Томский государственный университет

На правах рукописи

Пупасов Андрей Михайлович

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2009

Работа выполнена на кафедре квантовой теории поля
ГОУ ВПО «Томский государственный университет» и
на кафедре ядерной и математической физики
Свободного брюссельского университета

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор **Самсонов Борис Федорович**; профессор **Жан-Марк Спаренберг**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Бухбиндер Иосиф Львович**; кандидат физико-математических наук, **Шамшутдинова Варвара Владимировна**
Ведущая организация:	ФГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Защита состоится 24 сентября 2009 г. в 14-30 на заседании диссертационного совета Д 212.267.07 при ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: 634050, Томск, пр. Ленина, 36

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке ГОУ ВПО «Томский государственный университет»

Автореферат разослан «___» «___» 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.267.07
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник Ивонин И. В.

1 Общая характеристика работы

1.1 Актуальность темы исследований

В настоящий момент, в основном благодаря экспериментальному прогрессу в таких областях, как физика конденсированного состояния (исследование сверхохлажденных газов, получение Бозе-Эйнштейновского конденсата), ядерная физика (низко энергетические ядерные столкновения, исследование структуры экзотических ядер, астрофизика звезд), квантовая оптика и квантовые вычисления, возрос интерес к изучению низко-энергетических квантовых систем, в основном, конечно, многочастичных. Исследование таких систем зачастую требует решения вспомогательных двухчастичных задач, причем взаимодействующие частицы могут обладать сложной внутренней структурой. Поскольку в рассматриваемой области релятивистские эффекты малы, для описания двухчастичного взаимодействия может быть использовано уравнение Шредингера. Внутренняя структура взаимодействующих частиц приводит к различным асимптотическим (в пределе отстутствия взаимодействия) состояниям, или каналам. При низких энергиях, лишь несколько каналов (в частном случае - один) и парциальных волн существенны. Динамика таких систем зачастую может быть описана системой N связанных радиальных уравнений Шредингера.

Одна из важных теоретических задач - изучение динамики таких систем, например эволюции волновых пакетов, сводится к решению задачи Коши для нестационарного уравнения Шредингера, или к вычислению пропагатора. Иногда столь детальное описание излишне, достаточно знать решение задачи рассеяния, которое дается матрицей рассеяния. Другая важная задача – обратная задача рассеяния, возникающая при анализе экспериментальных данных, заключается в восстановлении характера взаимодействия по имеющимся данным рассеяния. Кроме того, точные аналитические результаты в квантовой механике важны для детального понимания явлений. Отметим также, что для существующих численных методов решения подобных задач, аналитические результаты представляют значительный интерес с точки зрения тестовых моделей, особенно в многоканальном случае.

Таким образом, получение новых точных аналитических результатов, связанных с задачей Коши и задачей рассеяния для (многоканального) уравнения Шредингера, является актуальной задачей. Среди наиболее востребованных методов исследования уравнения Шредингера следует отметить метод преобразования Дарбу, в зарубежной литературе более известный как суперсимметричная квантовая механика.

Многие аспекты преобразования суперсимметрии в квантовой механике являются хорошо изученными. Однако, некоторые задачи, связанные с нахождением замкнутых аналитических выражений для фундаментальных решений – функции Грина стационарного и пропагатора нестационарного уравнений Шредингера, оставались нерешенными как для эрмитовых, так и для неэрмитовых гамильтонианов. Отметим, что в случае неэрмитовых гамильтонианов, изучение эволюции таких систем *(открытых или диссипативных)* приводит к задаче вычисления пропагаторов для нестационарного уравнения Шредингера с неэрмитовыми гамильтонианами.

Более существенные пробелы имеются в случае преобразования суперсимметрии в применении к многоканальным задачам (матричное уравнение Шредингера). По сравнению с одноканальным случаем, известно значительно меньше точно решаемых матричных потенциалов, которые могли бы выступать в роли исходных потенциалов. Поэтому, исходный потенциал практически всегда является диагональным. Возникает вопрос – может ли преобразование суперсимметрии приводить к недиагональному потенциалу с нетривиальной связью между каналами рассеяния? Во-вторых, поведение спектра многоканального уравнения Шредингера при преобразованиях суперсимметрии может существенно отличаться от одноканального случая. В-третьих, преобразования таких важных объектов как матрица рассеяния и матрица Иоста не были в достаточной степени изучены. Именно возможность управлять изменением матрицы рассеяния позволяет решать обратную задачу рассеяния с помощью преобразования суперсимметрии.

1.2 Основные цели и задачи работы

В соответствии с наиболее актуальными областями применения метода суперсимметричной квантовой механики и имеющимися нерешенными проблемами, в данной диссертации были поставлены следующие основные цели:

1. Исследование фундаментальных решений стационарного и нестационарного уравнений Шредингера в суперсимметричной квантовой механике. Установление соотношений между функциями Грина и пропагаторами для гамильтонианов, связанных преобразованием суперсимметрии. Получение новых точных пропагаторов для многоямных, нестационарных и неэрмитовых потенциалов, генерируемых преобразованием суперсимметрии.

2. Исследование многоканальной задачи рассеяния методами суперсимметричной квантовой механики. Изучение свойств матрицы рассеяния и матрицы Иоста, установление спектральных свойств и свойств рассеяния для преобразованных гамильтонианов. Применение полученных аналитических результатов для описания двухканального рассеяния в атомной и ядерной физике (рассеяния атомов в сверх-охлажденных газах щелочных металов, нейтрон-протонное рассеяние).

1.3 Научная новизна и практическая значимость работы

Все основные результаты работы являются оригинальными и получены впервые. Найдены соотношения, связывающие функции Грина и пропагаторы для исходной и преобразованной систем. Используя эти соотношения вычислены новые точные пропагаторы. Для многоканальных задач изучено изменение спектра и матрицы рассеяния под действием преобразования суперсимметрии. Полученные результаты используются для построения точно решаемых моделей, описывающих резонанс Фешбаха при рассеянии сверхохлажденных паров ^{85}Rb в магнитном поле и нейтрон-протонное рассеяние.

Материалы диссертации представляют интерес для специалистов в области квантовой механики, атомной, ядерной и математической физики. Новые точные пропагаторы могут использоваться при моделировании процессов эволюции в квантовых системах. Результаты, полученные при применении преобразования суперсимметрии к многоканальному уравнению Шредингера могут найти практическое применение для эффективного решения обратной задачи рассеяния. Полученный феноменологический нейтрон-протонный потенциал может использоваться при построении кластерных моделей ядра.

1.4 Достоверность научных выводов и результатов

Достоверность сформулированных в диссертации положений и выводов контролируется их внутренней согласованностью и совпадением в ряде частных случаев с результатами других авторов.

1.5 Личный вклад автора

Все без исключения результаты научных исследований, вошедшие в диссертацию, получены лично автором, либо при его непосредственном участии в постановке задач и обсуждении результатов.

1.6 Основные положения выносимые на защиту

1. Получены соотношения, связывающие пропагаторы и функции Грина двух одномерных уравнений Шредингера, сплетаемых преобразованием суперсимметрии. Вычислены новые точные пропагаторы для серии многоямных потенциалов, а также для некоторых нестационарных и неэрмитовых потенциалов.
2. Для многоканального уравнения Шредингера с различными порогами изучено неконсервативное преобразование суперсимметрии. Найден спектр (связанные, виртуальные состояния и резонансы) неконсервативного суперпартнера нулевого потенциала.
3. Построена точно-решаемая модель резонанса Фешбаха. Модель апробирована на экспериментальных данных для Rb^{85}.
4. Для многоканального уравнения Шредингера с совпадающими порогами изучены консервативные преобразования первого и второго порядка. Найдены условия, при которых преобразование суперсимметрии сплетает гамильтонианы с несвязанными и связанными каналами рассеяния.
5. Для парциальных волн разной четности найдено смешивающее преобразование суперсимметрии первого порядка, сохраняющее фазовые сдвиги. Для парциальных волн одной четности найдено преобразование второго порядка, с неэрмитовым промежуточным гамильтонианом, сохраняющее фазовые сдвиги.
6. С помощью цепочки одноканальных и матричных преобразований суперсимметрии получен феноменологический нейтрон-протонный потенциал для ${}^3S_1 -{}^3 D_1$ каналов.

1.7 Апробация работы

Результаты, изложенные в диссертации, докладывались и обсуждались на семинарах кафедр теоретической физики и квантовой теории поля Томского государственного университета. Основные результаты работы были представлены на следующих международных конференциях и семинарах:
1. 6-ая международной конференции “Симметрия в нелинейной математической физике”, (Киев, Украина, 2005),
2. International Workshop “Pseudo-Hermitian Hamiltonians in Quantum Physics”, (Istanbul, Turkey, 2005),
3. Международная школа-семинар “Современные методы теоретической и математической физики, Волга-15”, (Казань, 2006),

4. Международная школа-семинар “Квантовая теория поля и гравитация” (Томск, 2007),
5. International Conference on Inverse Quantum Scattering Theory (Siofok, Hungary, 2007),
6. Конференция BRIX workshop (Мол, Бельгия, 2008),
7. XXVII-ый международный коллоквиум по групповым методам в физике (Ереван, Армения, 2008),
8. Ежегодная конференция бельгийского физического сообщества “BPS general scientific meeting” (Hasselt, Belgium, 2009).

1.8 Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав основного содержания, заключения и списка цитируемой литературы из 156 наименований. Материал изложен на 168 страницах, набранных в издательской системе LaTeX, и иллюстрирован 40 рисунками.

2 Краткое содержание диссертации

Во введении приводится краткий литературный обзор использования метода суперсимметричной квантовой механики и формулируются основные цели и задачи работы. Изложены краткое содержание диссертации и выносимые на защиту положения. Охарактеризована апробация научных работ автора.

Глава I. Суперсимметрия уравнения Шредингера

Суперсимметричная квантовая механика предложена Виттеном как тестовая модель для изучения спонтанного нарушения суперсимметрии. Как известно, суперсимметричная квантовая механика тесно связана с преобразованием Дарбу и методом факторизации, который был предложен Шредингером и развит Инфельдом и Холлом. Цепочки преобразований Дарбу позволяют конструировать модели с полиномиальной алгеброй суперсимметрии. Метод суперсимметричной квантовой механики привел к целому ряду новых точно решаемых квантовых моделей.

Первая глава посвящена обзору преобразований суперсимметрии (одноканального) уравнения Шредингера и содержит хорошо известные результаты. Преобразование суперсимметрии вводится в рамках стандартного подхода, заключающегося в использовании дифференциальных операторов преобразования. Такой подход наиболее удобен при рассмотрении полиномиальных обобщений суперсимметрии, которые эквивалентны преобразованиям Дарбу высших порядков.

В первом разделе вводится преобразование Дарбу стационарного уравнения Шредингера. Рассмотрим пару одномерных уравнений Шредингера

$$h_{0,N}\Psi = E\Psi \,, \qquad h_{0,N} = -\partial_x^2 + V_{0,N}(x)\,, \tag{1}$$

с гамильтонианами h_0 и h_N такими, что существует дифференциальный оператор N-го порядка L удовлетворяющий следующим свойствам
1. Соотношение сплетения

$$Lh_0 = h_N L\,, \qquad h_0 L^+ = L^+ h_N\,. \tag{2}$$

2. Свойство факторизации

$$L^+L = P_N(h_0) \qquad LL^+ = P_N(h_N) \tag{3}$$

$$P_N(x) = (x-\alpha_0)\dots(x-\alpha_{N-1})$$

$$\mathrm{Im}(\alpha_i) = 0 \qquad \alpha_i \neq \alpha_{k\neq i} \qquad i,k = 0,\dots,N-1\,. \tag{4}$$

Здесь "+" обозначает операцию формального сопряжения, удовлетворяющую свойствам $\partial_x^+ = -\partial_x$, $(AB)^+ = B^+A^+$, $i^+ = -i$ и $(A^+)^+ = A$. Корни α_n полинома $P_N(x)$ называются постоянными факторизации. Если это не оговорено особо, предполагается, что полином $P_N(x)$ не имеет кратных и комплексных корней. Оператор преобразования полностью определяется набором N *функций преобразования* $u_n(x)$, которые являются решениями стационарного уравнения Шредингера с гамильтонианом h_0:

$$h_0 u_n = \alpha_n u_n\,, \quad n = 0,\dots,N-1\,.$$

В этом случае действие оператора преобразования L записывается с помощью формулы Крама-Крейна

$$Lf = \frac{W(u_0,u_1,\dots,u_{N-1},f)}{W(u_0,u_1,\dots,u_{N-1})}\,. \tag{5}$$

Здесь W обозначает вронскиан

$$W = W(u_0,u_1,\dots,u_{N-1}) = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_{N-1} \\ u_0' & u_1' & \dots & u_{N-1}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_0^{(N-1)} & u_1^{(N-1)} & \dots & u_{N-1}^{(N-1)} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Вронскианы W_n, которые будут часто использоваться в дальнейшем, не содержат одну из функций преобразования, $W_n = W_n(u_0,u_1,\dots,\hat{u}_n,\dots,u_{N-1})$. Там, где это не вызовет путаницы, будет использоваться сокращенная запись $W_n(x)$, не указывающая явно функции преобразования от которых вычисляется вронскиан.

Преобразования первого и второго порядков являются базовыми элементами для преобразований высших порядков, поэтому эти два случая рассмотрены более подробно. Оператор преобразования первого порядка имеет следующий вид

$$L := -(\ln u)' + \partial_x = -w + \partial_x\,. \tag{7}$$

Для цепочек преобразования вычислено действия оператора преобразования на решения уравнения Шредингера, соответствующие константам факторизации и не являющиеся волновыми функциями. С точностью до постоянного множителя, полученые формулы совпадают с формулами Крама-Крейна. Этот вспомогательный результат, впоследствии используется в главе IV при вычислении пропагаторов.

Во втором разделе рассматривается преобразование Дарбу нестационарного уравнения Шредингера. В третьем разделе приводятся следующие известные примеры точно решаемых моделей, генерируемых с помощью преобразования Дарбу: многосолитонные потенциалы, нестационарный односолитонный потенциал, многоямные потенциалы с квазиэквидистантым спектром, полученные из потенциала гармонического осциллятора. На основе полученных в последующих главах соотношений между пропагаторами исходного и преобразованного уравнения Шредингера, для данных потенциалов будут вычислены пропагаторы.

Глава II. Суперсимметричная функция Грина

Вторая глава посвящена преобразованию суперсимметрии для функции Грина G стационарного уравнения Шредингера, $(h_0 - E)G_0(x, y, E) = \delta(x - y)$. В первом разделе установлены выражения для преобразованой функции Грина в случае суперсимметрии первого и второго порядков.

Теорема 1. *Пусть гамильтониан h_1 связан преобразованием суперсимметрии первого порядка с гамильтонианом h_0. Тогда функция Грина $G_1(x, y; E)$ задачи Штурма-Лиувилля на интервале (a, b) стационарного уравнения Шредингера с гамильтонианом h_1 выражается через функцию Грина исходного уравнения $G_0(x, y; E)$ следующим образом:*

$$G_1(x, y, E) = \frac{1}{E - \alpha} L_x L_y G_0(x, y, E)\,, \quad E \neq \alpha = E_0\,, \tag{8}$$

$$G_1(x, y, \alpha) = \frac{-1}{u(x)u(y)} \int_a^x u^2(t)dt \int_y^b u^2(t)dt\,, \qquad x < y\,. \tag{9}$$

Здесь через L_x обозначен оператор преобразования первого порядка (7)*, а через L_y тот же оператор после замены $x \to y$.*

Теорема 2. *Пусть гамильтониан h_2 связан преобразованием суперсимметрии второго порядка с гамильтонианом h_0. Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля $G_2(x, y; E)$ стационарного уравнения Шредингера с гамильтонианом h_2 выражается через функцию Грина исходного уравнения $G_0(x, y; E)$ следующим образом:*

$$G_2(x, y, E) = \frac{1}{(E - \alpha_1)(E - \alpha_2)} L_x L_y G_0(x, y, E)\,, \quad x < y\,, \quad E \neq \alpha_1, \alpha_2\,, \tag{10}$$

где действие оператора L определено в (5).

Случаи $E = \alpha$ и $E = \alpha_{1,2}$ проанализированы отдельно. На основе полученных соотношений во втором разделе вычисляется ряд точных функций Грина для задачи Штурма-Лиувилля на интервале (a, b).

В третьем разделе рассматриваются гамильтонианы с дискретным и непрерывным спектрами. Соотношения между функциями Грина гамильтонианов с полностью дискретным спектром, связанных преобразованием суперсимметрии, изучались Сукумаром. В частности им была получена "следовая" формула, которую Сукумар обобщил и для случая присутствия непрерывного спектра. В диссертации показано, что в присутствии непрерывного спектра выражение полученное Сукумаром является неправильным. Необходимо учитывать дополнительный вклад, который вычислен в нашей работе. Таким образом, для рассеивающих потенциалов (задача на всей оси) найдена поправка к "следовой формуле" Сукумара.

Рассмотрим разность между следами функций Грина исходного и преобразованного уравнений (формула для этой разности и называется "следовой" формулой):

$$\int_a^b [G_0(x, x, E) - G_1(x, x, E)]dx = \Delta(E)\,. \tag{11}$$

Установлен следующий результат.

Теорема 3. *Пусть потенциалы $V_{0,1}(x)$, являющиеся суперпартнерами, удовлетворяют условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)|V_{0,1}(x)|dx < \infty\,, \tag{12}$$

то есть, являются "рассеивающими" потенциалами. Тогда разность (11) *для функций Грина, которые связаны преобразованием суперсимметрии дается выражением:*

$$\Delta(E) = \frac{\delta}{\kappa^2 + ia\kappa} - \frac{\delta}{\kappa^2 + a^2}\,, \tag{13}$$

где $E = \kappa^2$, $\alpha = -a^2$; $\delta = 1$ в случае $\alpha = E_0$, $\delta = -1$ в случае $\alpha < E_0$ и $\delta = 0$ в случае изоспектрального преобразования суперсимметрии.

Глава III. Суперсимметричный пропагатор

Пропагатор является матричным элементом оператора эволюции $U(t)$ в координатном представлении $K(x,y;t) = \langle x|U(t)|y\rangle$ и удовлетворяет уравнению Шредингера как по x, так и по y, с начальным условием в виде дельта-функции Дирака

$$[i\partial_t - h]K(x,y;t) = 0\,, \quad K(x,y;0) = \delta(x-y)\,. \tag{14}$$

В силу унитарности оператора эволюции, пропагатор обладает следующим свойством симметрии: $K^*(x,y;-t) = K(y,x;t)$. Решение задачи Коши записывается следующим образом:

$$\psi(x,t) = \int_a^b K(x,y,t)\psi(y,0)dy\,.$$

В первом разделе установлены соотношения между пропагаторами для гамильтонианов, связанных преобразованиями суперсимметрии первого порядка.

Теорема 4. *Пусть гамильтонианы h_1 и h_0 связаны преобразованием суперсимметрии первого порядка* (7). *Тогда пропагатор $K_1(x,y;t)$ нестационарного уравнения Шредингера с гамильтонианом h_1 выражается через функцию Грина $G_0(x,y;\alpha)$ (либо через вспомогательную функцию $\widetilde{G}_0(z,y,E_0)$) и исходный пропагатор $K_0(x,y;t)$ следующим образом:*

$$\alpha = E_0 \Rightarrow K_1(x,y,t) = L_x L_y \int_a^b K_0(x,z,t)\widetilde{G}_0(z,y,E_0)dz\,, \tag{15}$$

$$\alpha < E_0 \Rightarrow K_1(x,y,t) = L_x L_y \int_a^b K_0(x,z,t)G_0(z,y,\alpha)dz + \phi_{-1}(x)\phi_{-1}(y)\mathrm{e}^{-i\alpha t}, \tag{16}$$

$$\alpha = E_0\,, \mathrm{spec}h_0 = \mathrm{spec}h_1 \Rightarrow K_1(x,y,t) = L_x L_y \int_a^b K_0(x,z,t)G_0(z,y,\alpha)dz\,. \tag{17}$$

Здесь используется вспомогательная функция

$$\widetilde{G}_0(z,y,E_0) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\psi_m(x)\psi_m(y)}{E_m - E_0} = \lim_{E\to E_0}\left[G_0(z,y,E) - \frac{\psi_0(x)\psi_0(y)}{E_0 - E}\right],$$

В случае, если $\alpha = E_0$ данный результат может быть упрощен.

Теорема 5. *Пусть функция преобразования совпадает с волновой функцией основного состояния $u(x) = \psi_0(x)$, тогда пропагатор для преобразованного уравнения Шредингера имеет следующий вид:*

$$K_1(x,y;t) = -\frac{1}{u(y)} L_x \int\limits_a^y K_0(x,z;t)u(z)dz = \frac{1}{u(y)} L_x \int\limits_y^b K_0(x,z;t)u(z)dz \tag{18}$$

Далее рассматриваются цепочки преобразований Дарбу и устанавливаются соответствующие соотношения для пропагаторов. Для задачи на всей оси получен следующий результат:

Теорема 6. *Пусть функции преобразования $u_n(x)$ обращаются в нуль только на одной из бесконечностей, $x \to -\infty$ или $x \to \infty$. Тогда пропагаторы $K_N(x,y;t)$ и $K_0(x,y;t)$ уравнений Шредингера с гамильтонианами h_N и h_0 связаны следующим образом:*
$u_n(x \to -\infty) \to 0:$

$$K_N(x,y;t) = (-1)^N L_x \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{W_n(y)}{W(y)} \int_{-\infty}^{y} K_0(x,z;t)u_n(z)dz \tag{19}$$

$u_n(x \to \infty) \to 0:$

$$K_N(x,y;t) = (-1)^{N-1} L_x \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{W_n(y)}{W(y)} \int_{y}^{\infty} K_0(x,z;t)u_n(z)dz \tag{20}$$

$u_k(x \to -\infty) \to 0 \quad k = 0, \ldots, M \qquad u_m(x \to \infty) \to 0 \quad m = M+1, \ldots, N-1:$

$$\begin{aligned} K_N(x,y;t) \;&=\; (-1)^N L_x \sum_{k=0}^{M} (-1)^n \frac{W_k(y)}{W(y)} \int_{-\infty}^{y} K_0(x,z;t)u_k(z)dz \\ &+ (-1)^{N-1} L_x \sum_{m=M+1}^{N-1} (-1)^m \frac{W_m(y)}{W(y)} \int_{y}^{\infty} K_0(x,z;t)u_m(z)dz\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Кроме того, полученные выше результаты обобщаются на случай нестационарных, либо неэрмитовых потенциалов, генерируемых преобразованием Дарбу.

Глава IV. Явные выражения для пропагаторов

В четвертой главе приведены примеры вычисления пропагаторов с использованием развитой техники. Вычислена серия пропагаторов для солитонных (безотражательных) потенциалов, для ряда потенциалов с квазиэквидистантным спектром, для частицы в ящике. Пропагаторы для безотражательных потенциалов были известны лишь для определенным образом фиксированных констант факторизации α_j. С помощью метода преобразования суперсимметрии удается вычислить соответствующий пропагатор для произвольных параметров потенциала.

Теорема 7. *Пропагатор для произвольного N солитонного потенциала имеет вид*

$$K_N(x,y;t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi i t}}\,\mathrm{e}^{\dfrac{i(x-y)^2}{4t}} +$$
$$+\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{a_n}{4}\prod_{j=1(j\neq n)}^{N}|a_n^2-a_j^2|\right)\frac{W_n(x)W_n(y)}{W(x)W(y)}\mathrm{e}^{ia_n^2 t}\left[\mathrm{erf}_{+}(a_n)+\mathrm{erf}_{-}(a_n)\right]\,,$$

где

$$\mathrm{erf}_{\pm}(a) = \mathrm{erf}\,\left(a\sqrt{it}\pm\frac{i\sqrt{i}}{2\sqrt{t}}(x-y)\right)\,.$$

В качестве функций преобразования выбрана последовательность гиперболических синусов и косинусов:

$$\begin{aligned} &u_{2j-1}(x) = \cosh(a_{2j-1}x+b_{2j-1})\,, \\ &u_{2j}(x) = \sinh(a_{2j}x+b_{2j})\,, \qquad j=1,2,\ldots N/2\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Постоянные факторизации $\alpha_j = -a_j^2$ соответствуют уровням дискретного спектра $E_j = \alpha_j < 0$ гамильтониана $h_N = -\partial_x^2 + V_N(x)$.

Предложенная методика позволяет вычислять также пропагаторы для неэрмитовых и нестационарных гамильтонианов, что и демонстрируется на примере комплексного, либо нестационарного солитонного потенциала и комплексной изоспектральной деформации потенциала гармонического осциллятора.

Глава V. Преобразовании суперсимметрии и обратная задача рассеяния для многоканального уравнения Шредингера

Почти все низкоэнергетические процессы столкновения микрочастиц с внутренней структурой (то есть, атомов, ядер и т.д.) включают неупругое рассеяние, связанное с возбуждением внутренних степеней свободы или перестановками их составных частей. Такие процессы могут быть описаны с помощью матричного (точнее, многоканального) уравнения Шредингера с локальным матричным потенциалом и различными (либо совпадающими) порогами каналов рассеяния. Решение прямой и обратной задач рассеяния для такого уравнения представляет интерес как с математической точки зрения, так и для различных приложений в атомной и ядерной физике.

В первом разделе рассмотрено неконсервативное преобразование Дарбу матричного уравнения Шредингера с различными порогами, впервые введенное в работах Самсонова, Бейа и Спаренберга. Основной результат первого раздела - установление необходимого и достаточного условия регулярности преобразованного потенциала, полученного с помощью неконсервативного преобразования нулевого потенциала с функцией преобразования

$$u(r) = \cosh(\mathcal{K}r) + \mathcal{K}^{-1}\sinh(\mathcal{K}r)w_0\,. \tag{23}$$

Здесь $\mathcal{K}$ диагональная матрица констант факторизации, связанных условием порогов, а w_0 - симметричная матрица, совпадающая со значением суперпотенциала $w = u'u^{-1}$ в нуле, $w_0 = w(0)$.

Теорема 8. *Матричная функция преобразования (23) приводит к регулярному потенциалу тогда и только тогда, когда матрица параметров*

$$\mathcal{K} + w_0 > 0 \tag{24}$$

положительно определена.

В последующих разделах исследован спектр модели, определяемой функцией преобразования (23) при произвольном числе каналов. Отметим, что данный потенциал рассматривался ранее в работах Кокса, однако условие регулярности потенциала и факторизация с помощью функции преобразования (23) не были указаны. Более того, в случае произвольного числа каналов, спектр модели не был найден, а в двухканальном случае ошибочно утверждалось отсутствие связанных состояний. В основе анализа полученных многоканальных потенциалов лежит аналитическое выражение для преобразованной матрицы Иоста и матрицы рассеяния. В результате, установлена связь между матрицей Иоста при нулевой энергии (которая определяется суперпотенциалом в начале координат) и числом связанных состояний.

Теорема 9. *Число связанных состояний неконсервативного суперпартнера нулевого N-канального потенциала с различными порогами совпадает с числом отрицательных собственных значений матрицы Иоста ($w_0 + \sqrt{\Delta}$, где Δ - диагональная матрица порогов) при нулевой энергии*

$$n_b = \frac{1}{2}(N - \Lambda)\,, \qquad \Lambda = \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j\,, \qquad \Lambda_j = \frac{\lambda_j(0)}{|\lambda_j(0)|}\,. \tag{25}$$

Возможное число резонансов для данной модели ограничено следующим образом: $0 \leqslant n_r \leqslant (N-1)2^{N-2}$. В случае приближения малой связи, которое соответствует малым отклонениям от диагонального суперпотенциала, предложен метод приближенного вычисления нулей детерминанта Иоста.

Для $N = 2$ спектр потенциала Кокса найден в замкнутом виде. Для заданных положений нулей детерминанта Иоста, разработана методика нахождения параметров потенциала.

Исследовано поведение матрицы рассеяния для двухканального потенциала Кокса. Используя аналитические выражения для матрицы рассеяния и длины рассеяния построена точно решаемая модель рассеяния атомов щелочных металов помещенных в магнитном поле, в режиме большой длины рассеяния. Рассмотрено взаимодействие магнитного резонанса Фешбаха с подпороговым связанным или виртуальным состоянием, которые приводят к большой фоновой длине рассеяния.

В седьмом, восьмом и девятом разделах исследованы преобразования суперсимметрии между диагональными и недиагональными потенциалами для многоканальных потенциалов с совпадающими порогами (парциальные волны в каждом канале выбираются произвольно). Установлены необходимые условия на выбор функции преобразования для того, чтобы получить нетривиальную связь между каналами в матрице рассеяния. Получено семейство изо-фазных потенциалов, генерируемых смешивающим преобразованием суперсимметрии. Это семейство параметризуется симметричной $M \times M$ невырожденной матрицей X_0. Анализ нулей детерминанта Иоста показал, что такое преобразование суперсимметрии приводит к M-кратно вырожденному уровню связанного состояния с энергией $E_b = -\kappa^2$ и $N - M$ кратно вырожденному виртуальному состоянию с энергией $E_v = -\kappa^2$.

В наиболее важном для приложений двухканальном случае проанализировано поведение суперпотенциала и преобразованного потенциала на больших расстояниях. Обнаружен эффект переворота парциальных волн. Установлена связь между фазовыми сдвигами исходного и преобразованного потенциалов. Для разных парциальных волн вычислен параметр смешения для преобразованного потенциала.

Рассмотрено несколько схематических примеров демонстрирующих возможности однократного смешивающего преобразования. Получен пример недиагонального потенциала, который не диагонализуется не зависящим r преобразованием, но соответствующая матрица рассеяния, может быть диагонализована постоянным преобразованием. Данный пример демонстрирует, что требование нетривиальной связи между каналами имеет более сильный характер на уровне S-матрицы, чем на уровне потенциала и матрицы Иоста.

Рассмотрены примеры точно-решаемых потенциалов с нетривиальной связью между каналами рассеяния в $s-s$, $s-p$ и $s-d$ каналах. Для $s-s$ и $s-p$ парциальных волн было показано, как управлять свойствами рассеяния при низких энергиях, выбирая параметры преобразования суперсимметрии. В нефизическом $s-p$ примере оказалось, что однократное преобразование суперсимметрии сохраняет поведение фазовых сдвигов без изменения, и таким образом содержит все необходимые ингридиенты для удобного алгоритма построения потенциала с заданными свойствами рассеяния.

Для более интересного с точки зрения приложений в ядерной физике $s-d$ случая, установлено, что однократное преобразование не позволяет решить проблему введения связи без дополнительных ограничений (обязательно наличие связанного состояния с нулевой энергией). И даже при выполнении этих условий, фазовые сдвиги полученного $s-d$ потенциала не удовлетворяют приближению эффективного радиуса, что указывает на патологию в потенциале.

Предложенное двухкратное преобразование с комплексными константами факторизации позволило снять лишние ограничение в $s-d$ случае, а также воспроизвести наиболее интересное свойство сохранения фазовых сдвигов при однократном смешивающем преобразовании в $s-p$ каналах.

Теорема 10. *Рассмотрим двухканальное уравнение Шредингера с совпадающими порогами, потенциалом V_0 и парциальными волнами $l_2 = l_1 \bmod 2$ с совпадающей четностью. Выберем в качестве функций преобразования $u_1 \equiv u$ и $u_2 \equiv u^*$ матричные решения уравнение Шредингера, соответствующие мнимым (комплексно сопряженным) энергиям факторизации $E_1 = E_2^* \equiv 2i\chi^2$, $\chi > 0$. Если функция преобразования $u(r)$ состоит из двух векторных решений исходного уравнения Шредингера*

$$u = \begin{pmatrix} \varphi_1 & f_1 \\ \varphi_2 & f_2 \end{pmatrix}, \qquad f = (f_1, f_2)^T, \qquad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T, \tag{26}$$

со следующим асимптотическим поведением:

$$f(r \to \infty) = \mathrm{e}^{-\chi(1+i)r}(i, 1)^T, \qquad \varphi(r \to \infty) = \mathrm{e}^{\chi(1+i)r}(1, -i)^T, \tag{27}$$

причем векторное решение φ является регулярным, $\varphi(0) = 0$, то такая цепочка из двух преобразований

A. *приводит к вещественному, симметричному потенциалу*

$$V_2 = V_0 - 2W_2'(r), \tag{28}$$

$$W_2(r) = (E_1 - E_2)\left(w(r) - w^*(r)\right)^{-1} \,. \tag{29}$$

Здесь используется суперпотенциал $w = u'u^{-1}$.

B. *Матрица рассеяния S_2 выражается через исходную матрицу рассеяния S_0 следующим образом:*

$$S_2(k) = e^{i\tilde{l}\frac{\pi}{2}} U_\infty(k) e^{-il\frac{\pi}{2}} S_0(k) e^{-il\frac{\pi}{2}} U_\infty^{-1}(-k) e^{i\tilde{l}\frac{\pi}{2}} \,, \tag{30}$$

где

$$U_\infty = \begin{pmatrix} -k^2 & \pm 2\chi^2 \\ \mp 2\chi^2 & -k^2 \end{pmatrix}, \quad l = \mathrm{diag}(l_1, l_2)\,, \quad \tilde{l} = \mathrm{diag}(l_2, l_1)\,. \tag{31}$$

C. *Фазовые сдвиги матрицы рассеяния не меняются: $\delta_{0;1}(k) = \delta_{2;2}(k)$, $\delta_{0;2}(k) = \delta_{2;1}(k)$, а параметр смешения преобразуется следующим образом:*

$$\epsilon_2(k) = \epsilon_0(k) \mp \arctan \frac{k^2}{2\chi}\,. \tag{32}$$

В последнем разделе с помощью цепочки одноканальных, смешивающих и фазово-эквивалентных преобразований суперсимметрии получен феноменологический потенциал взаимодействия между протоном и нейтроном, воспроизводящий фазовые сдвиги и параметр смешения в $^3S_1 -^3 D_1$ каналах рассеяния. В заключении кратко сформулированы основные результаты диссертационной работы.

3 Основные результаты работы

Изучены пропагаторы и функции Грина для гамильтонианов, связанных преобразованием суперсимметрии, найдены общие формулы, связывающие компоненты суперсимметричного пропагатора и функции Грина. Получена серия точных пропагаторов для солитонных потенциалов, и серия пропагаторов для потенциалов генерируемых двукратным преобразованием Дарбу из потенциала гармонического осциллятора.

Предложенная методика обобщена для нестационарных и неэрмитовых потенциалов, генерируемых преобразованием Дарбу. Вычислен точный пропагатор для нестационарной и комплекной деформации солитонного потенциала.

В случае многоканального уравнения Шредингера с различными порогами, получено компактное выражение для N-канального потенциал Кокса в терминах преобразования суперсимметрии нулевого потенциала, сформулировано и доказано необходимое и достаточное условие его регулярности. Установлена структура дискретного спектра (число связанных состояний, при заданных параметрах), а также максимально возможное число резонансов и виртуальных состояний в случае произвольного числа каналов. В случае приближения малой связи предложен метод приближенного вычисления нулей детерминанта Иоста. Для $N = 2$ в замкнутом виде найден спектр потенциала Кокса. Для заданных положений нулей детерминанта Иоста разработана методика нахождения параметров потенциала.

Матрица рассеяния для потенциала Кокса найдена в явном виде. Исследовано ее поведение при низких энергиях и найдена длина рассеяния, в случае, когда открыт только один канал. Используя эти аналитические выражения построена точно решаемая модель рассеяния атомов щелочных металлов, помещенных в магнитном поле, в режиме большой длины рассеяния. Рассмотрено взаимодействие магнитного резонанса

Фешбаха с подпороговым связанным или виртуальным состоянием, которые приводят к большой фоновой длине рассеяния.

Для многоканальных потенциалов с совпадающими порогами (парциальные волны в каждом канале выбираются произвольно) изучены преобразования суперсимметрии первого и второго порядков. Установлена возможность связывания каналов рассеяния с помощью преобразования суперсимметрии. Найден новый тип матричного преобразования суперсимметрии, сохраняющего фазовые сдвиги матрицы рассеяния, но изменяющего параметр смешения контролируемым образом. С помощью цепочки одноканальных и матричных преобразований суперсимметрии построен феноменологический нейтрон-протонный потенциал, воспроизводящий данные рассеяния в ${}^3S_1{-}{}^3D_1$ каналах.

Список публикаций

1. Самсонов Б. Ф., Пупасов А. М. Преобразование Дарбу функции Грина регулярной зада-чи Штурма-Лиувилля// Известия Вузов. Физика. 2005. Том **48**. N10. 20-27.

2. Samsonov B.F., Sukumar C.V. and Pupasov A.M. SUSY transformation of the Green function and a trace formula// Journal of physics A: Mathematical and Theoretical. 2005. **38**. 7557-7565; quant-ph/0507160.

3. Pupasov A. M. and Samsonov B. F. Exact propogators for soliton potentials// Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2005. **1**. 020 (7pp); quant-ph/0511238.

4. Samsonov B. F. and Pupasov A. M. Exact propagators for complex SUSY partners of real potentials// Physics Letters A. 2006. **356**. 210-214; quant-ph/0602218.

5. Pupasov A.M., Samsonov B.F. and Guenther U. Exact propagators for SUSY partners// Journal of physics A: Mathematical and Theoretical. 2007. **40**. 10557-10587; math-ph/0702088.

6. Pupasov A.M., Samsonov B.F. and Sparenberg J.-M. Exactly-solvable coupled-channel potential models of atom-atom magnetic Feshbach resonances from supersymmetric quantum mechanics// Physical Review A. 2008. **77**. 012724 (14pp); quant-ph/0709.0343.

7. Pupasov A. M., Samsonov B. F. and Sparenberg J.-M. Spectral properties of non-conservative multichannel SUSY partners of the zero potential// Journal of physics A: Mathematical and Theoretical. 2008. **41**. 175209 (17pp).

8. Sparenberg J.-M., Pupasov A.M., Samsonov B.F. and Baye D. Exactly-solvable coupled-channel models from supersymmetric quantum mechanics// Modern Physics Letters B. 2008. **22** № 23. 2277-2286.

9. Pupasov A.M., Samsonov B.F., Sparenberg J.-M. and Baye D. Coupling between scattering channels with SUSY transformations for equal thresholds// Journal of physics A: Mathematical and Theoretical. 2009. **42**. 195303 (19pp).