$$F^{rr}_\mu(\tau,\varepsilon) = -q^2\sqrt[4]{w}\left[\frac{\alpha_1}{4}\ddot{x}_\mu\varepsilon^{-3/2} + \frac{\alpha_2}{10}\dddot{x}^2\dot{x}_\mu\varepsilon^{-1} - \frac{\alpha_3}{16}\left(\overset{(4)}{x}_\mu + \frac{11}{10}\dddot{x}^2\ddot{x}_\mu + \frac{11}{5}\dddot{x}\cdot\overset{(4)}{x}\dot{x}_\mu\right)\varepsilon^{-1/2}\right] -$$

$$-q^2\frac{2}{5}\sqrt[4]{w}\left\{\overset{(5)}{x}_\mu + \dddot{x}^2\dddot{x}_\mu + 3\dddot{x}\cdot\overset{(4)}{x}\ddot{x}_\mu + \left(\frac{9}{7}\overset{(4)}{x}{}^2 + \frac{11}{7}\dddot{x}\cdot\overset{(5)}{x} + \frac{2}{5}(\dddot{x}^2)^2\right)\dot{x}_\mu\right\} + o(\varepsilon^{1/2}),$$

$$\alpha_n = 12^{n/4}\Gamma\left(1+n/4\right).$$

В последнем выражении точки над x означают действие репараметризационно инвариантной производной $D = \frac{1}{\sqrt[4]{w}}\frac{d}{d\tau}$, ε – параметр регуляризации, e – поле однады на мировой линии частицы, а q – электрический заряд. Видно, что в пределе снятия регуляризации $\varepsilon \to 0$ возникают три расходимости. Члены при $\varepsilon^{-3/2}$ и $\varepsilon^{-1/4}$ оказываются лагранжевыми и сокращаются добавлением соответствующих контрчленов в исходный лагранжиан частицы. Что же касается нелагранжевой расходимости при ε^{-1}, то соответствующее выражение, подобно конечной части в F^{rr}_μ, меняет знак при обращении времени $\tau \to -\tau$, а значит, должно интерпретироваться как (бесконечный) вклад в реакцию излучения. Отметим, что перенормированные уравнения движения безмассовой частицы вовлекают шестую производную, в отличие от известного уравнения Лоренца-Дирака, являющегося дифференциальным уравнением третьего порядка.

Пятый раздел посвящен анализу реакции излучения в нелинейных моделях теории поля. В качестве базового примера рассматривается модель скалярного поля с m-точечной вершиной самодействия. Устанавливается общая структура ряда теории возмущений по числу источников, а также условие классической перенормируемости теории. Эта же техника затем используется для анализа гравитационного самодействия бран. Центральным результатом раздела является вывод следующего общего критерия классической перенормируемости в терминах размерности констант связи теории.

Утверждение [22]. *Пусть действие теории имеет структуру*

$$S[\phi,x] = \int d^dx(\phi D\phi + \lambda\partial^{m_1}\phi^m) + \alpha\int d^n\tau\partial^{k_1}\phi^k(x(\tau))\mathcal{J}(\tau) + S_N[x], \qquad (12)$$

где D – некоторый волновой оператор, $\mathcal{J}(\tau)$ – гладкая функция на мировой поверхности браны, а символ ∂^k обозначает k производных в вершине. Тогда теория является классически перенормируемой, если и только если выполняется хотя бы одно из трех условий:

1) $[\alpha] + \frac{[\lambda]}{m-2} \leq 0\,, \quad [\lambda] \geq 0;$
2) $[\alpha] + \frac{[\lambda]}{m-2} \leq 0\,, \quad k = 1;$
3) $[\alpha] \leq 0\,, \quad [\lambda] < 0\,, \quad k \neq 1.$

Квадратными скобками обозначена размерность констант связи в единицах длины.

В частности, для гравитирующей браны данный критерий перенормируемости дает следующее ограничение на коразмерность: $d-n \leq 2$. Более того, оказывается, что при выполнении последнего условия эффективная динамика браны оказывается свободной от расходимостей.

ГЛАВА IV. Геометрические модели и квантование спиновых частиц

Данная глава посвящена проблеме построения и квантования моделей спиновых частиц. Эта область является одним из традиционных разделов теоретической физики с уже более чем восьмидесятилетней историей. С течением времени мотивации к исследованию механических моделей частиц со спиновыми степенями свободы неоднократно менялись, трансформируясь от попыток классического описания динамики спина до интерпретации спиновых частиц как специфических примеров p-бран, являющихся, как считается, неотъемлемыми ингредиентами непертурбативной теории струн. Следует также отметить и то, что теория релятивистких спиновых частиц сталкивается с известной частью трудностей (касающихся прежде всего проблем квантования и включения взаимодействия), подобных тем, что встречаются в теории струн и теории калибровочных полей высших спинов. По этой причине модели спиновых частиц часто используются для отработки методов квантования струнных моделей и анализа совместности взаимодействий в теории калибровочных полей, что является еще одним стимулом к изучению этого класса моделей. С геометрической точки зрения модели спиновых частиц доставляют содержательные примеры динамических систем с нетривиальной топологией физического фазового пространства, что делает необходимым привлечение глобальных методов квантования (геометрического или деформационного).

Предлагаемая в данной главе модель массивной спиновой частицы в пространстве-времени произвольной размерности строится на основе *метода орбит* Кириллова-Костанта-Сурье. В этом подходе спиновая частица, как и любая другая *элементарная динамическая система*, описывается в терминах физического фазового пространства, отождествляемого с коприсоединенной орбитой соответствующей группы фундаментальных симметрий. Для массивной спиновой частицы в d-мерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^{d-1,1}$ – это регулярные коприсоединенные орбиты группы Пуанкаре. Известно, что множество всех таких орбит $\{\mathcal{O}_{m,\mathbf{s}}\}$ параметризуется $r+1$ числовым параметром m и $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r)$, где параметр m ассоциируется с массой, а $\mathbf{s}$ – со спином частицы. Число $r = [(d-1)/2]$ совпадает с рангом группы пространственных вращений $SO(d-1)$ (малой группой Вигнера массивного представления группы Пуанкаре). Условие регулярности означает, что среди всех коприсоединенных орбит группы Пуанкаре орбиты $\mathcal{O}_{m,\mathbf{s}}$ имеют максимальную возможную размерность, $\dim \mathcal{O}_{m,\mathbf{s}} = (d-1)(d+2)/2 - r$. Будучи однородными симплектическими многообразиями, орбиты $\mathcal{O}_{m,\mathbf{s}}$ оснащаются замкнутой невырожденной 2-формой ω, инвариантной относительно действия группы Пуанкаре.

Динамика модели частицы определяется заданием структуры бирасслоения

$$\mathbb{R}^{d-1,1} \xleftarrow{\pi_2} \mathcal{E} \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{O}_{m,\mathbf{s}}$$

для некоторого пресимплектического многообразия $\mathcal{E}$ с замкнутой 2-формой Ω постоянного ранга. Типичный слой $\pi_1^{-1}(a) \subset \mathcal{E}$ над точкой $a \in \mathcal{O}_{m,\mathbf{s}}$ соответствует интегральному листу ядерного распределения $\ker \Omega$, проходящему через точку a. Другими словами,

$\pi_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{O}_{m,\mathbf{s}} \simeq \mathcal{E}/\ker\Omega$ и $\Omega = \pi_1^*\omega$. Пространственно-временная эволюция частицы получается проекцией π_2 слоев $\pi_1^{-1}(a)$ на $\mathbb{R}^{d-1,1}$. Функционал действия для траектории частицы $\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{E}$ имеет вид

$$S[\gamma] = \int\limits_\gamma \vartheta\,, \tag{13}$$

где ϑ – локально определенный пресимплектический потенциал, т. е. $\Omega = d\vartheta$.

Метод орбит играет унифицирующую роль, демонстрируя эквивалентность всевозможных моделей спиновых частиц на уровне физического фазового пространства. Оборотной стороной универсальности метода является большой произвол в выборе пресимплектического многообразия $\mathcal{E}$. Этот выбор не может быть сделан на основе одних только теоретико-групповых соображений и требует привлечение дополнительных физических принципов.

В **первом разделе** показывается, что в качестве такого дополнительного принципа может выступать следующее фундаментальное требование [7]:

Пространственно-временная проекция $\pi_2 : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^{d-1,1}$ *классов калибровочно-эквивалентных траекторий* $[\gamma] = \pi_1^{-1}(a)$*, где* $a \in \mathcal{O}_{m,\mathbf{s}}$*, определяет* одномерные *мировые линии в* $\mathbb{R}^{d-1,1}$.

Данный постулат имеет простую физическую мотивировку, связанную с возможностью включения взаимодействия частицы с внешними полями. А именно: в случае, когда $\dim \pi_2[\gamma] > 1$ частица перестает быть локализованной в определенной точке пространства, но “заметает” некоторую калибровочную орбиту ненулевой размерности. При этом все точки орбиты, являясь по определению физически эквивалентными, должны отождествляться друг с другом. Включение взаимодействия частицы с внешними полями разрушает в общем случае однородность пространства-времени и делает такое отождествление физически противоречивым: разные точки калибровочной орбиты проходят через разные точки пространства Минковского, а потому испытывают различное влияние фоновых полей. С технической точки зрения проблема состоит в том, что включение взаимодействия с внешними полями увеличивает ранг пресимплектической формы, что приводит к появлению нефизических степеней свободы. Простейший (и, по-видимому, единственный) способ удовлетворить сформулированному выше условию одномерности траекторий в пространстве Минковского состоит в том, чтобы подобрать такое однородное пресимплектическое многообразие $(\mathcal{E}, \Omega)$, для которого $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{O}_{m,\mathbf{s}} + 1$ или, что то же самое, $\dim\ker\Omega = 1$. Последнее требование уже однозначно приводит к фактор-пространству

$$\mathcal{E} \simeq (\text{Группа Пуанкаре})/H\,,$$

где $H \subset SO(d-1) \subset SO(d-1,1)$ – подгруппа Картана группы пространственных поворотов, $H \simeq [SO(2)]^r$. Используя разложение Ивасавы для группы Лоренца, можно видеть, что пространство $\mathcal{E}$ имеет следующую структуру прямого произведения:

$$\begin{gathered} \mathcal{E} = \mathcal{E}_{spinless} \times \mathcal{O}_{\mathbf{s}}\,, \\ \mathcal{E}_{spinless} = \mathbb{R}^{d-1,1} \times B\,, \qquad \mathcal{O}_{\mathbf{s}} = SO(d-1)/[SO(2)]^r\,. \end{gathered} \tag{14}$$

Здесь мы отождествляем d-мерное пространство Минковского с подгруппой трансляций в группе Пуанкаре, а через B обозначили множество бустов (разрешимый фактор в разложении Ивасавы). Множество B может быть естественно параметризованно точками верхней полы ($p_0 > 0$) двуполостного гиперболоида $p_A p^A + m^2 = 0$; d-вектор p может пониматься как импульс релятивисткой частицы, а константа m – как ее масса. Таким образом, $\mathcal{E}_{spinless}$ представляет собой не что иное, как пресимплектическое многообразие массивной бесспиновой частицы со стандартной пресимплектической структурой $dp_A \wedge dx^A$. Множитель $\mathcal{O}_{\mathbf{s}}$ в (14), являющийся регулярной коприсоединенной орбитой $SO(d-1)$, может рассматриваться как фазовое пространство спиновых степеней свободы.

Во **втором разделе** строится явно ковариантная реализация расширенного фазового пространства частицы $\mathcal{E}$. Прежде всего, множитель $\mathcal{E}_{spinless}$, отвечающий пресимплектическому многообразию скалярной частицы, вкладывается в кокасательное расслоение $T^*(\mathbb{R}^{d-1,1})$ пространства Минковского посредством условия массовой оболочки $p_A p^A + m^2 = 0$. Фазовое пространство спиновых степеней свободы $\mathcal{O}_{\mathbf{s}}$ отождествляется с комплексным *многообразием флагов*. Пресимплектическая 2-форма на $\mathcal{E}$ дается выражением

$$\Omega = dp_A \wedge dx^A + d * d\Phi \,, \tag{15}$$

где Φ – явно ковариантный кэлеров потенциал на $\mathcal{O}_{m,\mathbf{s}}$, зависящий от $p \in B$ и $\mathbf{s}$.

Третий раздел посвящен геометрическому квантованию модели свободной спиновой частицы. В соответствии с общей процедурой мы рассматриваем эрмитово линейное расслоение $B \to \mathcal{O}_{m,\mathbf{s}}$ со связностью ∇ и кривизной ω. Стандартные условия преквантования симплектической формы ω, обеспечивающие существование ∇, требуют, чтобы числа s_i принимали (полу)целые значения. Далее, на орбите $\mathcal{O}_{m,\mathbf{s}}$ вводится естественная пуанкаре-инвариантная поляризация $\mathcal{P}$, представляющая собой комбинацию вертикальной поляризации на кокасательном расслоении к массивному гиперболоиду $p^2 + m^2 = 0$ (импульсное представление) и положительно-определенной кэлеровой поляризации на $\mathcal{O}_{\mathbf{s}}$. Используя $\mathcal{P}$, определяется подпространство $\Gamma_{\mathcal{P}}(\mathcal{O}_{m,\mathbf{s}}) \subset \Gamma(\mathcal{O}_{m,\mathbf{s}})$ поляризованных сечений:

$$\Psi \in \Gamma_{\mathcal{P}}(\mathcal{O}_{m,\mathbf{s}}) \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_X \Psi = 0 \,, \quad \forall X \in \mathcal{P} \,. \tag{16}$$

Показывается, что в случае целого спина, после выбора локальной тривиализации, каждое поляризованное сечение представляется комплекснозначной функцией

$$\Psi = \psi(p)_{A(l_1)B(l_2)\cdots C(l_r)} z_1^{A(l_1)} z_2^{B(l_2)} \cdots z_r^{C(l_r)} e^{-\Phi(Z,\overline{Z})} \,, \quad l_i = \sum_{i=1}^{r} s_i \,, \quad A(l) \equiv A_1 \cdots A_l \,, \tag{17}$$

где симметрия индексов тензорного поля ψ описывается диаграммой Юнга с r-строками, а само поле удовлетворяет полному набору релятивистских волновых уравнений

$$(p^2 + m^2)\psi(p)_{A(l_1)B(l_2)\cdots C(l_r)} = 0 \,, \quad p^A \psi(p)_{\dots A \dots} = 0 \,, \quad \eta^{AB} \psi(p)_{\dots A \dots B \dots} = 0 \,. \tag{18}$$

Наконец, в **четвертом разделе** строится минимальное взаимодействие спиновой частицы с внешними гравитационными и электромагнитными полями и анализируются соответствующие уравнения движения. В частности, устанавливается, что при ненулевом тензоре кривизны фоновой метрики мировая линия спиновой частицы отклоняется от соответствующей геодезической на величину порядка постоянной Планка (Zitterbewegung).

ГЛАВА V. Гомологическая механика – гамильтонова версия

В данной главе формулируется процедура деформационного квантования для так называемых *слабо гамильтоновых систем*. Предлагаемая конструкция может рассматриваться как некоторое естественное, но далеко не тривиальное обобщение метода БВФ-БРСТ-квантования на случай негамильтоновых калибровочных теорий общего вида. Возможность такого обобщения вытекает из следующих простых соображений.

Как известно, пространство физических степеней свободы калибровочной теории возникает в результате комбинированного применения двух механизмов редукции: (i) ограничение динамики на поверхность связей и (ii) факторизации поверхности связей по действию калибровочных преобразований. Согласованность операций ограничения и факторизации требует, чтобы генераторы калибровочной симметрии $R_\alpha = R^i_\alpha \partial_i$ сохраняли поверхность связей $T_a = 0$ и задавали на ней интегрируемое распределение. Физические наблюдаемые определяются как функции на фактор-пространстве поверхности связей по действию калибровочных генераторов. Наконец, динамика системы определяется фазовым потоком $\varphi^V_t : M \to M$, сохраняющим как поверхность связей, так и калибровочное распределение. В общем случае, можно считать, что связи T и генераторы R являются не просто наборами скалярных функций и векторных полей на M, а сечениями некоторых векторных расслоений $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2 \otimes TM$, соответственно. Заметим, что данное определение классической калибровочной системы не требует существования на фазовом пространстве M пуассоновой (или даже симплектической) структуры. В то же время результатом квантования калибровочной системы должно являться $*$-произведение, обладающее свойством ассоциативности, вообще говоря, лишь на множестве физических величин, а не на всем пространстве $C^\infty(M)[[\hbar]]$. Можно видеть, что квазиклассическим пределом такого "слабо ассоциативного" $*$-произведения, должна являться скобка Пуассона на M, обладающая тождеством Якоби лишь в пространстве калибровочно инвариантных величин и только на поверхности связей. Аналогичные свойства "слабой пуассоновости" должны иметь место и для фазового потока φ^V_t.

В **первом разделе** показано, что изложенные выше аргументы допускают следующую алгебраическую формализацию. Пусть $\Lambda(M)$ – антипуассонова алгебра поливекторных полей на фазовом пространстве системы M и $J = \langle R, T\rangle$ - антипуассонов идеал в $\Lambda(M)$, порожденный R и T так, что $A \wedge J \subset J$ и $[J, J] \subset J$. Рассмотрим фактор-алгебру $\Lambda_J(M) = \Lambda^J(M)/J$, где $\Lambda^J(M)$ – стабилизатор J в $\Lambda(M)$. Коммутативная подалгебра $\Lambda^0_J(M)$ естественным образом отождествляется с алгеброй физических наблюдаемых, а $\Lambda^1_J(M)$ – с алгеброй Ли векторных полей, задающих однопараметрические автоморфизмы алгебры $\Lambda_J^0(M)$). Наконец, самокоммутирующие элементы из $\Lambda_J^2(M)$, т. е. такие бивекторы π, что $[\pi,\pi]_J=0$, определяют различные пуассоновы структуры на $\Lambda_J^0(M)$. По определению, *слабой пуассоновой структурой* на M (или P_∞*-структурой*) называется любой представитель $P\in\Lambda^2(M)$ бивектора π; в этом случае $[P,J]\subset J$, $[P,P]\in J$. Векторное поле $V\in\Lambda^1(M)$ называется *слабо гамильтоновым* по отношению к P, если оно представляет некоторый пуассонов вектор $u\in\Lambda_J^1(M)$ для π, т. е. $[V,J]\subset J$ и $[V,P]\in J$. Тройка объектов (J,P,V) с указанными выше свойствами называется *слабой гамильтоновой структурой* на M.

Во **втором разделе** для подфактора $\Lambda_J(M)$ антипуассоновой алгебры $\Lambda(M)$ строится свободная резольвента. Для этого в соответствии с общей идеологией БРСТ-теории исходное фазовое пространство M расширяется до тотального пространства $\mathbb{Z}$-градуированного векторного расслоения $\mathcal{M}=\mathcal{E}_1[-1]\oplus\mathcal{E}_2[1]$ (числа в квадратных скобках указывают на ду́ховое число координат слоя); при этом поливекторная алгебра $\Lambda(\mathcal{M})$ естественно изоморфна антипуассоновой алгебре функций $C^\infty(\mathcal{N})$ на нечетном кокасательном расслоении $\mathcal{N}=T^*[1]\mathcal{M}$ относительно канонической антискобки. Производящие уравнения БРСТ-алгебры имеют вид

$$(S,S)=0\,,\qquad (S,U)=0\,,\tag{19}$$

где генераторы S и U подчинены условиям: $\mathrm{gh}(S)=2$, $\mathrm{gh}(U)=1$, $S|_{\mathcal{M}}=0$, $U|_{\mathcal{M}}=0$. На основе стандартной гомологической теории возмущений доказывается, что для каждого регулярного идеала $J=\langle R,T\rangle$ уравнения (19) имеют единственное (с точностью до антиканонического преобразования) решение, удовлетворяющее граничным условиям

$$S=\overset{*}{\eta}{}^aT_a(x)+\overset{*}{x}_iR^i_\alpha(x)c^\alpha+\overset{*}{x}_j\,\overset{*}{x}_iP^{ij}(x)+\cdots\,,\qquad U=V^i(x)\,\overset{*}{x}_i+\cdots\,.$$

Здесь P – слабая пуассонова структура, а V – слабо пуассоново векторное поле на (M,J). Генератор S задает классический БРСТ-дифференциал на алгебре функций: $C^\infty(\mathcal{M})$

$$Qf=(S,f)|_{\mathcal{M}}\,,\qquad \forall f\in C^\infty(\mathcal{M})\,,\tag{20}$$

и, как доказывается, алгебра физических наблюдаемых $\Lambda_J^0(M)$ изоморфна алгебре классических БРСТ-когомологий $\mathcal{H}^0(Q)$ с духовым числом 0.

В **третьем разделе** строится деформационное квантование слабой гамильтоновой структуры (P,V,J). Конструкция основана на применении суперсимметричной версии теоремы формальности Концевича, устанавливающей квазиизоморфизм $\Lambda(\mathcal{M})\rightsquigarrow D(\mathcal{M})$ между алгеброй Схоутена поливекторных полей $\Lambda(\mathcal{M})=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\Lambda^n(\mathcal{M})$ и алгеброй Герштенхабера полидифференциальных операторов $D(\mathcal{M})=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}D^n(\mathcal{M})$. Наличие квазиизоморфизма означает, что по каждому решению (S,U) классических мастер-уравнений (19) может быть построена пара формальных полидифференциальных операторов $\hat{S},\hat{U}\in D(\mathcal{M})[[\hbar]]$, удовлетворяющих квантовым мастер-уравнениям на скобках Герштенхабера

$$[\hat{S},\hat{S}]_{\mathcal{G}}=0\,,\qquad [\hat{S},\hat{U}]_{\mathcal{G}}=0\tag{21}$$

с граничными условиями

$$\hat{S} = m + \hbar F_1(S) + O(\hbar^2)\,, \qquad \hat{U} = \hbar F_1(U) + O(\hbar^2)\,. \tag{22}$$

Здесь $m(f,g) = f\cdot g$ – бинарный оператор поточечного умножения функций из $C^\infty(\mathcal{M})$, а $F_1:\Lambda^n(\mathcal{M})\to D^n(\mathcal{M})$ – естественное вложение, отождествляющее n-вектор с кососимметрическим дифференциальным оператором на n функциях.

Далее показывается, что неоднородный оператор $\hat{S}$ задает на $C^\infty(\mathcal{M})[[\hbar]]$ структуру A_∞-алгебры. С этой целью генераторы $\hat{S}$ и $\hat{U}$ разлагаются в сумму однородных полидифференциальных операторов

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty}\hat{S}^n = \hat{A} + \hat{Q} + \hat{\Pi} + \hat{\Psi} + \cdots\,, \qquad \hat{U} = \sum_{n=0}^{\infty}\hat{U}^n = \hat{A}' + \hat{\Gamma} + \hat{\Xi} + \cdots\,. \tag{23}$$

В общем случае разложения (23) начинаются с 0-местных операторов $A, A' \in C^\infty(\mathcal{M})[[\hbar]]$, т. е. функций с духовыми числами 2 и 1, соответственно. Эти функции аннигилируются классическим БРСТ-дифференциалом (20), а их классы когомологий $[A]\in\mathcal{H}^2(Q)$ и $[A']\in\mathcal{H}^1(Q)$ интерпретируются как квантовые аномалии. В безаномальной ситуации, не ограничивая общности, можно считать, что $A = A' = 0$ (плоская A_∞-структура). Тогда решения (23) мастер-уравнений (19) имеют следующий смысл.

Гомологическое векторное поле Q поднимается до формального дифференциального оператора $\hat{Q}$ с нулевым квадратом. Бидифференциальный оператор $\hat{\Pi}$ задает $*$-произведение

$$f * g = \hat{\Pi}(f,g) = f\cdot g + \frac{i\hbar}{2}\{f,g\} + O(\hbar^2)\,, \tag{24}$$

причем первый порядок по $\hbar$ определяется слабой скобкой Пуассона. Это $*$-произведение обладает свойством *слабой ассоциативности*:

$$\begin{gathered}(f*g)*h - f*(g*h) = \hat{Q}(\hat{\Psi}(f,g,h))\\ +\hat{\Psi}(\hat{Q}(f),g,h) + (-1)^{\epsilon(f)}\hat{\Psi}(f,\hat{Q}(g),h) + (-1)^{\epsilon(f)+\epsilon(g)}\hat{\Psi}(f,g,\hat{Q}(h))\end{gathered} \tag{25}$$

и дифференцируется квантовым БРСТ-оператором:

$$\hat{Q}(f*g) = \hat{Q}(f)*g + (-1)^{\epsilon(f)} f*\hat{Q}(g)\,. \tag{26}$$

Вместе соотношения (25,26) означают, что слабо ассоциативное $*$-произведение в $C^\infty(\mathcal{M})[[\hbar]]$ индуцирует *ассоциативное* $*$-произведение в когомологиях оператора $\hat{Q}$. В частности, квантовые БРСТ-когомологии с нулевым духовым числом образуют замкнутую $*$-подалгебру, отождествляемую с алгеброй квантовых наблюдаемых теории.

Аналогично, из второго уравнения в (21) следует, что оператор $\hat{\Gamma}$ коммутирует с $\hat{Q}$ и дифференцирует $*$-произведение с точностью до гомотопии:

$$\hat{\Gamma}(f*g) - (\hat{\Gamma}f)*g - f*(\hat{\Gamma}g) = \hat{Q}(\hat{\Xi}(f,g)) + \hat{\Xi}(\hat{Q}(f),g) + (-1)^{\epsilon(f)}\hat{\Xi}(f,\hat{Q}(g))\,. \tag{27}$$

Вследствие этого $\hat{\Gamma}$ индуцирует дифференцирование в $*$-алгебре физических наблюдаемых. Квантовые уравнения движения системы принимают вид

$$\dot{O} = \hat{\Gamma} O\,,$$

где O – коцикл, представляющий квантовую БРСТ-наблюдаемую $[O] \in \mathcal{H}^0(\hat{Q})$.

В **четвертом разделе** на основе метода Александрова-Концевича-Шварца-Заборонского строится двумерная топологическая сигма-модель и показывается, что $*$-произведение физических наблюдаемых исходной теории соответствует некоторым специальным корреляторам граничных наблюдаемых топологической сигма-модели. Данная конструкция обобщает на случай P_∞-структур известный подход Катанео-Фельдера к построению ассоциативных $*$-произведений путем квантования пуассоновой сигма-модели.

ГЛАВА VI. Гомологическая механика – лагранжева версия

В данной главе рассматривается лагранжев аналог изложенной выше конструкции деформационного квантования невариационных динамических систем. Термин "лагранжев" указывает на то, что здесь мы работаем в терминах конфигурационного пространства траекторий, а не фазового пространства состояний системы. При таком способе описания физическое время (как параметр эволюции) перестает играть выделенную роль среди прочих пространственно-временных координат, что дает некоторое преимущество при работе с теориями, обладающими общекоординатной инвариантностью. Таким образом, исходным объектом является пространство Y^X гладких отображений $x : X \to Y$ конечномерного многообразия X в некоторое конечномерное или бесконечномерное многообразие Y. В контексте локальной теории поля конфигурационное пространство полей Y^X обычно называется *пространством историй*, а *истинные истории* определяются как решения некоторой системы дифференциальных уравнений

$$T_a(x^i) = 0\,. \tag{28}$$

Поскольку уравнения поля (28) не предполагаются лагранжевыми, супериндексы i и a, нумерующие поля и уравнения движения, могут быть никак не связаны друг с другом. Уравнения $T = \{T_a(x)\}$ трактуются как сечение некоторого векторного расслоения $\mathcal{E} \to M$ над подпространством всех полей $M \subset Y^X$ с заданными граничными условиями. При такой интерпретации множество всех истинных историй Σ, принадлежащих M, отождествляется с нулями сечения: $\Sigma = \{x \in M|\ T(x) = 0\ \}$. Поверхность Σ называется *массовой оболочкой*, а векторное расслоение $\mathcal{E}$ – *расслоением динамик.*

Во избежание патологических примеров динамических систем на уравнения (28) накладываются условия регулярности. По определению, набор $(\mathcal{E}, T)$ задает *регулярную калибровочную систему типа* (m, n), если $\Sigma \neq \emptyset$ и существует такая последовательность векторных расслоений $\mathcal{E}_k \to M$ и их морфизмов

$$0 \to \mathcal{E}_{-m} \to \cdots \to \mathcal{E}_{-1} \xrightarrow{R} TM \xrightarrow{J} \mathcal{E} \xrightarrow{Z} \mathcal{E}_1 \to \cdots \to \mathcal{E}_n \to 0\,, \tag{29}$$

что выполняются следующие условия:

1) существует такая открытая окрестность U массовой оболочки Σ, что при ограничении на U все морфизмы (29) имеют постоянный ранг;

2) будучи ограниченной на Σ, последовательность (29) становится точной.

Здесь $J = \nabla T$ – матрица Якоби уравнений движения, построенная по любой связности ∇ в расслоении $\mathcal{E}$. Сечения R и Z интерпретируются как генераторы калибровочной симметрии и тождеств Нетер соответственно, а остальные гомоморфизмы в (29) отвечают генераторам m-кратной (n-кратной) приводимости калибровочных симметрий (тождеств Нетер). Отметим, что для нелагранжевых калибровочных теорий известная теорема Нетер, устанавливающая равенство между числом калибровочных симметрий и тождеств, уже не верна. Например, в разделе 6 настоящей главы рассматриваются примеры квантования калибровочно инвариантных теорий с линейно независимыми уравнениями движения и, наоборот, – зависимых уравнений движения без калибровочных симметрий.

Пусть задана регулярная калибровочная система $(\mathcal{E}, T)$. Под *лагранжевой структурой*, согласованной с $(\mathcal{E}, T)$, понимается всякое $\mathbb{R}$-линейное дифференцирование $d_{\mathcal{E}} : \Gamma(\wedge^n \mathcal{E}) \to \Gamma(\wedge^{n+1}\mathcal{E})$ степени 1, удовлетворяющее условию $d_{\mathcal{E}} T = 0$. (При этом полагается, что $\Gamma(\wedge^0\mathcal{E}) = C^\infty(M)$.) Из данного определения непосредственно следует, что оператор $d_{\mathcal{E}}$ определяет морфизм векторных расслоений $V : \mathcal{E}^* \to TM$. Соответствующее сечение $V \in \Gamma(\mathcal{E} \otimes TM)$ называется *лагранжевым якорем.*

Вводятся понятия регулярности и полноты лагранжевой структуры. Лагранжева структура $(\mathcal{E}, T, d_{\mathcal{E}})$ называется *регулярной* в точке $p \in M$, если существует окрестность $U \subset M$ точки p, при ограничении на которую морфизм

$$R \oplus V : \mathcal{E}_{-1} \oplus \mathcal{E}^* \to TM \tag{30}$$

имеет постоянный ранг r. Число r, когда определено, называется рангом лагранжевой структуры в точке r. Лагранжева структура называется *полной* в точке $p \in M$, если ограничение отображения (30) в p сюръективно. Используя данные понятия, формулируется следующая теорема о локальной структуре регулярной калибровочной динамики.

Теорема (о расщеплении [27]). *Для каждой регулярной точки $p \in M$ лагранжевой структуры $(\mathcal{E}, T, d_{\mathcal{E}})$ существуют такие локальные координаты $(y^1, ..., y^r, z^1, ..., z^k)$ с центром в p и такой набор локальных функций $S(y)$, $E^1(y), ..., E^k(y)$, что уравнения движения $T_a(y, z) = 0$ эквивалентны системе*

$$\frac{\partial S(y)}{\partial y^I} = 0\,, \qquad z^J = E^J(y)\,,$$

при этом лагранжев якорь $V = (V^J, V_I)$ задается следующим векторным распределением:

$$V^J = 0\,, \qquad V_I = \frac{\partial}{\partial y^I} + \frac{\partial E^J}{\partial y^I}\frac{\partial}{\partial z^J}\,.$$

Здесь число r – ранг лагранжевой структуры в точке $p \in M$.

Таким образом, имеется взаимооднозначное соответствие между лагранжевыми калибровочными системами и полными лагранжевыми структурами. В общем случае, когда $r < \dim M$, функционал $S(y)$ называется *частичным действием.*

В *секции 1.4.* обсуждается связь лагранжевой структуры с S_∞-алгеброй, ассоциированной с коммутативной алгеброй функций на тотальном пространстве $\mathbb{Z}$-градуированного векторного расслоения $\mathcal{L} = (\oplus_{k=1}^m \mathcal{E}_{-k}[k]) \oplus \mathcal{E}[-1] \oplus (\oplus_{k=1}^n \mathcal{E}_k[-k-1])$. В следующем **разделе 2** строится явное БРСТ-описание S_∞-алгебры для калибровочных систем типа $(1,1)$, ассоциирующихся с 4-членной последовательностью (29)

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{R} TM \xrightarrow{J} \mathcal{E} \xrightarrow{Z} \mathcal{G} \to 0\,,$$

где, как и выше, M – пространство историй, $\mathcal{E}$ – расслоение динамик, а $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – расслоения (неприводимых) калибровочных симметрий и тождеств Нетер соответственно. Пространство $\mathcal{L}$ расширяется до кокасательного расслоения $\mathcal{N} = T^*\mathcal{L}$, на котором вводится каноническая скобка Пуассона $\{-,-\}$ и классический БРСТ-заряд Ω. По определению, Ω есть нечетный элемент пуассоновой алгебры $C^\infty(\mathcal{N})$, удовлетворяющий следующим требованиям:

1) $\mathrm{gh}(\Omega) = 1$, $\Omega|_{\mathcal{L}} = 0$;

2) $\Omega = \bar{\eta}^a T_a + c^\alpha R^i_\alpha \bar{x}_i + \bar{\xi}^A Z^a_A \eta_a + \bar{\eta}^a V^i_a \bar{x}_i + \cdots$;

3) $\{\Omega, \Omega\} = 0$.

Здесь x^i – локальные координаты на M, c^α, η_a, и ξ^A – линейные координаты на слоях $\mathcal{F}[1]$, $\mathcal{E}[-1]$ и $\mathcal{G}[-2]$ соответственно, а черта над переменной означает канонически сопряженный импульс. Точками в (2) обозначены слагаемые, как минимум, линейные по η_a и $\bar{c}_\alpha$ или квадратичные по $\bar{x}_i$. Существование Ω доказывается стандартными методами гомологической теории возмущений. Уравнение (3) известно как (классическое) мастер-уравнение. Его выполнение эквивалентно выполнению цепочки обобщенных тождеств Якоби для плоской S_∞-структуры, ассоциированной с высшими (производными) антискобками:

$$S_n(a_1, ..., a_n) = \{\cdots\{\{\Omega, a_1\}, a_2\}, \cdots, a_n\}\,, \qquad a_k \in C^\infty(\mathcal{L})\,, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Секция 2.4. посвящена гамильтоновой интерпретации БРСТ-комплекса $(C^\infty(\mathcal{N}), \Omega)$. А именно: показывается, что каждая лагранжева структура определяет лагранжево подмногообразие $L \subset T^*M$ в кокасательном расслоении к пространству траекторий системы (фазовом пространстве полей и источников) как поверхность (приводимых) связей первого рода

$$\widetilde{T}_a(x, \bar{x}) = T_a(x) + V^i_a(x)\bar{x}_i + O(\bar{x}^2) \approx 0\,, \qquad \widetilde{R}_\alpha(x, \bar{x}) = R^i_\alpha(x)\bar{x}_i + O(\bar{x}^2) \approx 0\,.$$

Заметим, что связи $\Theta_I = (\widetilde{T}_a, \widetilde{R}_\alpha)$ могут рассматриваться как формальная деформация гамильтоновых связей, задающихся ведущими членами разложений, “в направлении” лагранжевого якоря V. Это наблюдение позволяет интерпретировать лагранжеву структуру как формальную деформацию “затравочного” лагранжева подмногообразия $L_0 \subset T^*M$, выделяемого уравнениями $T_a(x) = 0$ и $R^i_\alpha(x)\bar{x}_i = 0$. Соответствующее гамильтоново действие

$$S_H[\lambda, x, \bar{x}] = \int_{t_1}^{t_2} dt(\bar{x}_i \dot{x}^i - \lambda^I \Theta_I(x, \bar{x})) \tag{31}$$

может интерпретироваться как действие топологической сигма-модели на $(d+1)$-мерном пространстве $X \times \mathbb{R}$. Показывается, что при нулевых граничных условиях на импульсы $\bar{x}_i(t_1) = \bar{x}_i(t_2) = 0$, классическая динамика (лагранжевой) топологической модели (31) эквивалентна исходной (не)лагранжевой динамике с уравнениями $T_a(x) = 0$.

В **третьем разделе** проводится каноническое квантование классического БРСТ-комплекса $(\Omega, C^\infty(\mathcal{N}))$. С использованием нормальных символов операторов на кокасательном расслоении $\mathcal{N} = T^*\mathcal{L}$ классическому БРСТ-заряду Ω сопоставляется эрмитов оператор $\hat{\Omega}$, удовлетворяющий квантовому мастер-уравнению $\hat{\Omega}^2 = 0$. Квантовая алгебра физических наблюдаемых и пространство физических состояний определяются как соответствующие БРСТ-когомологии с духовым числом 0, так что в отсутствие аномалий вся физическая динамика описывается в терминах $H^0_{\mathrm{op}}(\hat{\Omega})$-модуля $H^0_{\mathrm{st}}(\hat{\Omega})$.

Поскольку эффективная гамильтонова теория со связями (31) является чисто топологической, пространство $H^0_{\mathrm{st}}(\hat{\Omega})$ по существу одномерно и натягивается на единственное (с точностью до БРСТ-границы) физическое состояние $|\Phi\rangle$, удовлетворяющее уравнению

$$\hat{\Omega}|\Phi\rangle = 0\,. \tag{32}$$

Взятое в координатном представлении, это состояние имеет смысл *амплитуды вероятности* на расширенном пространстве траекторий системы $\mathcal{L}$. Соответственно, уравнение (32) интерпретируется как *обобщенное уравнение Швингера-Дайсона*. Показывается, что в случае обычной калибровочной теории с (мастер-)действием S это уравнение приводит к фейнмановской амплитуде вероятности $\Phi = e^{\frac{i}{\hbar}S}$, а для теории с нулевым лагранжевым якорем – к классической амплитуде Гоци $\Phi = \delta(T_a)$. Квантовое среднее по траекториям для физической величины $[\hat{\mathcal{O}}] \in H^0_{\mathrm{op}}(\hat{\Omega})$ определеятся теперь обычной квантово-механической формулой

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\langle \Phi|\hat{\mathcal{O}}|\Phi\rangle_K}{\langle \Phi|\Phi\rangle_K}\,, \tag{33}$$

где $\langle \Psi_1|\Psi_2\rangle_K \equiv \langle \Psi_1|e^{\frac{i}{\hbar}[\hat{\Omega},\hat{K}]}|\Psi_2\rangle$ – регуляризованное скалярное произведение в пространстве физических состояний, ассоциированное с калибровочным фермионом K.

Рассматривая регуляризующий фактор $e^{\frac{i}{\hbar}[\hat{\Omega},\hat{K}]}$ как оператор эволюции, отвечающий БРСТ-тривиальному гамильтониану $\hat{H} = [\hat{\Omega}, \hat{K}]$, в *секции 3.2* выводится следующее интегральное представление для квантовых средних (33):

$$\langle \mathcal{O} \rangle = (\mathrm{const}) \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\bar{\varphi}\, O(\varphi(1)) \exp \frac{i}{\hbar} \int_0^1 dt (\bar{\varphi}_I \dot{\varphi}^I - \{\Omega, K\})\,, \tag{34}$$

где $(\varphi^I,\ \bar{\varphi}_I)$ – пары канонически сопряженных координат на $\mathcal{N} = T^*\mathcal{L}$ и интегрирование ведется по всем траекториям с гранусловиями $\bar{\varphi}_I(0) = \bar{\varphi}_I(1) = 0$.

В **четвертом разделе** проводится детальное сравнение предложенного метода квантования нелагранжевых калибровочных теорий с классическим методом Баталина-Вилковыского.

Пятый раздел посвящен выводу альтернативного интегрального представления для амплитуды вероятности и квантовых средних физических величин нелагранжевой теории в терминах некоторой лагранжевой модели на исходном пространстве X, но с расширенным (огментированным) спектром полей. В качестве конфигурационного пространства огментированной теории берется тотальное пространство векторного расслоения $\mathcal{E}^* \to M$ (дуального к расслоению динамик $\mathcal{E}$). В результате проведения процедуры огментации исходная (нелагранжева) динамика на M продолжается в $\mathcal{E}^*$ так, что полная система является уже лагранжевой. Функционал действия огментированной теории имеет следующую структуру:

$$S_{\mathrm{aug}}(x,y) = y^a T_a(x) + y^a y^b G_{ab}(x) + O(y^3)\,. \tag{35}$$

Здесь y – поля огментации, а $G_{ab} = V^i_a \partial_i T_b - V^i_b \partial_i T_a$ – обобщенная матрица Ван Флека, отвечающая классическим уравнениям движения $T_a(x) = 0$ и лагранжевому якорю V. С использованием стандартной техники гомологической теории возмущений выводятся явные рекуррентные формулы для вычисления S_{aug} в любом порядке по y. Показывается, что для локальных уравнений движения и локального лагранжевого якоря действие огментированной теории $S_{\mathrm{aug}}(x,y)$ является локальным функционалом полей. Процедура огментации устроена так, что континуальный интеграл, отвечающий усреднению фейнмановской амплитуды $\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}S_{\mathrm{aug}}}$ по слоям векторного расслоения $\mathcal{E}^*$, определяет амплитуду вероятности исходной нелагранжевой теории на M. А именно,

$$\Phi(x) = \int Dy e^{\frac{i}{\hbar}S_{\mathrm{aug}}(x,y)} \quad \Rightarrow \quad \langle \mathcal{O} \rangle = \int DxDyO(x) e^{\frac{i}{\hbar}S_{\mathrm{aug}}(x,y)}\,,$$

где интеграл берется по всем y, удовлетворяющим нулевым гранусловиям.

Шестой раздел посвящен приложениям развитой выше техники квантования к ряду актуальных нелагранжевых моделей теории поля: максвелловской электродинамике с монополями, киральным бозонам в размерностях $d = 4n+2$, уравнениям Дональдсона-Уленбек-Яу. Во всех случаях найдены явно ковариантные локальные лагранжевы структуры и определены континуальные интегралы для квантовых средних физических величин. В частности, установлена взаимосвязь между огментированой теорией Дональдсона-Уленбек-Яу и калиброванными G/G ВЗВ-моделями на кэлеровых многообразиях.

ГЛАВА VII. Характеристические классы калибровочных систем

Глава посвящена определению, построению и классификации характеристических классов калибровочных систем. С чисто математической точки зрения каждая классическая калибровочная система определяется заданием некоторого супермногообразия M, оснащенного гомологическим векторным полем Q, т. е. нечетным векторным полем, удовлетворяющим условию интегрируемости $Q^2 = 0$. Наличие гомологического векторного поля наделяет пространство гладких тензорных полей на M структурой дифференциальной ассоциативной алгебры, в которой роль оператора кограницы δ играет производная Ли вдоль гомологического векторного поля Q. Пусть ∇ – некоторая симметричная связность (ковариантная производная) на M. *Характеристические классы Q-многообразия* определяются как классы когомологий универсальных δ-коциклов, строящиеся в терминах гомологического векторного поля, тензора кривизны связности и их ковариантных производных до некоторого конечного порядка. Термин "универсальный" подчеркивает то обстоятельство, что δ-замкнутость универсального коцикла является следствием одного лишь условия интегрируемости и не апеллирует к конкретной структуре гомологического векторного поля.

В **первом разделе** дается определение характеристических классов Q-многообразий, приводятся некоторые примеры Q-многообразий и универсальных коциклов, а также доказывается теорема о независимости харклассов от выбора симметричной связности.

Во **втором разделе** вводится понятие внутренних характеристических классов. По определению, характеристический класс называется внутренним, если он не обращается тождественно в нуль на плоском Q-многообразии. Дополнение к множеству внутренних харклассов назовем пространством исчезающих харклассов. В отличие от исчезающих харклассов, внутренние характеристические классы в большей степени отражают аналитическую структуру гомологического векторного поля Q нежели топологическую структуру супермногообразия M. Простейшими примерами внутренних универсальных коциклов являются тензорные степени гомологического векторного поля $Q^{\otimes n}$. Обозначим через $H_Q^{\mathrm{int}}(M)$ тензорную алгебру внутренних харклассов. По определению, $H_Q^{\mathrm{int}}(M)$ есть фактор-алгебра тензорной алгебры всех харклассов по подалгебре исчезающих харклассов. Центральным результатом данного раздела является следующая классификационная теорема.

Теорема. *Пусть M – плоское Q-многообразие. Тогда алгебра $H_Q^{\mathrm{int}}(M)$ свободно порождается характеристическими классами A-, B- и C-серий, а также классом δ-когомологии $[Q]$ самого гомологического векторного поля, с помощью трех операций:*

1) *образование линейных комбинаций с постоянными коэффициентами,*
2) *тензорного умножения,*
3) *перестановки индексов тензорных коциклов.*

Упомянутые в теореме три бесконечные серии характеристических классов имеют следующее простое описание.

A-серия. Пусть $\Lambda = \nabla Q$ – нечетное тензорное поле типа $(1,1)$, задающееся первыми ковариантными производными гомологического векторного поля. Универсальные коциклы A-серии суть Q-инвариантные функции вида

$$C^{\infty}(M) \ni A_n = \mathrm{Str}(\Lambda^{2n-1})\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,, \tag{36}$$

где под знаком суперследа стоят матричные степени эндоморфизма Λ.

B-серия. Универсальные коциклы B-серии являются тензорными полями типа $(1, n+1)$. Будем интерпретировать n-й член серии B_n как n-форму на TM со значением в эндоморфизмах касательного расслоения. Тогда для любого набора векторных полей $X_1, ..., X_n$ полагаем:

$$\mathrm{End}(TM) \ni B_n(X_1, ..., X_n) = \nabla_{X_1}\Lambda \cdot \nabla_{X_2}\Lambda \cdots \nabla_{X_n}\Lambda\,. \qquad (37)$$

Здесь, как и выше, точка означает матричное умножение эндоморфизмов $\nabla_X\Lambda$.

C-серия. Эта серия получается из серии B взятием суперследа эндомрфизмов $B_n(X_1, ..., X_n)$, а именно:

$$C_n(X_1, ..., X_n) = \mathrm{Str}(\nabla_{X_1}\Lambda \cdot \nabla_{X_2}\Lambda \cdots \nabla_{X_n}\Lambda)\,. \qquad (38)$$

Таким образом, универсальный коцикл C_n является ковариантным тензором ранга n.

Далее ставится задача о распространении данного результата на произвольные (не обязательно плоские) Q-многообразия. Совершенно элементарно это удается сделать для характеристических классов B и C серий. Показывается, что $(1,2)$-тензор $\Omega \in \Lambda(M) \otimes \mathrm{End}(TM)$, определенный по правилу $\Omega_X = \nabla_X\Lambda + R_{QX}$, где $R_{QX} = [\nabla_Q, \nabla_X] \in \mathrm{End}(TM)$ – тензор кривизны симметричной связности ∇, является δ-коциклом для всех ∇. Поэтому внутренние универсальные коциклы, отвечающие B- и C-сериям и произвольной связности ∇, получаются из (37) и (38) путем простой замены $\nabla_X\Lambda \mapsto \Omega_X$. В отношении характеристических классов A-серии показано, что возможность их продолжения на неплоское Q-многообразие накладывает на последнее некоторые топологические ограничения. А именно: для существования харкласса A_n требуется, чтобы n-й характер Понтрягина касательного расслоения TM равнялся нулю. При сделанном предположении функция (36) может быть всегда достроена высшими поправками по тензору кривизны до некоторого δ-коцикла.

Третий раздел посвящен интерпретации некоторых из построенных харклассов как препятствий к разрешимости квантовых мастер-уравнений в лагранжевом БВ- и операторном БВФ-БРСТ-формализмах. Показывается, что класс A_1 (модулярный класс калибровочной теории) отвечает за однопетлевые аномалии в методе БВ-квантования, в то время как класс C_2 вносит основной вклад в двухпетлевые аномалии в методе БВФ-БРСТ. Приводится пример калибровочного слоения с нетривиальным модулярным классом.

В **Заключении** кратко сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Приложение А содержит описание пертурбативной процедуры построения координат Морса в окрестности невырожденной критической точки функции.

Приложение В содержит вывод асимптотического разложения по параметру регуляризации для производящего интеграла расходимостей в моделях p-бран с самодействием.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Построено виковское обобщение деформационного квантования Федосова для кэлеровых и паракэлеровых многообразий общего вида. Установлены явные когомологические препятствия к существованию глобальной эквивалентности между виковским и вейлевским квантованиями. В случае гамильтоновых систем со связями установлены

эффективные критерии, которым должны удовлетворять связи второго рода, чтобы редуцированное фазовое пространство обладало кэлеровой поляризацией, согласованной с поляризацией объемлющего фазового пространства.

В контексте этой же проблематики поставлен и решен вопрос о существовании виковской структуры для гамильтоновых систем на кокасательных расслоениях к римановым многообразиям. Показано, что такая структура всегда может быть построена исходя из римановой метрики на конфигурационном пространстве в классе наблюдаемых аналитичных по импульсам. Указан конкретный сценарий приложения данной конструкции к проблеме непертурбативного виковского квантования нелинейных сигма-моделей.

2. На основе развитой схемы виковского квантования построена модель бозонной струны с некоммутативной геометрией мирового листа, являющаяся полевым аналогом матричной IKKT-модели. Показано, что наличие некоммутативности эквивалентно включению взаимодействия бозонной струны с бесконечным мультиплетом фоновых полей, согласованных с условиями W_∞-симметрии. Для случая некоммутативной струны в четырехмерном евклидовом пространстве найдены явные решения уравнений движения, являющиеся струнными аналогами инстантонных решений в теории Янга-Миллса.

3. Разработан общий ковариантный метод регуляризации и перенормировки силы реакции излучения в линейных и нелинейных моделях теории поля с сингулярными источниками. В случае линейных моделей найдены явные выражения для членов асимптотического ряда, задающего силу самодействия источников. Доказана лагранжевость его сингулярной части в случае регулярного вложения мировой поверхности источника в объемлющее пространство Минковского. Для нелинейных моделей разработана пертурбативная процедура вычисления членов асимптотического ряда и установлена структура ведущих расходимостей.

   Введено понятие классически перенормируемой теории поля с сингулярными источниками, аналогичное понятию перенормируемости в квантовой теории поля. Доказана классическая перенормируемость линейных моделей и установлены общие критерии классической перенормируемости в терминах размерностей констант связи теории. Изучен ряд конкретных моделей минимального и неминимального взаимодействия p-бран с калибровочными полями $(p+1)$-форм, скалярным полем и полем линеаризованной гравитации и получены явные соотношения на размерности и константы связи теории, обеспечивающие взаимное сокращение расходимостей.

   На основе развитой техники регуляризации и перенормировки выведены эффективные уравнения движения для массивной заряженной частицы в пространстве-времени произвольной размерности, являющиеся многомерными обобщениями уравнения Лоренца-Дирака, а также получены эффективные уравнения движения для безмассовой заряженной частицы в четырехмерном пространстве Минковского.

4. В рамках общего геометрического подхода Кириллова-Костанта-Сурье предложена классическая модель массивной спиновой частицы в пространстве-времени произвольной размерности, допускающая непротиворечивое взаимодействие с произвольными внешними электромагнитными и гравитационными полями. Проведено геометрическое квантование модели и показано, что в зависимости от выбора свободных параметров, соответствующая квантовая теория описывает неприводимое унитарное представление группы Пуанкаре произвольного фиксированного спина.

5. Сформулирована процедура БРСТ-квантования квазисимплектических многообразий, ассоциированных с алгеброидами Ли. Показано, что предложенная процедура может быть также использована для квантования треугольных биалгебр Ли.

   Сформулирована БРСТ-подобная производящая процедура для иерархии дифференциально геометрических структур, обобщающих классическое уравнение Янга-Бакстера на случай n-кратно приводимых алгеброидов Ли, согласованных с невырожденной r-матрицей. В частности, установлено взаимооднозначное соответствие между категорией симплектических 2-алгеброидов Ли и расслоениями антипуассоновых алгебр с абелевой связностью Федосова.

6. Разработана БРСТ-теория негамильтоновых калибровочных систем со связями, являющаяся обобщением стандартной схемы БВФ-БРСТ-квантования. Под негамильтоновыми калибровочными теориями со связями понимаются динамические системы в фазовом пространстве, физические степени свободы которых получаются ограничением на поверхность связей и последующей факторизацией по действию калибровочных преобразований; при этом не предполагается, что соответствующий фазовый поток, задающий эволюцию системы и согласованный с редукцией, может быть получен на основе принципа наименьшего действия. Для такого рода систем введено понятие слабой гамильтоновой структуры и построены производящие уравнения БРСТ-алгебры. В случае, когда исходное фазовое пространство снабжено слабой пуассоновой структурой (бивекторным полем, индуцирующим скобку Пуассона в пространстве физических величин), построено деформационное квантование системы на основе теоремы формальности Концевича и дана его сигма-модельная интерпретация.

7. Предложено обобщение стандартной схемы БВ-квантования на случай нелагранжевых калибровочных систем общего вида. Ключевым элементом конструкции является введенное впервые понятие лагранжевой структуры, которая может рассматриваться либо как “сильно гомотопическое” обобщение стандартной БВ-алгебры, либо как нечетный аналог слабых скобок Пуассона. Задание лагранжевой структуры позволяет сформулировать обобщенное уравнение Швингера-Дайсона на квантовую амплитуду вероятности теории или производящий функционал функций Грина.

Показано, что квантовая амплитуда вероятности на пространстве траекторий нелагранжевой системы допускает два эквивалентных представления в терминах континуального интеграла для некоторой вспомогательной теории. В основе первого подхода лежит идея конверсии исходной нелагранжевой динамики в d-мерном пространстве-времени в эквивалентную ей лагранжеву топологическую теорию в $d+1$. Применение затем стандартных процедур БРСТ-квантования к топологической сигма-модели индуцирует квантование исходной (нелагранжевой) теории. Второй подход, названный методом огментации, основан на специальном вложении исходной нелагранжевой динамики в некоторую более широкую лагранжеву теорию в том же пространстве-времени. Доказано, что усреднение фейнмановской амплитуды вероятности огментированной теории по всем вспомогательным полям дает решение обобщенного уравнения Швингера-Дайсона для амплитуды вероятности исходной нелагранжевой теории.

8. Проведено ковариантное квантование ряда актуальных нелагранжевых моделей теории поля: масквелловской электродинамики с монополями, киральных бозонов в размерностях $d = 4n + 2$, уравнений Дональдсона-Уленбек-Яу. Во всех случаях указаны явно ковариантные локальные лагранжевы структуры и определены континуальные интегралы для вычисления квантовых средних. В частности, с использованием техники огментации установлена взаимосвязь между квантовой теорией Дональдсона-Уленбек-Яу и многомерными аналогами калиброванной G/G-модели Весса-Зумино-Виттена на кэлеровых многообразиях.

9. Исходя из геометрической трактовки классического БРСТ-дифференциала как гомологического векторного поля на (анти)симплектическом супермногообразии, разработана теория характеристических классов калибровочных систем. Характеристические классы определяются как глобальные геометрические инварианты калибровочной динамики и строятся в терминах самого гомологического векторного поля. Построены три бесконечные серии характеристических классов, вовлекающие первые и вторые ковариантные производные гомологического векторного поля, и сформулирована общая классификационная теорема. Установлена связь между простейшими характеристическими классами с духовыми числами 1 и 2 и квантовыми аномалиями в методах БВ- и БВФ-БРСТ-квантований.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ

1. Lyakhovich S.L., Segal A.Yu., Sharapov A.A. A Universal Model of D=4 Spinning Particle // Phys. Rev. D. - 1996. - V.54. - P.5223-5250.

2. Kuzenko S.M., Lyakhovich S.L., Segal A.Yu., Sharapov A.A. Spinning Particle in Anti-de Sitter Space // In "Topics in Quantum Field Theory: Modern Methods in Fundamental

Physics" / Edt. D. H. Tchrakian. - World Scientific Publishing Co., 1995. - P.183-194.

3. Kuzenko S.M., Lyakhovich S.L., Segal A.Yu., Sharapov A.A. Massive Spinning Particle on Anti-de Sitter Space // Int. J. Mod. Phys. A. - 1996. - V.11. - P.3307-3329.
4. Segal A.Yu., Sharapov A.A. Coherent (spin-)tensor fields on D=4 anti-de Sitter space // Class. Quantum Grav. - 1999. - V.16. - P.1-14.
5. Lyakhovich S.L., Sharapov A.A., Shekhter K.M. D=6 massive spinning particle // Mod. Phys. Lett. A. - 1996. - V.11. - P.3011-3020.
6. Lyakhovich S.L., Sharapov A.A., Shekhter K.M. Spinning Particle in Six Dimensions // J. Math. Phys. - 1997. - V.38. - P.4086-4103.
7. Lyakhovich S.L., Sharapov A.A., Shekhter K.M. Massive spinning particle in any dimension. (I) Integer spins // Nucl. Phys. B. - 1999. - V.537. - P.640-652.
8. Lyakhovich S.L., Sharapov A.A., Shekhter K.M. A uniform model of the massive spinning particle in any dimension // Int. J. Mod. Phys. A. - 2000. - V.15. - P.4287-4299.
9. Dolgushev V.A., Lyakhovich S.L., Sharapov A.A. Wick quantisation of a symplectic manifold // Nucl. Phys. (Proc. Supp.). - 2001. - V.101&102. - P.144-149.
10. Dolgushev V.A., Lyakhovich S.L., Sharapov A.A. Wick-type deformation quantization of Fedosov manifolds // Nucl. Phys. B. - 2001. - V.606. - P.647-672.
11. Lyakhovich S.L., Sharapov A.A. Kahler polarization and Wick quantization of Hamiltonian systems subject to second class constraints // Mod. Phys. Lett.A. - 2002. - V.17. - P.121-129.
12. Gorbunov I.V., Lyakhovich S.L., Sharapov A.A. Wick quantization of cotangent bundles over Riemannian manifolds // J. Geom. and Phys. - 2005. - V.53. - P.98-121.
13. Gorbunov I.V., Sharapov A.A. String with noncommutative world-sheet and stringy instantons // Phys. Lett. B. - 2002. - V.531. - P.255-262.
14. Gorbunov I.V., Sharapov A.A. Bosonic string with noncommutative geometry of worldsheet: deformation quantization approach // Gravity and Cosmology. - 2003. - V.9. - N 1,2. - P.30-32.
15. Dolgushev V.A., Isaev A.P., Lyakhovich S.L., Sharapov A.A. On the Fedosov Deformation Quantization Beyond the Regular Poisson Manifolds // Nucl. Phys. B. - 2002. - V.645. - P.457-476.
16. Dolgushev V.A., Isaev A.P., Lyakhovich S.L., Sharapov A.A. Quantization of triangular Lie bialgebras // Chechoslovak Jornal of Physics. - 2002. - V.52. - P.1195-1200.
17. Lyakhovich S.L., Sharapov A.A. BRST quantization of quasisymplectic manifolds and beyond // J. Math. Phys. - 2006. - V.47. - P.043508 (26 p.).

18. Шарапов А.А. Лекции по деформационному квантованию // Лекционные заметки по теоретической и математической физике/ Под ред. проф. А.В. Аминовой, Т.7. - Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2006. - С. 173-268.

19. Kazinski P.O., Lyakhovich S.L., Sharapov A.A. Radiation reaction and renormalization in classical electrodynamics of point particle in any dimension // Phys. Rev. D. - 2002. - V.66. - P.025017 (9 p.).

20. Kazinski P.O., Sharapov A.A. Radiation reaction for a massless charged particle // Class. Quantum Grav. - 2003. - V.20. - P.2715-2725.

21. Казинский П.О., Шарапов А.А. Реакция излучения и перенормировка в теории протяженных релятивистских объектов // Новейшие проблемы теории поля / Под ред. А.В. Аминовой. - Казань, 2004. - Т.4. - С.117-140.

22. Казинский П.О., Шарапов А.А. Реакция излучения и перенормировка в классической теории поля с сингулярными источниками // ТМФ. - 2005. - Т.143. - N 8. - С.375-400.

23. Kupriyanov V.G., Lyakhovich S.L., Sharapov A.A. Deformation quantization of linear dissipative systems // J. Phys. A: Math. Gen. - 2005. - V.38. - P.8039-8051.

24. Lyakhovich S.L., Sharapov A.A. Characteristic classes of gauge systems // Nucl. Phys. B. - 2004. - V.703. - P.419-453.

25. Ляхович С.Л., Мосман Е.А., Шарапов А.А. О характеристических классах Q-многообразий // Функциональный анализ и его приложения. - 2008. - Т.42. - N 1. - С.82-85.

26. Lyakhovich S.L., Sharapov A.A. BRST theory without Hamiltonian and Lagrangian // JHEP. - 2005. - V.03. - N 011 (21 p.).

27. Kazinski P.O., Lyakhovich S.L., Sharapov A.A. Lagrange Structure and Quantization // JHEP. - 2005. - V.07. - N 076 (39 p.).

28. Lyakhovich S.L., Sharapov A.A. Schwinger-Dyson equation for non-Lagrangian field theory // JHEP. - 2006. - V.02. - N 007 (41 p.).

29. Lyakhovich S.L., Sharapov A.A. Quantizing non-Lagrangian gauge theories: an augmentation method // JHEP. - 2007. - V.01. - N 047 (39 p.).

30. Lyakhovich S.L., Sharapov A.A. Quantization of Donaldson-Uhlenbeck-Yau Theory // Phys. Lett. B. - 2007. - V. 656. - P. 265-271.