На правах рукописи

Рыбалов Юрий Александрович

ШТЕККЕЛЕВЫ ПРОСТРАНСТВА В НЕКОТОРЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

01.04.02 Теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2009

Работа выполнена в Томском государственном педагогическом университете на кафедре теоретической физики.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Осетрин Константин Евгеньевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Галажинский Антон Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор Шаповалов Александр Васильевич

Ведущая организация: Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет»

Защита состоится «24» сентября 2009 г. в 16.30 часов на заседании диссертационного совета Д 212.267.07 при государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Томский государственный университет» по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Томского государственного университета по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 34.

Автореферат разослан «21» августа 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета ________ И.В. Ивонин
доктор физико-математических наук

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации

Одной из актуальных проблем современной физики является построение реалистичных моделей развития Вселенной. Современные наблюдательные данные противоречат стандартным космологическим моделям в рамках общей теории относительности. Решение этой проблемы идет через построение альтернативных (модифицированных) теорий гравитации. Эти теории используют новые подходы и методы (теории гравитации с высшим производными, со специальным гравитационными условиями, с высшими размерностями), в этих подходах используются дополнительные объекты для описания гравитационных эффектов (темная энергия и материя со специальными свойствами, дилатон и т.п.). При построении современных космологических моделей используются самые последние достижения различных физических теорий, таких как теории струн, теории бран, теории с лагранжианами, нелинейными по кривизне. При этом полагается что жизнеспособная теория должна являться метрической теорией.

Усложнение появившихся при этом теорий и моделей приводит к трудности интегрирования полевых уравнений даже при рассмотрении самых простых моделей. Число точно решаемых моделей в таких теориях невелико. Невозможность аналитического исследования приводит к необходимости использования численных методов интегрирования, что связано с изучением проблем сходимости и контроля точности расчета, где для выверки методов большую роль играют точно решаемые задачи. При квантовании теорий также значительную роль играют точно решаемые классические модели.

Но численные методы не всегда достаточны для изучения физических свойств пространств, в которых рассматриваются космологические задачи. Для этого необходимо получение аналитических решений полевых уравнений. В связи, с чем существует проблема точного интегрирования и классификации полученных решений для полевых уравнений в различных моделях в рамках модифицированных теорий. Классификация решений - это нахождение всех неэквивалентных решений полевых уравнений относительно определенной группы преобразований. По этой причине выбираются пространства, в которых рассматриваются метрики, обладающие какой-либо симметрией. Систематическое исследование проблемы аналитического интегрирования полевых уравнений Эйнштейна было связано с классификацией пространств, допускающих группы движения (см. работы Бианки, Петрова).

Обобщением таких пространств являются пространства, содержащие более сложные геометрические объекты (тензорные и векторные поля

Киллинга). На эти объекты обычно накладываются дополнительные условия. Проблема построения классификации для пространственно-временных метрик, допускающих наборы таких геометрических объектов, удовлетворяющих дополнительным условиям, имеющим физический смысл рассматривалась в работах Robertson H.P., Eisenhart L.P., Шаповалова В.Н., Багрова В.Г., Обухова В.В., Шаповалова А.В. и д.р.

Пространства Римана, позволяющие проинтегрировать уравнения геодезических методом полного разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби для незаряженной массивной частицы, называются штеккелевыми пространствами. Теория полного разделения переменных в одночастичных уравнениях движения разработана усилиями многих исследователей, начиная с Фурье, Остроградского, Якоби. В настоящее время найдены условия полного разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби в произвольном искривленном пространстве (в работах Benenti S., Miller Jr.W., Шаповалова В.Н. и др.). Первые примеры штеккелевых пространств, удовлетворяющих полевым уравнениям Эйнштейна, получил еще Шварцшильд. К штеккелевым пространствам относятся широко известные решения, такие как решения Керра, Казнера, де Ситтера и т.д. (см. например работы Boyer C.P., Kalnins E.G., Miller Jr.W.). Установлено, что принадлежность пространства к классу штеккелевых является необходимым условием для полного разделения переменных во всех основных одночастичных уравнениях математической физики: Клейна-Гордона, Дирака, Дирака-Фока-Иваненко и других (см., например работы Багрова В.Г., Обухова В.В.). Этим объясняется тот факт, что все известные аналитические решения уравнений математической физики получены в классе штеккелевых пространств (см. например монографию Обухова В.В.). В настоящее время классификационные задачи для штеккелевых пространств в достаточной мере изучены. Решены проблемы классификации штеккелевых метрик в пространствах Эйнштейна, Риччи-плоских пространствах, пространствах электровакуума и т.д. Так же данная проблема исследовалась для однородных пространств, и получено множество точных решений самых различных полевых уравнений (к примеру, совместные работы Обухова В.В., Осетрина К.Е., Филиппова А.Е. и д.р.). При изучении штеккелевых пространств были установлены ковариантные критерии принадлежности пространств к классу штеккелевых, этим критерием является наличие в пространстве так называемого полного набора взаимно коммутирующих векторов и тензоров Киллинга. Пространства, в которых имеются полные наборы взаимно коммутирующих векторов и тензоров Киллинга являются штеккелевыми пространствами.

При этом разделение переменных возможно только в специальных системах координат, называемых привилегированными. Так же штеккелевы пространства характеризуются наличием (или отсутствием) в привилегированной системе координат изотропных переменных, в связи с чем введено обозначение штеккелевых пространств с помощью пары чисел: ($N.N_0$), число N отвечает за размерность группы, образованной взаимно коммутирующими векторами Киллинга, N_0 - число изотропных переменных. Пространства, допускающие привилегированные системы координат, в которых присутствуют изотропные переменные, называются изотропными штеккелевыми пространствами. Интерес к таким пространствам вызван тем, что они могут быть использованы для изучения задач о распространении гравитационных волн и других видов излучения. Таким образом, штеккелевы пространства вызывают к себе интерес в связи с тем, что в них возможно аналитическое интегрирование различных полевых уравнений (уравнения гравитации Эйнштейна, уравнения скалярно-тензорной теории гравитации Бранса-Дикке). Вместе с тем широкое применение таких пространств осложнено тем, что они заданы с достаточно большим произволом, и метрики этих пространств в общем случае имеют достаточно сложный вид. Поэтому возникает необходимость сформулировать физически и геометрически обоснованные дополнительные условия, ограничивающие этот произвол. Изучение дополнительных симметрий в пространствах призвано помочь в наложении дополнительных свойств, что решает проблему большого произвола в метриках штеккелевых пространств. Как дополнительное ограничение на метрики штеккелевых пространств можно рассматривать условие их принадлежности к классу конформно-плоских пространств.

Конформно-плоские пространства являются наиболее простым обобщением плоских пространств и представляют интерес как наиболее простой класс пространств, имеющих отношение к построению космологических моделей. С их помощью можно строить физически интересные космологические модели (напомним, что пространства де Ситтера, Фридмана-Робертсона-Уокера относятся к конформно-плоским).

Конформно-штеккелевы пространства в частности возникают при рассмотрении конформного отображения штеккелевых пространств на пространства Эйнштейна. Проблема конформного отображения римановых пространств на пространства Эйнштейна впервые изучалась в работе Бринкмана, где была получена первая серия уравнений совместности (условия Бринкмана). При рассмотрении метрик пространств с учетом условий совместности в метрический тензор пространства включается конформный фактор. Конформно-плоские штеккелевы пространства - это штеккелевы пространства, на которые накладывается дополнительное условие - равенство нулю тензора конформной кривизны Вейля.

Метрику конформно-плоского пространства в некоторой системе координат можно записать в виде:

$$ds^2 = e^{2u(x^0,x^1,x^2,x^3)}(dx^0 - dx^1 - dx^2 - dx^3).$$

Тензор конформной кривизны Вейля определяется в следующей форме:

$$C_{abcd} = R_{abcd} + \frac{1}{2}(g_{ad}R_{bc} + g_{bc}R_{ad} - g_{ac}R_{bd} - g_{bd}R_{ac}) + \frac{R}{6}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}).$$

Условие равенства нулю тензора Вейля показывает, что конформно-плоские вакуумные решения ($\mathrm{R}_{ab} = 0 = \mathrm{R}$) являются плоскими. Все конформно-плоские решения для идеальной жидкости, электромагнитного поля или поля чистого излучения в общей теории относительности известны (см. обзор по точным решениям уравнений Эйнштейна под редакцией Шмутцера).

Конформно-плоские решения в случае идеальной жидкости - это или обобщенные внутренние решения Шварцшильда или обобщенные решения Фридмана, для пыли решениями будут только модели Фридмана, а единственным стационарным решением является статистическое внутреннее решение Шварцшильда. Конформно-плоские поля Эйнштейна-Максвелла дают либо метрику Бертотти-Робинсона (с неизотропным электромагнитным полем), либо они являются специальными плоскими волнами (с изотропным электромагнитным полем). Конформно-плоские поля чистого излучения содержатся в решениях специальных плоских волн; их всегда можно интерпретировать в терминах изотропного электромагнитного поля.

Конформно-штеккелевы пространства рассматривались в совместных работах Багрова В.Г., Обухова В.В., Осетрина К.Е. Классификация изотропных конформно-штеккелевых метрик рассматривалась в работах этих же авторов.

В диссертации рассматривается класс конформно-плоских изотропных штеккелевых пространств, интересующих нас с точки зрения возможности получения аналитических решений для полевых уравнений различных гравитационных теорий (не только ОТО), при этом полученные решения можно физически интерпретировать, что является немаловажным критерием для анализа альтернативных теорий гравитации.

Класс конформно-плоских изотропных штеккелевых пространств является интересным инструментом для исследования альтернативных теорий гравитации. В диссертации изучение конформно-плоских изотропных штеккелевых пространств начинается с наиболее простых космологических моделей: вакуумной конформно-плоской Вселенной, и вакуумной конформно-плоской Вселенной с космологической постоянной. В итоге получены все неэквивалентные решения для вакуумных уравнений гравитации Эйнштейна (с учетом Λ - члена) в конформно-плоских штеккелевых пространствах.

В настоящее время проблема поиска новых точных решений уравнений гравитации Эйнштейна не относится к наиболее популярным задачам общей теории относительности, поскольку число известных решений и без того внушительно. В диссертации же классификация осуществляется с целью перечисления всех неэквивалентных решений полевых уравнений – метрик штеккелевых пространств в привилегированных системах координат для конкретных задач.

Следующим этапом в диссертации является получение всех метрик для конформно-плоских штеккелевых пространств в задаче Вайдья (Вселенная с излучением). Задача Вайдья удобна для изучения движения безмассовых частиц и является более сложной и в тоже время физически интересной моделью с излучением (гравитационным, электромагнитным и т.п.). Логичным завершением исследования конформно-плоских штеккелевых пространств как класса штеккелевых пространств в рамках диссертационной работы является нахождение всех метрик конформно-плоских штеккелевых пространств в скалярно-тензорной теории гравитации Бранса-Дикке. Скалярно-тензорная теория гравитации Бранса-Дикке является одной из первых модифицированных теорий гравитации. В настоящее время скалярно-тензорные теории вызывают интерес как низкоэнергетические приближения квантово-полевых теорий. На основе рассмотренных задач можно сделать вывод о возможности использования конформно-плоских штеккелевых пространств для нахождения аналитических решений в более сложных космологических моделях, получаемых в рамках других метрических теорий гравитации.

Цель работы

1. Классификация конформно-плоских штеккелевых пространств типа (N.1) как математического инструмента для построения аналитически интегрируемых моделей в метрических теориях гравитации.
2. Апробация конформно-плоских штеккелевых пространств типа (N.1) в конкретных космологических задачах, в том числе в альтернативных теориях гравитации.

Научная новизна работы

В диссертации впервые проводилось исследование конформно-плоских изотропных штеккелевых пространств с целью построения на их основе космологических моделей для последующего использования в анализе существующих альтернативных теорий гравитации и получения решений, подходящих для физической интерпретации. Впервые получены следующие результаты:

1. Из множества изотропных штеккелевых пространств выделены классы конформно-плоских штеккелевых пространств как

удобный инструмент для получения аналитически интегрируемых космологических моделей.

2. Проведена классификация конформно-плоских штеккелевых пространств типа (1.1) и типа (2.1) для вакуумных уравнений гравитации Эйнштейна и вакуумных уравнений гравитации Эйнштейна с Λ - членом.
3. Проведена классификация конформно-плоских штеккелевых пространств типа (1.1) в задаче Вайдья (гравитация с излучением).
4. Найдены все решения для конформно-плоских штеккелевых пространств типа (1.1) в скалярно-тензорной теории гравитации Бранса-Дикке.

Научная и практическая значимость работы

В дальнейшем на базе полученных конформно-плоских изотропных штеккелевых пространств можно проводить анализ и сравнение более сложных космологических моделей для других альтернативных теорий гравитации (дилатонные теории, теории с нелинейными слагаемыми по кривизне и д.р.).

Полученные аналитически интегрируемые модели можно использовать для задач квантования или начального приближения при численном интегрировании.

Результаты работы можно рекомендовать для использования в научных и учебных организациях, в которых ведутся исследования в области теории гравитации, в области интегрирования классических и модифицированных уравнений математической физики в искривленном пространстве-времени: в Московском, Томском, Санкт-Петербургском, Казанском университетах, в Татарском гуманитарно-педагогическом университете.

Результаты, выносимые на защиту:

В диссертационной работе предложен и апробирован новый подход к получению аналитически интегрируемых моделей в метрических теориях гравитации на базе конформно-плоских изотропных штеккелевых пространств. С помощью предложенного подхода найдены аналитические решения для ряда моделей и построена их классификация:

1. Из множества изотропных штеккелевых пространств выделены классы конформно-плоских штеккелевых пространств как удобный инструмент для получения аналитически интегрируемых моделей для метрических теорий гравитации.

2. Построена полная классификация конформно-плоских штеккелевых пространств типа (1.1), типа (2.1) для вакуумных уравнений гравитации Эйнштейна и вакуумных уравнений гравитации Эйнштейна с Λ - членом.
3. Построена полная классификация конформно-плоских штеккелевых пространств типа (1.1) в задаче Вайдья (гравитация с излучением).
4. Построена полная классификация конформно-плоских штеккелевых пространств типа (1.1) в скалярно-тензорной теории гравитации Бранса-Дикке.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы докладывались на:

1. International School/Seminar QUANTUM FIELD THEORY AND GRAVITY, Tomsk State Pedagogical University, July 2 – 7, 2007, Tomsk.
2. Российской летней школе-семинаре "Современные теоретические проблемы гравитации и космологии" GRACOS-2007, 9-16 сентября 2007 г., Казань-Яльчик, Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет.
3. 13-й Российской Гравитационной Конференции - международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике, RUSGRAV-13, 23-28 июня 2008 г., РУДН, Москва.

Исследования, проведенные в диссертационной работе, поддержаны грантом РФФИ, проект № 06-01-00609, и Президентской программой поддержки ведущих научных школ РФ, проект № 4489.2006.2 и проект № 2553.2008.2.

Публикации

По материалам диссертации опубликовано 5 печатных работ (3 статьи опубликованы в ведущих рецензируемых журналах РФ), перечисленных в заключительной части автореферата.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Список литературы состоит из 181 наименования. Общий объем диссертации составляет 122 страницы.

Содержание диссертации

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели работы, указаны научная новизна, научная и практическая значимость результатов работы, сделан краткий обзор по проблематике диссертации, перечислены результаты, выносимые на защиту, приведены структура и содержание диссертации.

Первая глава носит обзорный характер и призвана обеспечить основу для дальнейшего изложения материала диссертации. В ней приводятся общие положения теории штеккелевых пространств, рассмотрена теория разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби, Клейна-Гордона-Фока и основные свойства изотропных штеккелевых пространств.

В общей теории относительности движение пробной частицы в гравитационном поле описывается уравнениями геодезических

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0, \tag{1}$$

которые представляют собой систему дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными. Здесь $i, j, k, l = 1...n; \Gamma^i_{kj}$ - символы Кристоффеля, точкой обозначена производная по каноническому параметру τ.

Здесь и далее по тексту будем придерживаться следующих обозначений.

1. Функции, зависящие только от одной переменной x^i (и, возможно, от параметров λ_j) обозначаются малыми буквами с обязательным единичным правым нижним индексом, в этом случае производные по x^i обозначаются точками. Примеры:

$$\varphi_i = \varphi_i(x^i, \lambda_j), \quad \varphi^{ij}_k = \varphi^{ij}_k(x^k), \quad \dot{\varphi}_i = \frac{d\varphi_i}{dx^i}, \quad \ddot{\varphi}^{ij}_k = \frac{d^2\varphi^{ij}_k}{dx^{k2}}. \tag{2}$$

2. Множество координатных индексов $\mathrm{i, j, k = 1..n}$ разбивается двумя фиксированными целыми неотрицательными числами N, N_0 на три подмножества. Индексы из этих подмножеств обозначаются следующим образом

$$\begin{gathered} p, q, r = 1...N \qquad \mu_0, \nu_0, \tau_0 = N+1...N+N_0 \\ \mu, \nu, \tau = N+1...n \qquad \nu_1, \mu_1, \tau_1 = N+N_0+1..n \end{gathered} \tag{3}$$

3. Применяется правило суммирования Эйнштейна, согласно которому

$$\lambda_p x^p \sim \sum_{p=1}^{n} \lambda_p x^p.$$

Решение уравнения Гамильтона-Якоби

$$g^{ij} S_{,i} S_{,j} = m^2 \qquad (4)$$

удовлетворяющее условию полноты

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_i \partial x^i} \right\| \neq 0, \ \lambda_i = \text{const}, \qquad (5)$$

позволяет свести проблему интегрирования уравнений движения к решению алгебраических уравнений вида $\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} = q^i = \text{const}.$ Здесь λ_i - n существенных параметров. На данный момент эффективным методом построения таких интегралов движения является метод разделения переменных.

Идея метода разделения переменных в линейных дифференциальных уравнениях в частных производных была высказана Фурье в начале XIX века. Позднее метод был усовершенствован и использован для решения уравнения теплопроводности в работах Пуассона, Дирихле, Остроградского.

Для уравнения Гамильтона-Якоби проблема полного разделения переменных была поставлена Штеккелем. В серии работ он решил проблему для случая, когда в привилегированной системе координат метрика пространства задается диагональным метрическим тензором. Необходимые и достаточные условия полного разделения, записанные в виде нелинейных дифференциальных уравнений на компоненты метрического тензора, были получены (но не решены) в работе Леви-Чивита. Яров-Яровой обобщил метод Штеккеля на случай недиагональных метрических тензоров. Окончательно теория разделения (вещественных) переменных в уравнении Гамильтона-Якоби была построена Шаповаловым В.Н.. По предложению Шаповалова пространства, в которых уравнения геодезических можно проинтегрировать методом полного разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби, называются штеккелевыми пространствами. Общий вид метрики штеккелева пространства был опубликован им в 1973 г. После этого были опубликованы работы, в которых авторы в той или иной форме повторили результаты Шаповалова. Новым можно признать результат Бененти, заметившего связь между операторами симметрии уравнения Гамильтона-Якоби и симметрией самого пространства, содержащего набор, состоящий из коммутирующих векторных и тензорных полей Киллинга.

Согласно определению уравнение (4) допускает полное разделение переменных, если существует система координат, называемая привилегированной, в которой полный интеграл уравнения (4) имеет вид:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x^i, \lambda_j), \qquad \lambda_j = \text{const}, \quad \lambda_n = E. \tag{6}$$

Данное соотношение достигается в том и только в том случае, если существует привилегированная система координат x^i, в которой метрический тензор имеет вид

$$g^{pq} = (\Phi^{-1})^{\nu}_{n} h^{pq}_{\nu}, \qquad g^{\nu_0 p} = (\Phi^{-1})^{\nu_0}_{n} h^{\nu_0 p}_{\nu_0}, \qquad g^{\mu_1 \nu_1} = \delta^{\mu_1 \nu_1} (\Phi^{-1})^{\nu_1}_{n} h^{\nu_1 \nu_1}_{\nu_1}. \tag{7}$$

В формулах (7) по индексам ν_0, ν_1 суммирование отсутствует. $(\Phi^{-1})^{\nu}_{n}$ - элементы n-го столбца матрицы, обратной к так называемой матрице Штеккеля, имеющей вид:

$$\Phi^{\nu}_{\mu} = \Phi^{\nu}_{\mu}(x^{\mu}), \qquad \det \Phi^{\nu}_{\mu} \neq 0. \tag{8}$$

При этом функции $\Phi^{\nu}_{\mu}, h^{\nu_0 p}_{\nu_0}, h^{\nu_1 \nu_1}_{\nu_1}, h^{i}_{\nu}, h_{\nu}$ - произвольные функции от своих аргументов.

Первые N переменных в привилегированной системе координат x^i не входят явно в компоненты метрического тензора и поэтому называются игнорируемыми $(S = \lambda_p x^p + \sum_{i=N+1}^{n} \varphi_i(x^i, \lambda_j))$.

Пространство с метрическим тензором (7) допускает N - параметрическую абелеву группу движений. Из множества полных наборов штеккелева пространства принято всегда рассматривать только набор, векторные поля которого образуют абелеву группу максимально возможного ранга. Тогда имеется инвариантная характеристика набора, задаваемая числами N и $N_0 = N - rank(g_{ij} Y^i_p Y^j_q)$, где Y^i_p - векторные поля, входящие в полный набор интегралов движения уравнения Гамильтона-Якоби. Числа N и N_0 задают тип штеккелева пространства (и тип полного разделения переменных, а также тип полного набора). Соответствующее штеккелево пространство принято называть штеккелевым пространством типа (N, N_0) (или просто – пространством типа (N, N_0) в тех случаях, когда это не вызывает недоразумений).

В искривленном пространстве $N < n$. Если задана лоренцевская сигнатура $(-,-,-,+)$, то в этом случае N_0 может принимать одно из двух значений - 0,1. Если $N_0 = 1$, одна из компонент метрического тензора $g^{\nu\nu}$ в (7) обращается в нуль. Соответствующая переменная называется изотропной, само же пространство - изотропным штеккелевым пространством, при $N_0 = 0$ все компоненты $g^{\nu\nu}$ отличны от нуля, пространство называется неизотопным штеккелевым пространством. В теории гравитации именно изотропные штеккелевы пространства представляют наибольший интерес, поскольку они описывают пространство - время с гравитационным излучением. Гиперповерхности уровня изотропной переменной совпадают с фронтом гравитационной волны, в случае пространств с электромагнитным излучением также с фронтом электромагнитной волны (пространства электровакуума).

То, что уравнения геодезических могут быть проинтегрированы методом полного разделения переменных, дает возможность не только изучить поведение пробных тел в данных пространствах, но и осуществить переход к синхронным системам отсчета (которые существуют всегда), в явном виде возможный лишь при условии, что уравнение геодезических можно точно проинтегрировать. В синхронных системах отсчета можно дать ответы на важные физические вопросы, связанные, например, с нахождением источников гравитационного поля. Синхронные системы отсчета можно использовать для физической интерпретации точных решений уравнений Эйнштейна. Известны примеры, когда интерпретацию удается провести для штеккелевых пространств.

В первой главе так же приведен общий вид метрик штеккелевых пространств в 4-мерном пространстве-времени с лоренцевской сигнатурой, на основе введенной общей классификации штеккелевых пространств по типам.

В параграфе 1.3 приведены основные свойства изотропных штеккелевых пространств.

Во **второй главе** решается задача о классификации метрик конформно-плоских штеккелевых пространств типа (1.1) и типа (2.1) для вакуумных уравнений Эйнштейна с Λ - членом и без Λ - члена. На базе решения вакуумных уравнений Эйнштейна можно проверить возможности использования конформно-плоских изотропных штеккелевых пространств, на базе которых возможно нахождение аналитических решении в более сложных и физически интересных космологических задачах. Полученные при этом решения можно анализировать и физически интерпретировать, что немаловажно.

Рассмотрение начато с класса конформно-плоских штеккелевых пространств типа (1.1), по классификации штеккелевых пространств имеется один вектор Киллинга и одна изотропная переменная. Так же рассматривается класс конформно-плоских штеккелевых пространств типа (2.1), имеющий два коммутирующих вектора Киллинга и одну изотропную переменную. Метрики конформно-плоских штеккелевых пространств записаны в привилегированной системе координат, пространства типа (1.1) зависят от трех переменных, пространства типа (2.1) зависят от двух переменных. Исследование пространств допускающих наличие изотропных переменных обусловлено возможностью изучения волновых явлений (электромагнитные, гравитационные и д. волны), что представляет интерес для построения космологических моделей. Использование классической теории гравитации Эйнштейна позволило отладить предлагаемую методику.

При наложении на исходную метрику штеккелевых пространств типа (1.1) и типа (2.1) условия принадлежности к классу конформно-плоских пространств возникает несколько классов.

Конформно-плоских штеккелевых пространств типа (1.1) содержат 2 класса:

1)

$$ds^2 = \frac{1}{\Delta}(2(t_2(x^2)+t_3(x^3))dx^0dx^1 + G(x^2,x^3)(dx^1)^2 - t_3(x^3)(dx^2)^2 - t_2(x^2)(dx^3)^2), \qquad (9)$$

$$G(x^2,x^3) = (t_2(x^2)+t_3(x^3))[r + q(\frac{1}{t_2(x^2)} - \frac{1}{t_3(x^3)})],$$

где $t_2(x^2)$ и $t_3(x^3)$ удовлетворяют уравнениям:

$$t_2'' = t_2^{\,2}(at_2^{\,2} + bt_2 + c), \qquad t_3'' = t_3^{\,2}(-at_3^{\,2} + bt_3 - c), \qquad (10)$$

a, b, c, r, q - константы, $\Delta(x^0, x^1, x^2, x^3)$ - произвольная функция.

2)

$$ds^2 = \frac{1}{\Delta}(2p\,dx^0dx^1 + G(x^2,x^3)(dx^1)^2 - \tau_0(x^0)(dx^2)^2 - (p - \tau_0(x^0))(dx^3)^2), \qquad (11)$$

$$G(x^2,x^3) = -pg_3(x^3) + \tau_0(x^0)(g_3(x^3) - g_2(x^2)), \qquad (12)$$

где $\tau_0(x^0)$ удовлетворяет уравнениям

$$(\tau_0')^2 = Y(\tau_0). \qquad (13)$$

$$2x^2(x-p)^2[x^2(\alpha-\beta) + 2p\beta x - p^2\beta] + 3p(2x-p)Y(x) - px(x-p)Y'(x) = 0. \qquad (14)$$

α, β, γ, p - константы, $g_2(x^2)$ и $g_3(x^3)$ определяются условием

$$g_2''(x^2) = const = lp^2, \qquad g_3''(x^3) = const = sp^2, \qquad l, s - const, \qquad (15)$$

$\Delta(x^0,x^1,x^2,x^3)$ - произвольная функция.

Данные метрики используются при решении вакуумных уравнений Эйнштейна без Λ - члена:

$$R_{ij} = 0 \qquad (16)$$

где R_{ij} - тензор Риччи.

Также получены решения вакуумных уравнений Эйнштейна с Λ - членом:

$$R_{ij} - \Lambda g_{ij} = 0, \qquad (17)$$

где Λ - космологическая постоянная.

Конформно-плоские штеккелевы пространства типа (2.1) содержат 3 класса:

1)

$$ds^2 = \frac{1}{\Delta}(a_3(x^3)(dx^0)^2 + 2p_3(x^3)dx^0dx^1 + 2dx^0dx^2 + c_3(x^3)(dx^1)^2 + (dx^3)^2), \qquad (18)$$

где $\Delta(x^0,x^1,x^2,x^3)$ - произвольная функция, другие функции имеют вид

$$c_3(x^3)=\frac{1}{(ax^3+b)^2}, \tag{19}$$

$$p_3=\frac{2r+2lbx^3+la(x^3)^2}{2(ax^3+b)^2}, \tag{20}$$

$$a_3=\frac{(2ar-lb^2)^2}{4a^2(ax^3+b)^2}+k(ax^3+b)^2+s. \tag{21}$$

2)

$$ds^2=\frac{1}{\Delta}(a_3(x^3)(dx^0)^2+2p_3(x^3)dx^0dx^1+2dx^0dx^2+c(dx^1)^2+(dx^3)^2), \tag{22}$$

где $\Delta(x^0,x^1,x^2,x^3)$- произвольная функция, другие функции имеют вид

$$p_3=px^3+q, \quad p,q-const, \tag{23}$$

$$a_3=\frac{p^2}{c}(x^3)^2+ax^3+b, \quad a,b-const. \tag{24}$$

3)

$$ds^2=\frac{1}{\Delta}(a_3(x^3)(dx^0)^2+2pdx^0dx^1+2dx^0dx^2+c_2(x^2)(dx^1)^2+(dx^3)^2), \tag{25}$$

где $\Delta(x^0,x^1,x^2,x^3)$ - произвольная функция, другие функции имеют вид

$$a_3=a(x^3)^2+bx^3+c, \quad c_2{}'=c_2\sqrt{qc_2-4a}, \quad a,b,c,q-const. \tag{26}$$

Для конформно-плоских штеккелевых пространств типа (1.1) и (2.1) найдены все решения для вакуумных уравнений гравитации Эйнштейна (16) и (17).

Для полученных классов метрик было проведено разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби (4) и уравнении эйконала:

$$g^{ij}S_{,i}S_{,j}=0. \tag{27}$$

В **третьей главе** решается задача о классификации метрик конформно-плоских штеккелевых пространств типа (1.1) в задаче Вайдья.

Задача интегрирования уравнений Энштейна, в которых тензор энергии-импульса имеет вид:

$$T_{ij}=\frac{1}{4\pi}Q(x^0,x^1,x^2,x^3)l_il_j, \quad l_il^i=0 \tag{28}$$

носит название задачи Вайдья. $Q(x^0,x^1,x^2,x^3)$ - плотность потока излучения, l_i - изотропный вектор.

К задаче Вайдья, в частности сводятся уравнения Эйнштейна, описывающие высокочастотное излучение (гравитационное, электромагнитное, и т.д.) малой амплитуды, распространяющиеся на фоне искривленного пространства-времени.

Эта задача построена на основе модели, в которой тензор энергии-импульса высокочастотного низко-амплитудного излучения сводится к виду (28). Изучение движения безмассовых частиц является эффективным средством изучения структуры пространства-времени и процессов, проходящих в нем. В связи с этим представляет интерес использование штеккелевых пространств в задаче Вайдья, что позволяет получить аналитические решения для движения безмассовых частиц.

В диссертационной работе задача Вайдья исследуется с целью апробации конформно-плоских изотропных штеккелевых задач в решении космологических задач с излучением.

Рассматриваются метрики (9), (11) с условиями на функции, приведенные выше. Решаются полевые уравнения:

$$R_{ij} = l_i l_j \,. \tag{29}$$

При этом отметим, что изотропные векторы заданы в виде:

$$l_i = \left\{ l_0(x^0), l_1(x^1), l_2(x^2), l_3(x^3) \right\}. \tag{30}$$

Следствие условия изотропности из (28):

$$R = 0 \,. \tag{31}$$

Исходя из вида компонент полевых уравнений (29), можно провести ряд преобразований метрического тензора приводящих к упрощению исследуемых уравнений.

В итоге мы получаем метрики:

$$ds^2 = \Delta^2 (2dx^0 dx^1 + G(dx^1)^2 + T(dx^2)^2 + (1-T)(dx^3)^2)\,, \tag{32}$$

где функции G, T имеют различный вид для (9) и (11)

1)

$$T = \frac{t_3}{t_2 + t_3}, \qquad G = q\left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_3}\right), \tag{33}$$

где t_2, t_3 имеют вид (10).

2)

$$T = \tau_0, \qquad G = -(\alpha\,(x^2)^2 + \alpha_1\, x^2 + \alpha_2)\,\tau_0 - (\beta\,(x^3)^2 + \beta_1\, x^3)(1-\tau_0), \tag{34}$$

где τ_0 удовлетворяет уравнениям (13) и (14).

В итоге построена классификация конформно-плоских штеккелевых пространств типа (1.1) в задаче Вайдья (Вселенная с излучением). Получено 4 класса решений.

В **четвертой главе** решается задача о классификации метрик конформно-плоских штеккелевых пространств типа (1.1) в скалярно-тензорной теории гравитации Бранса-Дикке.

В свое время скалярно-тензорная теория гравитации Бранса-Дикке рассматривалась как весьма перспективное обобщение ОТО.

Имеющиеся на данный момент наблюдательные данные показывают, что рамок ОТО недостаточно для построения адекватных космологических моделей. Поэтому в настоящее время идет поиск альтернативных теорий гравитации. Теория гравитации Бранса-Дикке является одной из первых альтернативных скалярно-тензорных теорий гравитации и интерес к ней сейчас значительно вырос.

Теория Бранса-Дикке отличается от ОТО видом полевых уравнений, но воздействие гравитации на физические системы в теории Бранса-Дикке и ОТО эквивалентно и определяется метрическим тензором. В теории Бранса-Дикке как и в ОТО, пробные частицы движутся по геодезическим, поэтому в теории Бранса-Дикке представляют интерес штеккелевы пространства, которые допускают по определению интегрирование уравнений движения пробных частиц в форме уравнений Гамильтона-Якоби методом полного разделения переменных. С другой стороны, при нахождении точных решений уравнений поля в теории Бранса-Дикке штеккелевы пространства играют более важную роль, чем в ОТО, поскольку в этих пространствах имеется возможность найти общее решение скалярного уравнения, входящего в систему полевых уравнений теории Бранса-Дикке. В настоящее время скалярно-тензорные теории вызывают интерес как низкоэнергетические приближения квантово-полевых теорий. Поэтому интерес к теории Бранса-Дикке как модельной теории значительно вырос (в частности, в теории суперструн Грина-Шварца возникают уравнения, аналогичные уравнениям теории Бранса-Дикке).

Интерес к этой теории в диссертационном исследовании вызван тем, что на основе скалярно-тензорной теории Бранса-Дикке можно проиллюстрировать предлагаемый в диссертации подход нахождения аналитических решений для альтернативных (метрических) теорий гравитации.

Метрики конформно-плоских штеккелевых пространств типа (1.1) заданы в виде (2) и (4) с условиями на функции, приведенными выше.

В диссертационной работе используются полевые уравнения теории Бранса-Дикке для вакуума имеющие вид:

$$\begin{cases} \phi^{;\alpha}_{;\alpha} = 0 \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{\omega}{\phi^2}(g_{\mu\nu}\phi^{;\alpha}\phi_{;\alpha} - \phi_{;\mu}\phi_{;\nu}) - \frac{1}{\phi}(g_{\mu\nu}\phi^{;\alpha}_{;\alpha} - \phi_{;\mu\nu}). \end{cases} \tag{35}$$

Здесь ϕ - скалярное поле; ω - константа. Разделение переменных в скалярном уравнении приводит к следующему виду функции ϕ:

$$\phi = \prod_{i=1}^{n} \phi_i(x^i) \tag{36}$$

(мультипликативное разделение переменных). Вид уравнений (35) можно упростить, если исключить скалярную кривизну и вместо ϕ ввести новую величину

$$\Phi = ln\,|\,\phi\,| = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x^i), \qquad (37)$$

допускающую разделение переменных аддитивного типа.

Тогда уравнения (35) примут вид

$$\begin{cases} \Phi_{;\alpha}^{;\alpha} + \Phi^{;\alpha}\Phi_{;\alpha} = 0 \\ R_{\mu\nu} = (\omega+1)\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu} + \Phi_{;\mu\nu} \end{cases} \qquad (38)$$

Для упрощения решаемых уравнений делается преобразование метрики, аналогичное преобразованиям задачи Вайдья. В итоге получим метрику вида (32) с условиями на функции (33) и (34). Проведем дополнительное преобразование, выбираем вид конформного фактора $\Delta = \tilde{\Delta}(\Phi), \;\; \Phi = \sum_{i=0}^{3} \Phi_i$.

Полученные в результате уравнения значительно проще исходных, в итоге была построена классификация конформно-плоских штеккелевых пространств типа (1.1) в скалярно-тензорной теории гравитации Бранса-Дикке. Таким образом, было получено 9 классов решений.

В **заключении** перечислены основные результаты, полученные в диссертации:

1. Найдены все метрики для вакуумных конформно-плоских штеккелевых пространств типа (1.1) с Λ - членом, найдены все метрики для вакуумных конформно-плоских штеккелевых пространств типа (1.1) без Λ - члена.
2. Найдены все метрики для вакуумных конформно-плоских штеккелевых пространств типа (2.1) с Λ - членом, найдены все метрики для вакуумных конформно-плоских штеккелевых пространств типа (2.1) без Λ - члена.
3. Получены решения уравнения Гамильтона-Якоби и уравнения эйконала для найденных классов метрик вакуумных конформно-плоских штеккелевых пространств типа (1.1) и типа (2.1).
4. Найдены все метрики конформно-плоских штеккелевых пространств типа (1.1) в задаче Вайдья (гравитация с излучением).
5. Найдены все метрики конформно-плоских штеккелевых пространств типа (1.1) в скалярно-тензорной теории гравитации Бранса-Дикке.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

[1]. Рыбалов Ю. А. Конформно-плоские пространства, допускающие разделения переменных в уравнении Эйконала //Труды Российской школы-семинара по гравитации и космологи:

Современные теоретические проблемы гравитации и космологии. Казань-Яльчик. 2007. С. 147-151.

[2]. Obukhov V. V., Osetrin K. E., Rybalov Yu. A. Conformally flat spaces admitting complete separation of variables in the Eikonal equation //GRAVITATION & COSMOLOGY. 2008. Vol. 14, №1, P. 104-108.

[3]. Задача Вайдья в конформно-плоских штеккелевых пространствах типа (1.1) / В. В. Обухов, К. Е. Осетрин, А. Е. Филиппов, Ю. А. Рыбалов // Известия ВУЗов. Физика. 2009. т. 52. №1. С. 12-14.

[4]. Конформно-плоские штеккелевы пространства в теории Бранса-Дикке / В. В. Обухов, К. Е. Осетрин, А. Е. Филиппов, Ю. А. Рыбалов // Известия ВУЗов. Физика. 2009. т. 52. №2. С. 54-58.

[5]. Conformally flat Stäckel space in Brans-Dicke theory / V. V. Obukhov, K. E. Osetrin, A. E. Filippov, Yu. A. Rybalov. Problems of modern Gravity. A volume in honor of Professor S.D. Odintsov in the occasion of his 50th birthday: Tomsk State Pedagogical University Press, 2009. P. 228-232.