На правах рукописи

Домбровский Дмитрий Владимирович

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ НА НЕСТАЦИОНАРНОМ ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ С УЧЕТОМ ТРАНЗАКЦИОННЫХ ИЗДЕРЖЕК И ОГРАНИЧЕНИЙ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2008

Работа выполнена на кафедре прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики ГОУ ВПО «Томский государственный университет»

Научный руководитель: доктор технических наук,
профессор Параев Юрий Иванович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Воробейчиков Сергей Эрикович

доктор физико-математических наук,
профессор Якупов Рафаэль Тимирович

Ведущая организация: ФГОУ ВПО «Сибирский федеральный университет», г. Красноярск

Защита состоится 5 февраля 2009 г. в 10:30 на заседании диссертационного совета Д 212.267.08 при ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, корп. 2, ауд. 102.

Отзывы на автореферат (в двух экземплярах), заверенные гербовой печатью организации, просим направлять по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина 36, ученому секретарю Буровой Н.Ю.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: г. Томск, пр. Ленина, 34 а.

Автореферат разослан 24 декабря 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.267.08
доктор технических наук, профессор А.В. Скворцов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Проблема оптимизации и управления инвестиционным портфелем (ИП) является одной из основных в управлении финансами и представляет как теоретический, так и практический интерес. Финансовый рынок служит эффективнейшим механизмом привлечения как внутренних, так и внешних инвестиций. Эффективность инвестиций в решающей степени зависит от выбранных стратегий управления ИП. Разработка таких стратегий является чрезвычайно актуальной и сложной проблемой, требующей привлечения современных математических методов и моделей и вычислительных технологий.

Существуют различные подходы к решению проблемы управления ИП, характеризующиеся многообразием критериев, моделей динамики капитала, используемыми моделями эволюции цен. Вопросами управления и оптимизации ИП занимались многие исследователи, среди которых следует отметить работы Мельникова А.В., Панкова А.Р., Первозванского А.А., Ширяева А.Н., Bielecki T.R., Black F., Browne S., Cadenillas A., Dupacova J., Karatzas I., Korn R., Luenberger D.G., Markowitz H., Merton R.C., Pham H., Pliska S.R., Tobin J., Scholes M., Sharp W. F., Zhou X.Y., Zenios S.A. и другие.

В большинстве работ по управлению ИП в динамической постановке предполагается, что транзакционные издержки не существенны и в них не учитываются явные ограничения на объемы (или доли) вложений в финансовые активы. При учете комиссионных издержек и ограничений в многомерном случае (когда портфель диверсифицирован и содержит множество активов), применение традиционных подходов к оптимизации ИП упирается в практически неразрешимую проблему «проклятья размерности».

На реальных рынках существуют жесткие ограничения на объемы заемных средств, а также на объемы «коротких» займов без покрытия (так называемая операция «продажи без покрытия» – short sale). В некоторых случаях они вообще могут быть запрещены. Транзакционные издержки (брокерская комиссия, плата за поддержание счета) также могут быть существенными. Таким образом, реалистичные модели ИП должны учитывать транзакционные издержки и ограничения на объемы торговых операций (открываемых инвестором позиций с учетом заемных средств).

Проведенный анализ литературы и потребности практики подтверждают актуальность построения и исследования моделей управления ИП, адекватно учитывающих реальное поведение финансового рынка (нестационарность, нестабильность, возможные изменения правил торгов), реальные ограничения и издержки при управлении инвестициями (транзакционные издержки, ограничения на объемы торговых операций и пр.) Модель должна отражать реальный процесс управления инвестициями («проскальзывание» цен, то есть исполнение заявки на покупку или продажу акций по цене хуже, чем цена в момент выставления заявки, возможное неисполнение заявок в полном объеме из-за недостаточной ликвидности рынка и пр.) и потребности инвесторов. Модели должны быть достаточно универсальными и предусматривать включение в портфель различных финансовых инструментов. От того, насколько совершенны стратегии управления, используемые инвесторами, зависит стабильность финансового рынка и функционирование экономики в целом.

Целью работы является разработка и исследование динамических моделей управления инвестиционным портфелем на нестационарном финансовом рынке с учетом транзакционных издержек и ограничений.

В рамках указанной цели были поставлены **следующие задачи:**

1. Построение и исследование динамических моделей управления ИП на нестационарном финансовом рынке с учетом ограничений на объемы торговых операций (размеры открываемых позиций), учитывающих «проскальзывание» цен, а также различие ставок кредитования и доходности безрисковых активов.

2. Построение и исследование динамических моделей управления ИП с авторегрессионной зависимостью последовательностей доходностей финансовых активов с учетом ограничений и различия ставок.

3. Построение и исследование динамических моделей управления ИП на финансовых рынках со стохастической и условно гетероскедастичной волатильностью с учетом транзакционных издержек и ограничений, а также различия ставок.

4. Построение и исследование робастных адаптивных стратегий управления ИП на диффузионно-скачкообразном финансовом рынке с учетом транзакционных издержек, ограничений и различия ставок при неопределенности в задании параметров моделей.

Методы исследования. При выполнении диссертационной работы использовались понятия и методы теории вероятностей, теории случайных процессов, стохастической финансовой математики, теории моделей финансового рынка, методология управления с прогнозирующей моделью, методы матричной алгебры, методы оптимизации, численные методы и методы компьютерного моделирования.

Научная новизна и положения, выносимые на защиту.

1. Агрегированные динамические модели ИП, учитывающие ограничения на объемы вложений и займов, различие ставок кредитования и доходности безрискового актива. Модификации моделей, учитывающие «проскальзывание» цен и транзакционные издержки.

2. Формулировка задачи управления ИП как динамической задачи слежения за эталонным (базовым) портфелем со скользящим горизонтом инвестирования. Метод определения динамических стратегий управления ИП с прогнозирующей моделью со скользящим горизонтом инвестирования.

3. Многомерные модели ИП и построенные на их базе стратегии управления с прогнозирующей моделью, с учетом транзакционных издержек и различия процентных ставок вклада и займа безрискового актива, при ограничениях на объемы торговых операций (покупки и продажи финансовых активов) и на вложения и займы финансовых активов.

4. Агрегированная и многомерная модели управления ИП на диффузионно-скачкообразном финансовом рынке с неопределенностью в задании параметров уравнений, описывающих доходности рисковых финансовых активов. Робаст-

ные адаптивные стратегии управления ИП с прогнозирующей моделью с учетом ограничений и различия ставок кредитования и доходности безрискового актива.

5. Результаты численного моделирования и тестирования моделей с использованием реальных данных различных финансовых рынков.

Теоретическая ценность. Разработаны динамические модели управления ИП с учетом транзакционных издержек и ограничений, а также различия ставок кредитования и доходности безрискового актива, для различных моделей финансового рынка. Предложен метод определения оптимальных динамических стратегий управления ИП с прогнозирующей моделью на скользящем горизонте инвестирования, позволяющий получать закон управления с обратной связью при ограничениях на управляющие воздействия - объемы вложений в финансовые активы, объем заемных средств, объемы торговых операций.

Практическая ценность. Практическая ценность данной работы состоит в возможности использования полученных результатов для разработки систем управления ИП и стратегий инвестирования на различных финансовых рынках. Результаты диссертационной работы используются в учебном процессе на факультете прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета.

Достоверность полученных результатов подтверждается строгими аналитическими выкладками и доказательствами, а также результатами численного моделирования с использованием реальных данных.

Апробация работы. Результаты работы обсуждались на следующих конференциях: 8-ом Корейско-Российском международном симпозиуме по науке и технологии (Томск, 2004); Международной конференции «Математическое моделирование социальной и экономической динамики (Москва, 2004 г.); Российской конференции «Дискретный анализ и исследование операций» (Новосибирск, 2004 г.); 3-ей и 8-ой Всероссийских конференциях «Финансово-актуарная математика и смежные вопросы» (Красноярск, 2004, 2008 гг.); 4-ой Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование» (ИТММ-2005) (Томск, 2005 г.); Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование – 2005» (г. Анжеро-Судженск, 2005 г.); 7-ой Российской конференции с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» (Томск, 2008 г.);

Материалы диссертации представлялись на: 6-ой Всероссийской конференции с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» ICAM'06 (Шушенское, 5–8 сентября 2006 г.), 5-ом и 6-ом Всероссийских симпозиумах по прикладной и промышленной математике (г. Кисловодск, 2–8 мая 2004 г., г. Санкт-Петербург, 3–7 мая 2005 г).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 16 печатных работ, в том числе в журналах из списка ВАК 4 статьи [1–4].

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из Введения, основного текста, Заключения, списка литературы и Приложения. Основной текст разбит на 4 главы и содержит 49 рисунков. Список литературы включает 137 наименований. Общий объем работы – 188 страниц, основной текст – 161 страница.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении проведен обзор существующих моделей управления ИП, обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована цель работы, изложена ее научная новизна, раскрыты теоретическое значение и практическая ценность полученных результатов, кратко излагается содержание диссертационной работы.

В первой главе рассматриваются агрегированные динамические модели ИП, в которых учитываются ограничения на объемы вложений в финансовые активы, а также различие ставок кредитования и доходности безрисковых активов.

Рассматривается ИП, состоящий из n видов рисковых вложений (например, обыкновенных акций) и безрискового вложения (например, банковский счет в надежном банке). Динамика ИП описывается уравнением

$$V(k+1)=[1+r_1]V(k)+\sum_{i=1}^{n}[\eta_i(k+1)-r_1]u_i(k)-[r_2-r_1]u_{n+1}(k), \qquad (1)$$

где $\eta_i(k+1)$ – доходность i-го рискового актива, случайная величина, r_1 – неслучайная доходность безрискового актива, r_2 – неслучайная ставка по займу безрискового актива. Капитал, помещенный в рисковый актив i-го вида в момент времени k, равен $u_i(k)$, $(i=\overline{1,n})$, в безрисковый актив – $u_0(k)=V(k)-\sum_{i=1}^{n}u_i(k)+u_{n+1}(k)$. Объем безрискового займа $u_{n+1}(k)$. Управляющими переменными являются величины $u_i(k)$, $(n=\overline{1,n+1})$.

При управлении портфелем учитываются следующие ограничения:

на размер вложения в рисковые финансовые активы

$$u_i^{\min}(k)\le u_i(k)\le u_i^{\max}(k), \qquad (2)$$

на размер займа

$$0\le u_{n+1}(k)\le u_{n+1}^{\max}(k); \qquad (3)$$

на размер вложения в безрисковый актив

$$0\le V(k)-\sum_{i=1}^{n}u_i(k)+u_{n+1}(k)\le u_0^{\max}(k). \qquad (4)$$

Если нижняя граница $u_i^{\min}(k)<0$ $(i=\overline{1,n})$, то для акций i-го вида допустимо участие в операции «продажа без покрытия» на сумму не больше, чем $|u_i^{\min}(k)|$; если $u_i^{\min}(k) \geq 0$ $(i=\overline{1,n})$, то операции «продажи без покрытия» для акций i-го вида запрещены (операция «продажа без покрытия» – продажа заимствованных у кого либо рисковых активов с последующим выкупом и возвратом их кредитору). Отметим, что величины $u_i^{\max}(k)$ и $u_i^{\min}(k)$ $(i=\overline{0,n+1})$ на практике часто зависят от величины общего капитала ИП, что можно учесть, положив $u_i^{\min}(k)=\gamma_i' V(k)$, $u_i^{\max}(k)=\gamma_i'' V(k)$, где γ_i' и γ_i'' – постоянные коэффициенты.

Стратегия управления инвестиционным портфелем определяется так, чтобы его капитал $V(k)$ с наименьшими отклонениями (с минимально возможным риском) следовал капиталу $V^0(k)$ некоторого, определяемого инвестором, эталонного (базового) портфеля, эволюция которого описывается уравнением

$$V^0(k+1)=[1+\mu^0(k+1)]\,V^0(k), \tag{5}$$

где $\mu^0(k)$ – заданная инвестором желаемая доходность портфеля, которая выбирается исходя из анализа состояния финансового рынка и склонности инвестора к риску, $V^0(0)=V(0)$ (в другой версии – слежение за опорной траекторией, превосходящей базовую).

В работе предлагается синтезировать стратегии управления ИП со скользящим горизонтом инвестирования (другие используемые в литературе термины для обозначения этого метода управления – управление с прогнозирующей моделью, управление с прогнозированием).

На каждом шаге k минимизируем критерий качества управления со скользящим горизонтом (функцию риска)

$$\begin{aligned} J = M\Bigg\{ & \sum_{i=1}^{m-1}[V(k+i)-V^0(k+i)]^2\,\delta(k,i)+ \\ & +\sum_{i=0}^{m-1}u^T(k+i/k)R(k+i)u(k+i/k)\delta(k,i)+ \\ & +[V(k+m)-V^0(k+m)]^2\,\delta(k,m)/V(k),V^0(k)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{6}$$

на траекториях системы (1), (5) по последовательности прогнозирующих управлений $u(k/k),\ldots,u(k+m-1/k)$, зависящих от состояния управляемого и базового портфелей в момент времени k, при ограничениях (2) – (4), где $u(k+i/k)=\left[u_1(k+i/k),\ldots,u_n(k+i/k),u_{n+1}(k+i/k)\right]^T$ $(i=\overline{0,m-1})$, m – горизонт прогнозирования, $R(i)>0$ – матрица весовых коэффициентов управления, $M\{a/b\}$ – оператор условного математического ожидания. В качестве управления в момент k берем $u(k)=u(k/k)$. Чтобы получить управления $u(k+1)$ на следующем шаге, процедуру повторяем для текущего момента $k+1$, при этом горизонт управления сдвигается на один шаг (скользящий горизонт управления). Такой подход дает возможность достаточно просто в явном виде учитывать ограничения на переменные состояния и управления. При этом получается стратегия управления с обратной связью, но удается избежать так называемого "проклятия размерности", которое препятствует синтезу управления с обратной связью при ограничениях, если применять традиционные подходы с использованием метода динамического программирования. Выбирая весовые коэффициенты $\delta(k,i)$, можно регулировать структуру риска на всем периоде управления ИП. Особенностью рассматриваемых в диссертационной работе задач является то, что модели ИП описываются нестационарными стохастическими разностными уравнениями со случайными параметрами и мультипликативными шумами. Методы управления с прогнозированием для таких систем практически отсутствуют. Предложенный в диссертационной работе метод является оригинальным.

Рассматривается модель ИП, доходности рисковых финансовых активов которого описываются дискретизованной версией классической модели геометрического (экономического) броуновского движения (модель Блэка-Шоулса) с переменными параметрами

$$\eta_i(k) = \mu_i(k) + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(k) w_j(k), \tag{7}$$

где $\mu_i(k)$ – ожидаемая доходность i-ой ценной бумаги на интервале $[k$-$1; k]$, $w_j(k)$ – последовательность некоррелированных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, σ_{ij} – элементы матрицы волатильности $\left\|\sigma_{ij}(k)\right\|$.

Теорема 1.1. Пусть динамика инвестиционного портфеля описывается уравнением (1) с моделью доходностей рисковых активов (7) и ограничениями (2) – (4). Тогда оптимальная стратегия прогнозирующего управления, минимизирующая критерий (6) со скользящим горизонтом m определяется уравнением:

$$u(k) = [E_n \quad 0_n \ldots 0_n]\, U(k)\,, \tag{8}$$

где E_n - единичная матрица размерности n, 0_n - квадратная нулевая матрица размерности n, $U(k) = \left[u^T(k/k),\ u^T(k+1/k), \ldots u^T(k+m-1/k)\right]^T$ - вектор прогнозирующих управлений, который определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием

$$Y(k+m/k) = U^T(k) H(k) U(k) + 2x^T(k) G(k) U(k), \tag{9}$$

при ограничениях

$$U^{\min}(k) \le \overline{S}(k) U(k) \le U^{\max}(k), \tag{10}$$

где

$$x(k) = [V(k), V^0(k)]^T,\ U^{\min}(k) = \left[u_1^{\min}(k) \quad \ldots \quad u_n^{\min}(k) \quad 0 \quad -V(k)\right]^T,$$

$$U^{\max}(k) = \left[u_1^{\max}(k) \quad \ldots \quad u_{n+1}^{\max}(k) \quad u_0^{\max}(k) \quad U_0^{\max} - V(k)\right]^T,$$

$G(k), H(k), \overline{S}(k)$ - блочные матрицы вида

$$H(k)=\begin{bmatrix} H_{11}(k) & ... & H_{1m}(k) \\ ... & ... & ... \\ H_{m1}(k) & ... & H_{mm}(k) \end{bmatrix},$$

$$G(k)=[G_1(k) \ \ ... \ \ G_m(k)], \qquad \overline{S}(k)=[S(k) \quad 0_{(n+2)\times(n+1)(m-1)}],$$

блоки которых определяются следующими соотношениями:

$$H_{is}(k)=\begin{cases} B_0^T(k+i-1)\left\{\prod_{j=i}^{s-2} A^T(k+j)\right\}L_{12}(m-s), & i<s, \\ L_{22}(m-i)+R_2(k,s-1), & i=s, \\ H_{si}^T, & i>s, \end{cases}$$

$$G_s(k)=\left\{\prod_{j=0}^{s-2} A^T(k+j)\right\}L_{12}(m-s), \qquad S(k)=\begin{bmatrix} 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 \\ -1 & ... & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$0_{(n+2)\times(n+1)(m-1)}$ – нулевая матрица размерности $(n+2)\times(n+1)(m-1)$;

$$\prod_{j=s}^{s-1} A^T(k+j)=1, \ \ Q(s)=L_{11}(s)+R_1(k,s-k), \ \ Q(k+m)=R_1(k,m),$$

$$L_{11}(s)=A^T(k+m-1-s)Q(s)A\ (k+m-1-s),$$
$$L_{12}(s)=A^T(k+m-1-s)Q(s)B_0(k+m-1-s),$$
$$L_{22}(s)=B_0^T(k+m-1-s)Q(s)B_0(k+m-1-s)+$$
$$+\sum_{j=0}^{n} B_j^T(k+m-1-s)Q(s)B_j(k+m-1-s),$$

где

$$A(k)=diag\Big(1+r_1, \ \ 1+\mu^0(k)\Big),$$

$$B_0(k)=\begin{bmatrix} \mu_1(k)-r_1 & ... & \mu_n(k)-r_1 & -[r_2-r_1] \\ 0 & ... & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_j(k)=\begin{bmatrix} \sigma_{1,j}(k) & ... & \sigma_{n,j}(k) & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 \end{bmatrix}, (\ j=\overline{1,n}\ ).$$

$$R_1(k,i)=\delta(k,i)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R_2(k,i)=\delta(k,i)R(k,i).$$

Рассматриваются модели ИП, доходности рисковых активов которых описываются многомерными процессами авторегресии

$$\eta(k+1) = \mu(k+1) + \theta(k+1), \tag{11}$$

$$\theta(k+1) = \alpha\,\theta(k) + w(k+1), \tag{12}$$

где

$$\eta(k) = \begin{bmatrix} \eta_1(k) \\ \ldots \\ \eta_n(k) \end{bmatrix}, \qquad \theta(k) = \begin{bmatrix} \theta_1(k) \\ \ldots \\ \theta_n(k) \end{bmatrix}, \qquad \mu(k) = \begin{bmatrix} \mu_1(k) \\ \ldots \\ \mu_n(k) \end{bmatrix},$$

$$\theta_i(k) = \eta_i(k) - \mu_i(k), \qquad (i = \overline{1,n}),$$

$w(k+1)$ – вектор белых шумов размерности n с нулевым средним и матрицей ковариации $D(k+1)$, α – матрица соответствующей размерности;

Теорема 1.2. Пусть динамика ИП описывается уравнением (1) с моделью доходностей рисковых активов (11), (12) при ограничениях (2) – (4). Тогда оптимальная стратегия прогнозирующего управления, минимизирующая критерий со скользящим горизонтом прогнозирования m, определяется уравнением вида (8), где вектор прогнозирующих управлений $U(k)$ определяется из решения задачи квадратичного программирования (9), (10), блоки матриц $G(k)$, $H(k)$ определяются следующими соотношениями:

$$G_s(k) = \left(A^{s+1}\right)^T Q(m-s-1)B\left[\alpha^{s+1}\theta(k)\right],$$

$$H_{s,s}(k) = R_2(k,s) + B^T\left[\alpha^{s+1}\theta(k)\right]Q(m-s-1)B\left[\alpha^{s+1}\theta(k)\right] +$$

$$+M\left\{\sum_{g=m-s}^{m} \overline{B}^T\left[\alpha^{g-m+s}w(k+m-g+1)\right]\times\right.$$

$$\left.\times Q(m-s-1)\overline{B}\left[\alpha^{g-m+s}w(k+m-g+1)\right]\right\}$$

$$H_{s,r} = B^T\left[\alpha^{s+1}\theta(k)\right]Q(m-s-1))A^{s-r}B\left[\alpha^{r+1}\theta(k)\right] +$$

$$+M\left\{\sum_{g=m-r}^{m} \overline{B}^T\left[\alpha^{g-m+s}w(k+m-g+1)\right]\times\right.$$

$$\left.\times Q(m-s-1)A^{s-r}\overline{B}\left[\alpha^{g-m+r}w(k+m-g+1)\right]\right\}, \text{ при } s > r,$$

$H_{s,r}(k) = H_{r,s}^T(k),\ s < r$, $\quad Q(i) = A^T Q(i-1)A + R_1(k,m-i) \quad (i = \overline{1,m})$,

$Q(0) = R_1(k, m)$, $\overline{B}(\xi) = B(\xi) - B_0$, здесь B_0 – постоянная матрица в параметризации матрицы $B[\xi]$ вида: $B[\xi] = B_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i\xi_i$, B_i, $(i = \overline{0,n})$ – матрицы соответствующей размерности, ξ_i – i-я компонента вектора ξ.

$$A\ (k) = diag\left(1 + r_1,\ \ 1 + \mu^0(k)\right),$$

$$B[\theta(k)]=\begin{bmatrix}\theta_1(k)+\mu_1(k)-r_1 & \ldots & \theta_n(k)+\mu_n(k)-r_1 & r_1-r_2\\ 0 & \ldots & 0 & 0\end{bmatrix},$$

Рассматриваются модели ИП с условно-гетероскедастичной волатильностью, описываемой GARCH – моделью

$$\sigma_i^2(k)=\varphi_0^i+\sum_{j=1}^{p}\varphi_j^i\, e_j^2(k-j)+\sum_{j=1}^{s}\beta_j^i\,\sigma_i^2(k-j),\quad e_i(k)=\sigma_i(k)w_i(k),$$

и CHARMA – моделью

$$\eta_i(k)=\mu_i(k)+\theta_i(k),$$

$$\theta_i(k)=\delta_1^i(k)\theta_i(k-1)+\delta_2^i(k)\theta_i(k-2)+\ldots+\delta_p^i(k)\theta_i(k-p)+e_i(k),$$

где $\{e_i(k)\}$ – гауссовский белый шум с нулевым средним и вариацией $\delta_{e_i}^2$, $\left\{\delta^i(k)\right\}=\left\{[\delta_1^i(k),\ldots,\delta_p^i(k)]\right\}$ – последовательность одинаково распределенных независимых векторов с нулевым средним и матрицей ковариаций $\Omega>0$, последовательности $\left\{\delta^i(k)\right\}$ и $\{e_i(k)\}$ независимы.

Рассматриваются модели ИП, в котором содержатся активы с доходностями, описываемыми ARMA(*p, q*) процессами вида

$$\eta_i(k+1)=\mu_i+\theta_i(k+1),$$

$$\theta_i(k+1)=\alpha_1^i\,\theta_i(k)+\alpha_2^i\,\theta_i(k-1)+\ldots+\alpha_p^i\,\theta_i(k-p)+$$
$$+e_i(k+1)-\beta_1^i\,e_i(k)-\ldots-\beta_q^i\,e_i(k-q),\qquad (i=\overline{1,n}),$$

где $e_i(k)$ – последовательность независимых случайных величин.

Для этих моделей доказаны теоремы об оптимальных стратегиях. Синтез стратегий управления сводится к решению последовательности задач квадратичного программирования. В рамках агрегированных моделей предложен подход к синтезу субоптимальных стратегий управления ИП с учетом транзакционных издержек и «проскальзывания» цен. Модель ИП в этом случае имеет вид:

$$V(k+1)=[1+r_1]V(k)-r_4\sum_{i=1}^{n}t_i(k)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}[\eta_i(k+1)-r_3 sign(u_i(k))-r_1]u_i(k)-[r_2-r_1]u_{n+1}(k),\qquad (13)$$

где r_3 – процент, на который цена исполнения заявки отклоняется от рыночной цены в момент выставления заявки; r_4 – ставка вознаграждения брокера и биржи; $t_i(k)=|u_i(k)-u_i(k-1)|$ – объем сделки купли/продажи, совершенной с i-м активом в момент времени k. Уравнение (13) описывает реальное состояние портфеля, если «проскальзывание» всегда происходит не в пользу инвестора.

Заметим, что «проскальзывание» часто бывает и в пользу инвестора, поэтому в данной модели предусмотрен наихудший для инвестора сценарий.

Во второй главе предложены многомерные модели ИП. Динамика портфеля в пространстве состояний описывается уравнениями:
для рисковых активов

$$x_i(k+1) = [1+\eta_i(k+1)][x_i(k) + p_i(k) - q_i(k)],$$

где $x_i(k)$, $i = \overline{1,n}$ – объем инвестиций в *i*-й финансовый актив, $p_i(k)$–объем капитала, переведенного с банковского счета в *i*-й рисковый актив, $q_i(k)$– объем капитала, переведенного с *i*-го рискового актива на банковский счет, $p_i(k) \geq 0$, $q_i(k) \geq 0$, если какая-либо переменная $x_i(k)$<0, то это означает участие в операции "продажа без покрытия" на сумму $|x_i(k)|$;
для безрискового вложения (банковского счета)

$$x_{n+1}(k+1) = [1+r_1(k+1)]\,[x_{n+1}(k) + v(k) - \sum_{i=1}^{n}(1+\delta_i)\,p_i(k) + \sum_{i=1}^{n}(1-\rho_i)q_i(k)],$$

где δ_i – доля капитала $p_i(k)$, идущая на уплату транзакционных издержек при покупке рискового актива *i*-го вида, а ρ_i – доля капитала $q_i(k)$, идущая на уплату издержек при продаже рискового актива *i*-го вида, переменная *v(k)* – объем капитала, перераспределяемого между банковским и кредитным счетами: *v(k)>0* означает заем в размере *v(k), v(k)<0* означает возврат кредита в размере |*v(k)*|. Состояние банковского счета $x_{n+1}(k+1) \geq 0$, следовательно, должно выполняться ограничение

$$x_{n+1}(k) + v(k) - \sum_{i=1}^{n}(1+\delta_i)\,p_i(k) + \sum_{i=1}^{n}(1-\rho_i)q_i(k) \geq 0,$$

Динамика заемного капитала описывается следующим уравнением:

$$x_{n+2}(k+1) = [1+r_2(k)][x_{n+2}(k) - v(k)],$$

Переменная $x_{n+2}(k)$ означает, что на сумму, равную $|x_{n+2}(k)|$, сделан заем безрискового актива, она принимает только неположительные значения, откуда следует, что $x_{n+2}(k) - v(k) \leq 0$. Общий капитал портфеля равен $V(k) = \sum_{i=1}^{n+2} x_i(k)$.

При управлении портфелем учитываются также следующие ограничения:
на объемы вложения в рисковые активы

$$x_i^{\min}(k) \leq x_i(k) + p_i(k) - q_i(k) \leq x_i^{\max}(k), \qquad i = \overline{1,n};$$

на вложение в безрисковый актив

$$x_{n+1}(k) + v(k) - \sum_{i=1}^{n}(1+\delta_i)\,p_i(k) + \sum_{i=1}^{n}(1-\rho_i)q_i(k) \leq x_{n+1}^{\max}(k),$$

на объемы займов

$$x_{n+2}^{\min}(k) \leq x_{n+2}(k) - v(k).$$

Если нижняя граница $x_i^{\min}(k) < 0$ ($i = \overline{1,n}$), то для акций *i*-го вида допустимо участие в операции «продажа без покрытия» на сумму не больше чем $\left|x_i^{\min}(k)\right|$; если $x_i^{\min}(k) \geq 0,\ i = \overline{1,n},$ то операция «продажа без покрытия» для i-го вида запрещена; $x_i^{\max}(k) \geq 0,\ i = \overline{1,n},$ определяют максимальный объем капитала, который можно вкладывать в акции i-го вида; $x_{n+1}^{\max}(k) \geq 0$ определяет максимальный объем капитала, который можно вкладывать в безрисковый актив; $x_{n+2}^{\min}(k) \leq 0$ определяет максимальный размер $\left|x_{n+2}^{\min}(k)\right|$ займа безрискового актива.

Величины $x_i^{\max}(k),\ (i = \overline{1,n+1})$, $x_i^{\min}(k) \geq 0,\ (i = \overline{1,n},\ n+2),$ могут быть константами, но на практике они часто зависят от величины общего капитала ИП, что можно учесть, положив $x_i^{\min}(k) = \gamma_i^{'} V(k),\ x_i^{\max}(k) = \gamma_i^{''} V(k)$.

Кроме того, учитываются ограничения, налагающие запрет на одновременную покупку и продажу одного и того же актива

$$p_i(k) q_i(k) = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Рассматриваются модели ИП, в которых доходности рисковых активов подчиняются: а) дискретизованным уравнениям типа геометрического броуновского движения с переменными детерминированными параметрами (ожидаемой доходностью и волатильностью); б) уравнениям с условной гетероскедастичностью волатильностей с описанием волатильностей GARCH-M моделью

$$\eta_i(k) = \mu_i + c_i \sigma_i(k) + \sigma_i(k) w_i(k),$$

$$\sigma_i^2(k) = \alpha_0^i + \alpha_1^i e_i^2(k-1) + \beta_1^i \sigma_i^2(k-1), \quad e_i(k) = \sigma_i(k) w_i(k);$$

в) уравнениям со стохастической волатильностью (SV-модель)

$$\sigma_i(k) = e^{\frac{h_i(k)}{2}},$$

здесь $h_i(k)$ выполняет роль скрытых факторов (латентной структуры) и имеет авторегрессионную природу $h_i(k+1) = \gamma_{0i} + \gamma_{1i} h_i(k) + \varepsilon_i(k)$;

г) факторным моделям доходностей.

Доказаны теоремы об оптимальных стратегиях управления с прогнозированием. Учет ограничений (13) в явном виде приводит к необходимости решения последовательности задач нелинейного программирования, что существенно усложняет численное решение задачи. При практической реализации стратегии это ограничение можно снять, если размеры позиций определять по следующим правилам: покупка на сумму $p_i(k) - q_i(k) > 0,$ если $p_i(k) > q_i(k)$, продажа на сумму $q_i(k) - p_i(k) > 0,$ если $q_i(k) > p_i(k)$. Тогда задача оптимизации на каждом шаге сводится к задаче квадратичного программирования. Размер транзакционных издержек легко корректируется.

В третьей главе предложены модели ИП с вероятностной неопределенностью в задании параметров уравнений, описывающих доходности рисковых финансовых активов. Доходности активов описываются следующей моделью

$$\eta_i(k) = \mu_i[\theta(k),k] + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}[\theta(k),k] w_j(k) + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}[\theta(k),k] \pi_j(k), \qquad (14)$$

где случайная последовательность $\left\{\pi_j(k)\right\}$ описывает скачкообразные изменения доходностей вследствие воздействия редких экстремальных событий или ожиданий; $\theta(k)$– последовательность независимых q-мерных случайных векторов с известными первым и вторым моментами, $M\left\{\theta_j(k) w_j(k)\right\} = 0$; $M\left\{\theta_j(k)\pi_j(k)\right\} = 0$,

$M\left\{w_j(k)\pi_j(k)\right\} = 0$, $i, j = \overline{1,n}$; $\gamma_{ij}[\theta(k),k]$ – элементы матрицы $\Gamma[\theta(k),k]$, определяющие влияние скачков доходности *j*-го рискового вложения на доходность *i*-го; случайная величина $\pi_j = I_j \times Y_j$, где случайная величина I_j принимает значение, равное единице с вероятностью λ_j, и значение ноль с вероятностью $1-\lambda_j$. Случайная величина Y_j имеет двойное экспоненциальное распределение (распределение Лапласа). Предполагается, что ожидаемые доходности $\mu_i[\theta(k),k]$, элементы матрицы волатильности $\sigma_{ij}[\theta(k),k]$ и $\gamma_{ij}[\theta(k),k]$ зависят от $\theta(k)$ линейно. Последовательность $\theta(k)$ представляет случайные флуктуации параметров моделей доходностей.

Предложенный подход к описанию неопределенностей позволяет ограничиться минимумом информации о параметрах модели (14). Например, можно решать задачу с интервальной неопределенностью в задании параметров, полагая, что они равномерно распределены в заданных интервалах.

Рассмотрена агрегированная модель ИП, на базе которой получены робастные стратегии управления ИП с прогнозирующей моделью с учетом ограничений на вложения и займы и различия ставок кредитования и доходности безрискового актива.

Рассмотрена многомерная модель ИП с неопределенностью в задании параметров. На ее основе получены робастные стратегии управления ИП с прогнозирующей моделью с учетом транзакционных издержек, ограничений на объемы торговых операций (покупки и продажи финансовых активов), ограничений на вложения и займы (в том числе «продажи без покрытия») финансовых активов, а также различия процентных ставок вклада и займа безрискового актива. Отметим, что хотя при построении модели скачкообразного процесса было принято предположение о виде распределения величины скачка, на самом деле при синтезе оптимальных стратегий требуется знание лишь его математического ожидания и дисперсии.

В четвертой главе приводятся результаты численного моделирования на реальных данных различных финансовых рынков. Использованы данные о динамике цен акций, торгуемых на: Российской бирже «Фондовая биржа ММВБ» (фондовая секция Московской межбанковской валютной биржи); одной из крупнейших европейских бирж Euronext, а также валютных пар, торгуемых на международном валютном рынке Forex (foreign exchange).

Для управления портфелем использовались адаптивные робастные стратегии, построенные на основе полученных в предыдущих главах теоретических результатов, которые учитывают неопределенность в задании волатильностей и не требуют их конкретных значений или оценивания параметров моделей, используемых для описания эволюции волатильности. Ожидаемые доходности рисковых активов оцениваются по текущим данным.

Рассмотрим задачу управления инвестиционным портфелем, состоящим из 5 видов акций, торгуемых на ФБ ММВБ: ОАО «Банк ВТБ», ОАО НК «Лукойл», ОАО «Газпром», ОАО «ГМК Норильский никель», ОАО «Газпромнефть» и одного вида безрискового актива с доходностью 4% годовых. Так же доступна услуга маржинального кредитования с маржинальным плечом 1, то есть возможно участие в операции «продажа без покрытия» и доступен банковский займ. Суммарный объем операций «продажа без покрытия» и размер банковского займа на шаге k не может превышать величину капитала ИП на шаге k - $V(k)$. Ставка по займу составляет 14% годовых. Брокерская и биржевая комиссии сумарно составляют 0,06% от сделки. Данные условия являются типичными для российских брокеров.

Решалась задача слежения за опорной траекторией с доходностью $\mu^0 = 0{,}003$. Предполагалось, что волатильность является случайной равномерно распределенной величиной. Интервал изменения волатильности оценивался по прошлым наблюдениям доходностей акций и составил [0,001 0,03] для всех акций, включаемых в портфель. Ожидаемые доходности оценивались методом скользящего окна по семи последним наблюдениям дневных цен закрытия с учетом авторегрессионной составляющей первого порядка. Предполагалось, что доходности акций, включенных в портфель, некоррелированы между собой. Заявки выставлялись по ценам открытия. Горизонт прогноза m=20. Ниже приведены некоторые результаты тестирования за период с 20.07.07 г. по 30.10.08 г. (305 торговых дней). На рис. 1 показана типичная динамика доходностей акций за этот период на примере акций «Лукойл», на рис. 2 – результаты управления ИП на основе агрегированной модели с «проскальзыванием» цен (предполагаем, что каждая сделка исполняется по цене на 0,05% хуже, чем цена выставления заявки) и издержками, на рис. 3 – на основе многомерной модели (для нее ожидаемые доходности оценивались методом скользящих средних и в портфель добавлены акции Сбербанка).

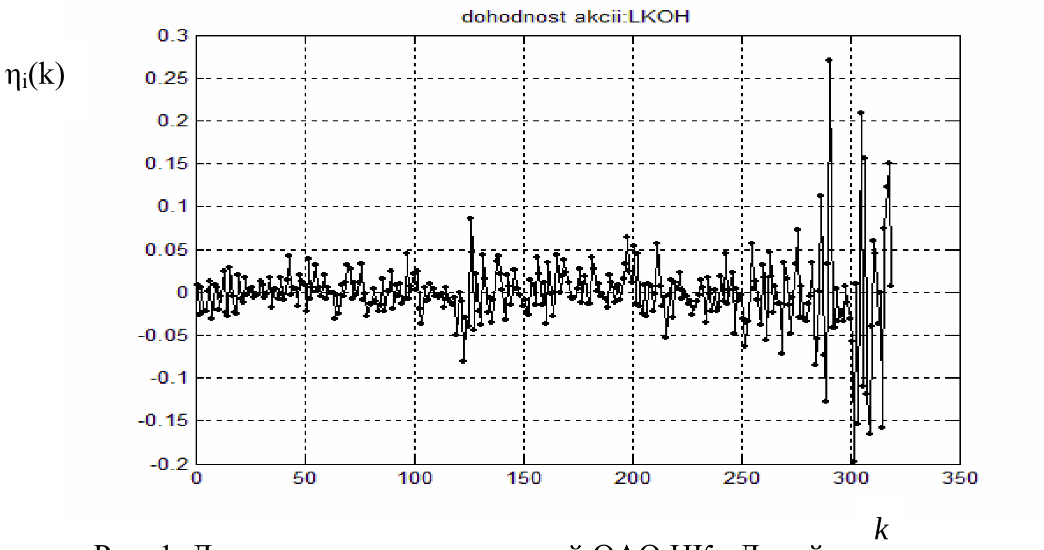

Рис. 1. Динамика доходности акций ОАО НК «Лукойл»

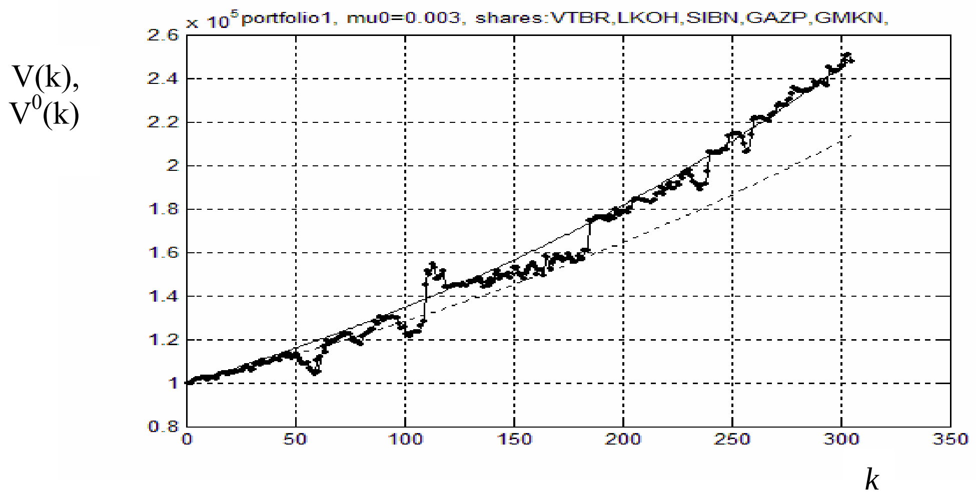

Рис. 2. Динамика капитала управляемого ИП (●●●), опорная траектория (---) и траектория базового портфеля (- - -)

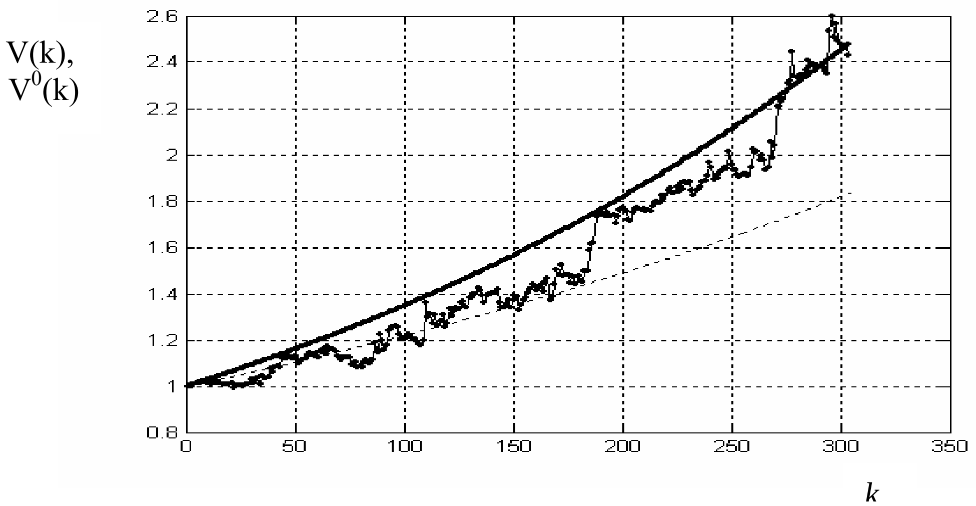

Рис. 3. Динамика капитала управляемого ИП (●●●), опорная траектория (▬) и траектория базового портфеля (- - -)

В заключении приведены основные результаты работы:

1. Разработаны агрегированные динамические модели управления ИП, учитывающие ограничения на объемы вложений и займов, а также различие ставок кредитования и доходности безрискового актива.

2. Предложен метод определения оптимальных стратегий управления с прогнозирующей моделью (со скользящим горизонтом инвестирования), позволяющий получать закон управления с обратной связью при ограничениях на управляющие воздействия (объемы вложений в финансовые активы, а также объем заемных средств). Предложен подход к синтезу субоптимальных стратегий управления ИП с учетом транзакционных издержек и «проскальзывания» цен.

3. Разработаны многомерные модели ИП. На базе этих моделей построены оптимальные стратегии управления с прогнозирующей моделью с учетом транзакционных издержек и различия процентных ставок вклада и займа безрискового актива, при ограничениях на объемы торговых операций (покупки и продажи финансовых активов) и на вложения и займы финансовых активов.

4. Разработаны модели управления ИП на диффузионно-скачкообразном финансовом рынке с неопределенностью в задании параметров уравнений, описывающих доходности рисковых финансовых активов. Предложены робастные адаптивные стратегии управления ИП с прогнозирующей моделью с учетом ограничений и различия ставок кредитования и доходности безрискового актива.

5. Проведено численное моделирование и тестирование моделей с использованием реальных данных различных финансовых рынков, которое подтвердило работоспособность и эффективность предложенных моделей управления ИП.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций

1. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Управление с прогнозированием системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 4. – С. 84–97.

2. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Управление с прогнозированием системами со случайными зависимыми параметрами при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 12. – С. 71–85.

3. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Прогнозирующее управление инвестиционным портфелем на основе рыночной модели с учетом транзакционных издержек и ограничений // Вестник Томского государственного университета. – 2004. – № 284.– С. 57–59.

4. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Прогнозирующее управление системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами // Вестник Томского государственного университета. – 2004. – № 284 – С. 148–151.

Публикации в других изданиях

5. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Робастное управление финансовыми активами со стохастической волатильностью с учетом транзакционных издержек // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2007. – № 1. – С. 8–14.

6. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Динамическая оптимизация инвестиционного портфеля при ограничениях на объемы вложений в финансовые активы // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2008. – № 1(2). – С. 13–17.

7. Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Модель управления инвестиционным портфелем на финансовом рынке со стохастической волатильностью с учетом транзакционных издержек и ограничений// Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2005). Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции. Ч. 2. – Томск: Изд-во Томского университета, 2005.– С. 97– 99.

8. Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Модель управления инвестиционным портфелем на финансовом рынке со стохастической волатильностью с учетом транзакционных издержек и ограничений // Вестник Томского государственного университета. – Приложение. – 2006. – № 16. – С. 217–225.

9. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Стратегии прогнозирующего управления инвестиционным портфелем с учетом транзакционных издержек и ограничений на объемы торговых операций // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2004. – Т. 11. – № 2. – С. 331–332.

10. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Управление с прогнозированием инвестиционным портфелем при ограничениях на объемы торговых операций на финансовом рынке со стохастической волатильностью // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2005. – Т. 12. – № 2. – С. 352–353.

11. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Применение метода управления с прогнозирующей моделью для оптимизации инвестиционного портфеля с учетом ограничений на объемы торговых операций // Труды третьей Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. Ч. 1. – Красноярск: ИВМ СО РАН. 2004. – С. 164–170.

12. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Андриенко Е.А. Прогнозирующее управление финансовыми активами с учетом транзакционных издержек // Труды VII Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. Ч. 2. – Красноярск: Сибирский федеральный университет. 2008. – С. 70–76.

13. Dombrovskii D.V., Lyashenko E.A. Dynamic investment portfolio model under asset allocation constraints // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2006. – № 18. – С. 315–319.

14. Dombrovsky D.V.,Dombrovsky V.V.,Lyashenko E.A. Dynamic asset management with stochastic volatility under transaction costs and portfolio constraints

// Материалы Российской конференции «Дискретный анализ и исследование операций». – Новосибирск: издательство института математики, 2004. – С. 200.

15. Dombrovskiy D.V.,Dombrovskiy V.V., Lyashenko E.A. Dynamic feedback strategies of investment management under transaction costs and portfolio constraints // Proceedings of the International Conference «Mathematical Modeling of Social and Economical Dynamics». – Moscow: RSSU, 2004. – P. 105–107.

16. Dombrovskiy D.V., Dombrovskiy V.V., Lyashenko E.A. Investment portfolio optimisation with transaction costs and constraints using model predictive control // Proceedings of the 8-th Korea-Russia International Symposium on Science and Technology. – Tomsk: TPU, 2004. – P. 202–205.

Тираж 100 экз.
Отпечатано в КЦ «Позитив»
634050 г. Томск, пр. Ленина 34а