На правах рукописи

Жабин Дмитрий Николаевич

ЭЛЕКТРОННЫЙ ТРАНСПОРТ ЧЕРЕЗ ФРАКТАЛЬНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ НА КАНТОРОВОМ МНОЖЕСТВЕ

01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2003

Работа выполнена на кафедре теоретической физики Томского государственного университета.

Научный руководитель: Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики Томского государственного университета, Чуприков Н.Л.

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой физики Сибирского медицинского государственного университета, Кистенев Ю.В.

Доктор физико-математических наук, профессор, проректор по учебной работе Томского государственного педагогического университета, Эпп В.Я.

Ведущая организация: Московский Государственный Технологический Университет «СТАНКИН».

Защита состоится "18" декабря 2003 г. в 16.30 часов на заседании Диссертационного совета Д 212.267.07 в Томском государственном университете по адресу 634050, Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной Библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан "___"___________________ 2003 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, Ивонин И.В.
ст. научный сотрудник

1. Общая характеристика работы

1.1. Актуальность темы диссертации

Начиная с пионерских работ Бенуа Мандельброта, теория фракталов широко используется для описания физических явлений. Тем не менее, несмотря на явные успехи приложений теории фракталов, ее развитие сталкивается с принципиальными трудностями, которые возникают уже в одномерных задачах. Основная сложность состоит в отсутствии адекватного математического аппарата для решений дифференциальных и интегральных уравнений с фрактальными коэффициентами или границами. Поэтому широкое распространение получил метод изучения физических свойств предфракталов, т.е. таких объектов, когда фрактал некоторого уровня иерархии аппроксимируется кусочно-непрерывной функцией. Поскольку реальные объекты, в отличие от фрактальных, имеют наименьший структурный элемент, и этим в корне отличаются от идеальных фрактальных структур, данный подход, на первый взгляд, полностью оправдан. Однако при этом теряется такое важное свойство фракталов, как масштабная инвариантность, которая проявляется в эксперименте. Кроме того, фрактал можно понимать как предел некоторой последовательности предфракталов, а свойства предельного предфрактала естественно представляют интерес. Необходимо также отметить, что изучение фракталов предоставляет уникальную возможность выяснить связь между масштабной инвариантностью геометрических и физических свойств системы, поэтому поиск адекватных подходов, позволяющих исчерпывающим образом проанализировать физические свойства идеальных фракталов, является до сих пор актуальной задачей.

Последнее время получил распространение метод, согласно которому для описания физических процессов во фрактальных средах традиционные уравнения должны быть изменены заменой обычного дифференциала дробным дифференциалом, кратным фрактальной размерности. Основанием для этого послужило то обстоятельство, что известные дифференциальные и интегральные уравнения, используемые в математической физике, были получены, опираясь на предположение о регулярности параметров среды, в которой находится физическая система. Следовательно, при такой постановке задачи, всегда можно выделить наименьший структурный элемент, который является физически однородным, а, т.к. фрактальные объекты описываются нерегулярными функциями, «обычные» уравнения в точках фрактального множества становятся непригодными. Однако такой подход обладает тем недостатком, что фрактальная размерность не определяет однозначно геометрию фракталов, ведь фракталы одного и того же типа, например обобщенные канторовы множества, отличающиеся числом лакун (неканторовых отрезков), также могут иметь одну и ту же фрактальную размерность.

Существуют обобщения некоторых дифференциальных уравнений для стохастических динамических систем, характеризующихся фрактальной функцией плотности распределения вероятности. Например, в рамках фейнмановского подхода получено «фрактальное» уравнение Шредингера, а также выведено «фрактальное» уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, в предположении, что случайные траектории, по которым движутся частицы, описываются устойчивым распределением Леви. Таким образом, в данном случае определение дифференциального оператора существенно зависит от вида функции плотности распределения, характеризующей стохастический фрактальный процесс. Заметим, однако, что, например, вопрос о существовании и единственности решения «фрактального» уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, строго говоря, остается открытым.

Настоящая диссертация посвящена дальнейшему развитию альтернативного подхода, позволяющего точно учитывать геометрию фрактала, но при этом не требующего пересмотра основных уравнений движения. Данный подход был развит ранее для описания электронного транспорта через самоподобный фрактальный потенциал, заданный на канторовом множестве. Особенность подхода состоит в том, что решение уравнения Шредингера с фрактальным потенциалом сводится в нем к решению функционального уравнения для матрицы переноса. В настоящей диссертации рассматривается одномерная стационарная задача рассеяния нерелятивистской частицы на самоподобном фрактальном потенциале, заданном на обобщенном канторовом множестве и на фрактальном потенциале в форме канторовой лестницы, также производится расчет фазовых времен туннелирования электрона через самоподобный фрактальный потенциал. Решение ищется на основе метода матрицы переноса, который обеспечивает выполнение основных свойств одномерного уравнения Шредингера – сохранение плотности потока вероятности и непрерывность волновой функции. Производится анализ симметрии волновой функции и элементов матрицы переноса на основе интегрального уравнения Липпмана – Швингера с учетом симметрии потенциала. Решение задачи об электронном транспорте при этом сводится к решению функционального уравнения для матрицы переноса.

1.2. Цель работы

Основными задачами, решаемыми в диссертации, являются следующие:

- поиск явного вида самоподобного фрактального потенциала, сосредоточенного на (обобщенном) канторовом множестве;
- численный расчет параметров туннелирования самоподобного фрактального потенциала, сосредоточенного на обобщенном канторовом множестве;
- расчет фазовых времен туннельного перехода нерелятивистской частицы через самоподобный фрактальный потенциал, сосредоточенный на триадном канторовом множестве;
- решение задачи туннелирования нерелятивистской частицы через фрактальный потенциал в форме канторовой лестницы.

1.3. Научная новизна и практическая ценность работы

В работе получены следующие результаты:

- на классе функций, допускающих преобразование Фурье, найдено одно из решений функционального уравнения, определяющего самоподобный фрактальный потенциал, заданный на канторовом множестве;
- Получено функциональное уравнение для матрицы переноса, описывающей туннелирование электрона через фрактальный потенциал в форме канторовой лестницы;
- Получены аналитические выражения для параметров туннелирования электрона через потенциал в форме канторовой лестницы, фрактальная размерность которого близка к единице.
- Произведен анализ фазовых времен туннельного перехода электрона через самоподобный фрактальных потенциал.

1.4. Апробация материалов диссертационной работы

Материалы, вошедшие в диссертацию, докладывались на:

1. семинарах кафедр теоретической физики и квантовой теории поля Томского государственного университета;
2. четвертой международной конференции по математическому моделированию (МГТУ «Станкин» г. Москва. 27.06-1.07 2000)
3. III всероссийском семинаре “Моделирование неравновесных систем – 2000” (Красноярск, 20-22 октября 2000 г);
4. международной конференции “Математические модели и методы их исследования” (Красноярск, 16-21 августа 2001 г.);
5. конференции молодых ученых «Мезомеханика ’98» (Томск, 1-3 декабря 1998)

1.5. Публикации

Материалы, изложенные в диссертации, опубликованы в 5 работах: 4 статьи и 1 сборник трудов конференции. Список публикаций представлен в конце автореферата [1 – 5].

1.6. Структура и объем работы

Диссертация объемом 108 страниц состоит из введения, трех глав, заключения, двух приложений и списка литературы из 137 наименований.

2. Краткое содержание диссертации

Введение содержит исторический обзор литературы и обоснование актуальности целей исследования.

Глава 1 диссертации носит преимущественно обзорный характер и призвана обеспечить основу и целостность дальнейших построений. Здесь также приводятся основные обозначения, используемые в диссертации. **Разделы 1.1 – 1.4** посвящены изложению основных положений метода матрицы переноса. Данный метод позволяет находить решение уравнения Шредингера в задаче рассеяния нерелятивистской частицы на потенциальном барьере. В **разделе 1.5** приведены выражения для фазовых времен туннелирования, а **раздел 1.6** посвящен применению метода матрицы переноса для описания туннелирования электрона через одномерную систему, состоящую из N одинаковых барьеров. Результаты разделов 1.5 и 1.6 существенно используются при выводе результатов Главы 3 и раздела 1.8 соответственно. В **разделе 1.7** реферативным образом изложен формализм, позволяющий находить точное решение задачи электронного транспорта нерелятивистского электрона через самоподобный фрактальный потенциал (СФП), заданный на триадном канторовом множестве (КМ). Результаты раздела 1.7 обобщаются на случай, когда СФП сосредоточен на обобщенном КМ в **разделе 1.8**. Показано, что, как и для СФП на триадном КМ, фрактальная размерность КМ естественным образом возникает в процессе решения функционального уравнения для параметров туннелирования. Также приведены результаты численного расчета параметров туннелированя для электрона, рассеиваемого на СФП, заданного на обобщенном КМ.

В Главе 2 диссертации получено явное выражение для СФП, заданного на традном КМ и решается задача об электронном транспорте через фрактальный потенциал в форме канторовой лестницы. Обычно под СФП понимают предел бесконечной итерационной процедуры, когда СФП строится из прямоугольного потенциального барьера, совместно с КМ. В пределе СФП есть собственная функция некоторого оператора, состоящего из композиции операций сжатия и трансляции. Однако анализ указанной итерационной процедуры не позволяет ни найти точный вид СФП, ни ответить на вопрос, на сколько широк класс потенциалов, обладающих подобной симметрией. В **разделе 2.1** показано, что для СФП справедливо следующее функциональное уравнение:

$$V(x)=\frac{\alpha}{2}\left[V(\alpha x)+V\left(\alpha x-(\alpha-1)L\right)\right],\ \alpha>2,\ x\in[0,L], \tag{1}$$

$$V(x)=0 \text{ при } x<0 \text{ и } x>L,$$

где α – масштабный параметр КМ. Тогда, ограничиваясь классом функций, допускающих преобразование Фурье, можно показать, что решением функционального уравнения (1) является следующая функция:

$$V(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{C}{2^n}\left[\delta(x)+\sum_{i=1}^{n}\delta\left(x-\frac{\alpha-1}{\alpha^i}L\right)+\sum_{i<j=1}^{n}\delta\left(x-\left(\frac{1}{\alpha^i}+\frac{1}{\alpha^j}\right)(\alpha-1)L\right)+\right. \tag{2}$$

$$\left.+\sum_{i<j<m}^{n}\delta\left(x-\left(\frac{1}{\alpha^i}+\frac{1}{\alpha^j}+\frac{1}{\alpha^m}\right)(\alpha-1)L\right)+\ldots+\delta\left(x-(\alpha-1)L\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha^i}\right)\right]$$

где C – мощность СФП (площадь под кривой). Таким образом, СФП на классе функций, для которых справедливо преобразование Фурье, представляет собой суперпозицию δ-потенциалов, заданных на границах неканторовых интервалов. Заметим, что выражение (2) определяет СФП, сосредоточенный на счетном подмножестве КМ. Можно предположить, что СФП, определяемые выражением (2), имеют матрицу переноса, характеризующуюся целочисленной степенной зависимостью параметров туннелирования от волнового числа в длинноволновом пределе.

В рамках развитого ранее формализма, реферативным образом представленного в разделах 1.7 и 1.8 диссертации, решение одномерного уравнения Шредингера с фрактальным потенциалом в форме канторовой лестницы (КЛ) может быть сведено к решению функционального уравнения на матрицу переноса. Данная задача рассмотрена **в разделе 2.2**. Действительно, несложно убедиться в том, что КЛ, $V_0(x)$, заданная на отрезке $[0, L]$, подчиняется следующему функциональному уравнению

$$V_0(x)=\frac{1}{2}\left[V_0(\alpha x)+V_0(\alpha(x-x_0))\right],\quad x\in[0,L]; \tag{3}$$

$$V_0(x)=0,\ x<0;\quad V_0(x)=-\Delta,\ x>L;$$

здесь Δ – высота КЛ; $x_0=L(1-\alpha^{-1})$. Структура этого потенциала иерархична: КЛ, расположенная на интервале $[0, L]$, (далее будем называть ее КЛ нулевого уровня) состоит из двух КЛ первого уровня, расположенных в интервалах $[0, L/\alpha]$ и $[L\text{-}L/\alpha, L]$. Каждая из них, в свою очередь, состоит из двух КЛ второго уровня, и т.д. Нетрудно подсчитать, что в иерархии фрактала содержится 2^n КЛ n-го уровня, ширина d_n которых равна L/α^n.

Общее решение одномерного уравнения Шредингера (ОУШ) в областях слева (l) и справа (r) от КЛ имеет вид

$$\psi(x;E) = A_{l,r}^{(+)}(E)e^{ik(E)x} + A_{l,r}^{(-)}(E)e^{-ik(E)x}, \tag{4}$$

где $k(E) = \sqrt{2mE/\hbar^2}$; E – энергия электрона; m – его масса. Коэффициенты $A_l^{(\pm)}$ и $A_r^{(\pm)}$ связаны соотношением

$$A_l(E) = Y_0(E;0,L)A_r(E), \tag{5}$$

где $A_{l,r} = \begin{pmatrix} A_{l,r}^{(+)} & A_{l,r}^{(-)} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $Y_0(E;0,L)$ - матрица переноса КЛ, которую необходимо найти. Пусть $Y_n(E;x_1,x_2)$ – матрица переноса КЛ n-го уровня, расположенной в некотором интервале $[x_1, x_2]$; n=0,1,... . Запишем эту матрицу в виде

$$Y_n(E;x_1,x_2) = \widetilde{Y}_n(E;x_1,x_2)\widetilde{\Gamma}_n(E;x_2), \tag{6}$$

где $Y_n(E;x_1,x_2)$ - матрица переноса модифицированной КЛ (МКЛ) $\widetilde{V}_n(x)$ n-го уровня (МКЛ и соответствующая КЛ $V_n(x)$ совпадают в области $x \le x_2$, но для $x > x_2$ МКЛ, в отличие от КЛ, имеет такое же значение, что и для $x \le x_1$); $\widetilde{\Gamma}_n(E;x_2)$ матрица, связывающая решения ОУШ слева и справа от потенциальной ступеньки в точке x=x_2.

Для матрицы переноса $Y_n(E;0,d_n)$ крайней левой КЛ n-го уровня справедливо рекуррентное соотношение

$$Y_n(E;0,d_n) = Y_{n+1}(E;0,d_{n+1})Y_{n+1}(E+\Delta_n;d_n-d_{n+1},d_n), \tag{7}$$

где $\Delta_n = \Delta/2^n$.

Теперь заметим, что соответствующую матрицу переноса $\widetilde{Y}_n(E;x_1,x_2)$ и матрицу сшивания $\widetilde{\Gamma}_n(E;x_2)$ можно записать в виде

$$\widetilde{Y}_n(E;x_1,x_2) = D^{-1}(E,x_1)Z_n(E)D(E,x_2), \tag{8}$$

$$\widetilde{\Gamma}_n(E;x_2) = \beta_n(E)D^{-1}(E,x_2)\Gamma_n(E)D(E+\Delta_n,x_2), \tag{9}$$

где

$$Z_n(E)=\begin{pmatrix} q_n(E) & p_n(E) \\ p_n^*(E) & q_n^*(E)\end{pmatrix}, \qquad D(E,x)=\begin{pmatrix} e^{ik(E)x} & 0 \\ 0 & e^{-ik(E)x}\end{pmatrix};$$

$$q_n(E)=\sqrt{\frac{1}{T_n(E)}}\exp[-iJ_n(E)]\,, \quad p_n(E)=\sqrt{\frac{R_n(E)}{T_n(E)}}\exp[i(\pi/2+F_n(E)]\,.$$

$$\Gamma_n(E)=\begin{pmatrix} q_s^{(n)}(E) & p_s^{(n)}(E) \\ p_s^{(n)}(E) & q_s^{(n)}(E)\end{pmatrix}; \quad \beta_n(E)=\sqrt{\frac{k(E+\Delta_n)}{k(E)}}=\left(1+\frac{\Delta}{2^n E}\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$q_s^{(n)}(E)=\frac{1}{2}\left(\beta_n(E)+\beta_n^{-1}(E)\right), \quad p_s^{(n)}(E)=\frac{1}{2}\left(\beta_n^{-1}(E)-\beta_n(E)\right)$$

Здесь R_n=1-T_n; T_n, J_n и F_n – (вещественные) параметры туннелирования МКЛ n-го уровня – коэффициент прохождения и фазы, характеризующие прошедшую и отраженную волну. Для любого уровня n (n>1) параметр $\beta_n(E)$ удовлетворяет соотношению

$$\beta_{n-1}(E)=\beta_n(E)\beta_n(E+\Delta_n). \tag{10}$$

С учетом последних соотношений, рекуррентное соотношение (7) перепишется в виде

$$Z_n(E)=Z_{n+1}(E)\Gamma_{n+1}(E)D^{-1}(E+\Delta_{n+1},l_n)Z_{n+1}(E+\Delta_{n+1})\Gamma_{n+1}^{-1}(E), \tag{11}$$

где $l_n=\gamma d_n$; $\gamma=1-2/\alpha$. Поскольку матрицы $Z_n(E)$ и $\Gamma_n(E)$ одинаковы для всех КЛ n-го уровня и отличаются только сдвигом по шкале энергии, рекуррентное соотношение (11) также справедливо для всех КЛ n-го уровня.

Из анализа уравнения Липпмана–Швингера для потенциалов $V_0(x)$ и $V_1(x)$, связанных функциональной зависимостью $V_1(x)$ = ½ $V_0(\alpha x)$, которая справедлива для КЛ нулевого и первого уровней, можно показать, что соответствующие матрицы переноса связаны соотношением,

$$Z_1(E)=Z_0(4\alpha^2E) \tag{12}$$

Тогда, связь (12), совместно с рекуррентным соотношением (11) позволяет сформулировать функциональное соотношение для матрицы переноса $Z_0(E)$. Получаем следующее функциональное уравнение

$$Z_0(E)=Z_0\left(4\alpha^2E\right)\Gamma_1(E)D^{-1}(E+\Delta/2,\gamma L)Z_0\left(4\alpha^2E+\Delta/2\right)\Gamma_1^{-1}(E). \tag{13}$$

Заметим, что в пределе $\gamma\to 0$ $(s\to 1)$ $D(E)=I$, где I - единичная матрица, и, следовательно, $Z_0(E)=I$, а $Y_0(E;0,L)=\Gamma_0(E)$. То есть, в этом пределе МКЛ представляет собою безотражательный фрактальный потенциал, для которого фазовый путь J_0, проходимый дебройлевской волной в области барьера, равен нулю. Фактически при s=1 МКЛ рассеивает как точечный потенциал, равный по величине $-\Delta$, и, как следствие, фаза F_0 для него также равна нулю (что характерно для симметричных потенциалов).

Таким образом, будучи задана в интервале ненулевой ширины, КЛ отражает как обычная потенциальная ступенька, расположенная в точке. Это необычное свойство КЛ согласуется с выявленным ранее свойством СФП, для которого характерно, что в пределе при $s \to 1$ СФП отражает как обычный δ-потенциал.

Поскольку при γ=0 все три параметра туннелирования МКЛ равны нулю, это дает основание полагать, что при малых значениях γ эти параметры будут также малы. Опуская индекс “0” в обозначениях для параметров туннелирования МКЛ нулевого уровня, можно показать, что

$$\rho(E) \equiv \sqrt{\frac{R(E)}{T(E)}} \sim J(E) \sim F(E) \sim \gamma. \tag{14}$$

Если теперь в (13) учесть выражения для матриц Z_0 и Γ_0 и ограничиться только главными членами разложения, то получим уравнения для параметров туннелирования МКЛ нулевого уровня,

$$\begin{aligned} \rho(E) &= \rho(16E) + \omega_+ \rho(16E+\Delta/2) + \omega_- \left[J(16E+\Delta/2) + \varphi(E+\Delta/2)\right]; \\ J(E) &= J(16E) + \omega_- \rho(16E+\Delta/2) + \omega_+ \left[J(16E+\Delta/2) + \varphi(E+\Delta/2)\right]; \end{aligned} \tag{15}$$

$$F(E) = \frac{\rho(16E)}{\rho(E)}\left[F(16E) + J(E)\right] + \frac{\rho(16E+\Delta/2)}{\rho(E)}\left[F(16E+\Delta/2) - \varphi(E+\Delta/2)\right] - J(16E),$$

где $\varphi(E) = \gamma k(E) L$, $\omega_\pm = \frac{1}{2}\left(\frac{k(E+\Delta/2)}{k(E)} \pm \frac{k(E)}{k(E+\Delta/2)}\right)$. Если $E >> \Delta$ и $\varphi(E) << 1$, то, с точностью до главных членов разложения, получаем:

$$\rho(E) \approx r_0(E) = \frac{3}{14}\frac{\Delta}{E}\varphi(E), \quad J(E) \approx j_0(E) = -\frac{1}{7}\varphi(E), \quad F(E) \approx f_0(E) = -\frac{2}{7}\varphi(E). \tag{16}$$

Чтобы найти решение уравнений (15) для меньших значений энергии, введем вспомогательные функции $r_m(E)$, $j_m(E)$ и $f_m(E)$, где m=1, 2, ..., с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} r_{m+1}(E) &= r_m(16E) + \omega_+ r_m(16E+\Delta/2) + \omega_- \left[j_m(16E+\Delta/2) + \varphi(E+\Delta/2)\right]; \\ j_{m+1}(E) &= j_m(16E) + \omega_- r_m(16E+\Delta/2) + \omega_+ \left[j_m(16E+\Delta/2) + \varphi(E+\Delta/2)\right]; \end{aligned} \tag{17}$$

$$f_{m+1}(E)=\frac{r_m(16E)}{r_{m+1}(E)}\left[f_m(16E)+j_m(E)\right]+$$
$$+\frac{r_m(16E+\Delta/2)}{f_{m+1}(E)}\left[f_m(16E+\Delta/2)-\varphi(E+\Delta/2)\right]-j_m(16E),$$

где $m\geq 1$. Для m=0 вспомогательные функции определяются выражениями (16). Тогда решение уравнений (15) запишется в виде

$$\rho(E)=\lim_{m\to\infty} r_m(E),\quad J(E)=\lim_{m\to\infty} j_m(E),\quad F(E)=\lim_{m\to\infty} f_m(E). \qquad (18)$$

Существование пределов обеспечивается существованием асимптотик (16). Здесь важно заметить, что условия (16) ограничивают область вычислений как со стороны больших, так и со стороны малых значений энергии. Предельные значения вспомогательных функций находились с помощью рекуррентных соотношений (17) численно. В **разделе 2.2.5** представлены результаты численного расчета параметров туннелированя для электрона, рассеиваемого на фрактальном потенциале в форме КЛ и основные выводы по материалам данной главы.

Глава 3 посвящена расчетам фазовых времен туннелирования электрона через СФП. Как показано разделе 1.7, параметры туннелирования СФП удовлетворяют системе функциональных уравнений

$$T(\alpha k)=\Im_1(k,T(k),y(k)); \qquad (19)$$

$$y(\alpha k)=\Im_2(k,T(\alpha k),y(k)); \qquad (20)$$

$$F(k)=0; \qquad (21)$$

где

$$\Im_1(k,T(k),y(k))=2\sqrt{T(k)}\,\frac{\sqrt{T(k)}+\sin[B(k,y(k))]}{1+T(k)+2\sqrt{T(k)}\sin[B(k,y(k))]};$$

$$\Im_2(k,T(\alpha k),y(k))=\gamma kd+$$
$$+\eta\left(\frac{1}{2}B(k,y(k))+\sin^{-1}\sqrt{\frac{1}{2}T(\alpha k)+R(\alpha k)\sin[\frac{1}{2}B(k,y(k))]}\right).$$

Здесь $T(k)$ – коэффициент прохождения частицы через СФП; $R(k)$ – коэффициент отражения ($R(k)$=1-$T(k)$); $y(k)=\pi/2-J(k)$, $J(k)$ – фаза прошедшей волны; $F(k)$ – фаза отраженной волны; η=1, если $\sin[2(y(k)-\gamma kL)]$, иначе $\eta=-1$; L – ширина СФП; k – волновое число; фаза $B(k,y(k))$ лежит в первой четверти комплексной плоскости, $\sin[B(k,y(k))]=|\sin[y(k)-\gamma kL]|$; γ характеризует межбарьерное расстояние (γ=1-2/α); α – масштабный параметр КМ (в случае широко известного триадного КМ α=3). Заметим, что каждый уровень в иерархии исследуемого здесь СФП состоит из двух СФП следующего уровня.

Вблизи точки k=0 решения уравнений (19), (20) могут быть найдены в виде разложений как по целым, так и по нецелым степеням k. Как оказалось, исследуемая система уравнений имеет три семейства решений. Два из них определяются с точностью до константы и характеризуются фрактальной размерностью s=ln(2)/ln(α):

$$T_0(\phi) = \beta^2 \phi^{2s}, \qquad y_0(\phi) = \beta\phi^s, \tag{22}$$

где ϕ=kL; параметр β связан с мощностью СФП, W, соотношением:

$$\beta = -\frac{\hbar^2}{mWL}. \tag{23}$$

Здесь m – масса электрона. Третье решение соответствует разложению по целым степеням k и определяется однозначно:

$$T_0(\phi) = a^2\phi^2, \qquad y_0(\phi) = b\phi, \tag{24}$$

где

$$\alpha = \frac{2(\alpha - 1)}{\alpha^2(\alpha + 1)}; \qquad b = -\frac{2}{\alpha^2(\alpha + 1)} \tag{25}$$

При заданной ширине фрактала это решение соответствует СФП с фиксированной мощностью:

$$W = \frac{6\hbar^2}{mL} > 0. \tag{26}$$

Если ввести вспомогательные функции

$$t_n(\phi) = \Im_1(\phi/\alpha, t_{n-1}(\phi/\alpha), y_{n-1}(\phi/\alpha)); \tag{27}$$

$$y_n(\phi) = \Im_1(\phi/\alpha, t_n(\phi), y_{n-1}(\phi/\alpha)); \tag{28}$$

n=0, 1, 2,..., то решение уравнений (19) и (20) на всей шкале k запишется в виде

$$T(\phi) = \lim_{n\to\infty} t_n(\phi), \qquad y(\phi) = \lim_{n\to\infty} y_n(\phi), \tag{29}$$

В соответствии с разделом 1.5, выражения для фазовых времен туннелирования (ФВТ) для барьера любой формы определяется соотношением

$$\tau(k) = \frac{m}{k\hbar} J'(k) \tag{30}$$

(здесь и далее штрих означает производную по k). Эта формула определяет также и фазовое время отражения для СФП, так как для барьерных структур, симметричных относительно своего центра, оба канала рассеяния имеют одинаковые фазовые времена.

Используя решение (29) функциональных уравнений (19) и (20), запишем выражение для времени прохождения частицы через СФП, учитывая связь фаз $y(k)$ и $J(k)$, в виде:

$$\tau(k) = -\frac{m}{k\hbar} y'(k)\,. \tag{31}$$

$$y'(k) = \lim_{n\to\infty} f'(k)\,, \qquad T'(k) = \lim_{n\to\infty} t'(k)\,.$$

Здесь вспомогательные функции $t'_n(k)$ и $f'_n(k)$ связаны итерационными соотношениями:

$$\begin{aligned} t'_n(k) = \Bigg\{ & 2t'_{n-1}(k/\alpha) + \frac{t'_{n-1}(k/\alpha)\sin[B(k/\alpha, f_{n-1}(k/\alpha))]}{\sqrt{t_{n-1}(k/\alpha)}} + \\ & + 2r_{n-1}(k/\alpha)\sqrt{t_{n-1}(k/\alpha)}\cos[B(k/\alpha, f_{n-1}(k/\alpha))]\,B'(k/\alpha, f_{n-1}(k/\alpha)) + \\ & + \sqrt{t_{n-1}(k/\alpha)}\sin[B(k/\alpha, f_{n-1}(k/\alpha))]\,t'_{n-1}(k/\alpha) \Bigg\} \times \\ & \times \Big\{ 1 + t_{n-1}(k/\alpha) + 2\sqrt{t_{n-1}(k/\alpha)}\sin[B(k/\alpha, f_{n-1}(k/\alpha))] \Big\}^{-2}, \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} f'_n(k) = \gamma d_{n-1} + \eta\Bigg\{ & \frac{1}{2}B'(k/\alpha, f(k/\alpha)) + \Big[t'_n(k)\cos[B(k/\alpha, f_{n-1}(k/\alpha))] + \\ & + r_n(k)\sin[B(k/\alpha, f_{n-1}(k/\alpha))]\,B'(k/\alpha, f_{n-1}(k/\alpha)) \Big] \times \\ & \times \Big(\frac{1}{2}t_n(k) + r_n(k)\sin^2[\frac{1}{2}B(k/\alpha, f_{n-1}(k/\alpha))] \Big)\Big]^{-\frac{1}{2}} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{33}$$

где $d_n = L/\alpha^n$, $r_n(k) = 1 - t_n(k)$; $t'_0(k)$ и $f'_0(k)$ легко получить, дифференцируя соответствующие выражения для $t_0(k)$ *и* $y_0(k)$.

Заметим, что в предельном случае, когда α стремится к 2, параметры туннелирования СФП совпадают с параметрами туннелирования δ-потенциала, для которого ФВТ имеет вид:

$$\tau(k) = \frac{m}{k\hbar}\frac{P}{(k^2 + P^2)}, \quad \text{где} \quad P = \frac{mW_\delta}{\hbar^2}. \tag{34}$$

здесь W_δ-мощность δ-потенциала. Заметим, что ФВТ δ-потенциала имеет тот же знак, что и его мощность W_δ. В **разделе 3.2** представлены результаты численного расчета ФВТ и основные выводы по материалам данной главы.

В **Заключении** кратко сформулированы основные результаты, полученные в диссертации и вынесенные на защиту.

Приложение I содержит краткую информацию о КМ и расчет его фрактальной размерности. В **Приложении II** реферативным образом описана процедура построения КЛ.

3. Основные результаты диссертации, выносимые на защиту

1. Найден вид самоподобного фрактального потенциала, заданного на классе функций, допускающих преобразование Фурье;
2. С учетом симметрии самоподобия фрактального потенциала в форме канторовой лестницы найдено функциональное уравнение на матрицу переноса;
3. В пределе, когда фрактальная размерность канторова множества стремится к топологической размерности пространства вложения ($s \to 1-0$, где s –фрактальная размерность), найдена матрица переноса фрактального потенциала в форме канторовой лестницы. При малых отклонениях фрактальной размерности от единицы, матрица переноса найдена в виде разложения по малым степеням параметра $\gamma = 1 - 2/\alpha$, где α – масштабный параметр канторова множества ($\alpha > 2$);
4. Получены выражения для фазовых времен туннелирования электрона в задаче рассеяния на самоподобном фрактальном потенциале, заданного на триадном канторовом множестве.

Список работ по теме диссертации

1. Chuprikov N.L., Zhabin D.N., Electron tunneling through a self-similar fractal potential in the generalized Cantor set. // J. of Physics A: Math and Gen. – 2000. – Vol. 33. – №23. – P. 4309-4316
2. Чуприков Н.Л., Жабин Д.Н. Фазовые времена прохождения электрона через самоподобный фрактальный потенциал. // Изв. вузов. Физика. – 2000. – Т. 43. – № 12. – С. 57-61
3. Чуприков Н.Л., Жабин Д.Н. Электронный транспорт через одномерную фрактальную структуру // Изв. вузов. Физика. – 2000. – Т. 43. – № 12. – С. 51-56
4. Чуприков Н.Л., Жабин Д.Н. Матрица переноса фрактального потенциала типа канторова лестница. // Труды международной конференции "Математические модели и методы их исследования", 16-21 августа 2001г. – Красноярск, 2001. С.254-258;
5. Чуприков Н.Л., Жабин Д.Н. Матрица переноса фрактального потенциала в форме канторовой лестницы. // Изв. вузов. Физика. – 2003. – Т. 46. – №9, С 65-71