

На правах рукописи

Исаев Юсуп Ниязбекович



**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ И
ИЗОБРАЖЕНИЙ**

**05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ»**

**Автореферат диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук**

Томск – 2004

Работа выполнена в Томском политехническом университете и
в Институте мониторинга климатических и экологических систем
Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный консультант: доктор физико-математических наук
Тартаковский В.А.

Официальные оппоненты: член-корреспондент РАН, профессор
Творогов С.Д.

доктор физико-математических наук,
профессор Сороко Л.М.

доктор физико-математических наук,
профессор Нагорский П.М.

Ведущая организация: Институт автоматизации и электротехники
Сибирского отделения
Российской академии наук.

Защита состоится 17 июня 2004 года в 14 час. 30 мин. на заседании
диссертационного совета Д 212.267.08 при Томском государственном
университете по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского
государственного университета.

Автореферат разослан « ___ » апреля 2004 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор технических наук, доцент



Скворцов А.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность

Уникальные свойства лазерного излучения обусловили широкое применение лазеров в различных областях науки и техники. В их числе нелинейная оптика, технологические процессы, вычислительная техника, медицина, и т.п. В особую проблему выливаются задачи концентрации лазерной энергии на значительных расстояниях в атмосфере, задачи использования оптического излучения для зондирования атмосферных параметров, дальнометрии, локации, навигации и связи. Применение оптического излучения для этих целей сталкивается с необходимостью учета влияния атмосферы на параметры волны. Интенсивность и фаза лазерного излучения, прошедшего атмосферу со случайными неоднородностями, используются для извлечения информации об атмосфере или передачи информации через неё. В результате взаимодействия с турбулентной средой распространения фаза и интенсивность становятся сложными топологическими объектами. Происходит преобразование гладкого волнового фронта в прерывистую изломанную структуру с сингулярностями. Для удобства математического моделирования и упрощения анализа эти сложные математические объекты, условно будем называть их сигналами, обычно представляются в виде сумм ортогональных составляющих бесчисленным количеством способов. И поскольку каждый раз система ортогональных функций, применяемая для разложения, бывает известна, то интенсивность и фаза оптического излучения полностью определяются наборами весовых чисел для этих функций.

Такие наборы чисел – это спектры оптических сигналов. Спектр это единственно возможная форма аналитического выражения сигнала в рамках линейной теории. И весь вопрос сводится лишь к выбору наиболее подходящей базисной системы функций удобной для решения той или иной практической задачи. Насколько адекватным реальности окажется модель анализируемого сигнала зависит от удачи выбора базиса. При решении и моделировании задач восстановления оптического поля возникает проблема сохранения больших массивов данных об изображении, так как оптические сигналы, прошедшие атмосферу, стохастичны и необходимо хранить ансамбль реализаций. Возникает необходимость устранять шумы оптического изображения, сокращать время обработки данных и тем самым приблизиться к реальным временным масштабам физического процесса. Отслеживать эволюцию частоты сигнала, вызванную различными временными и пространственными масштабами неоднородности.

Состояние проблемы

Измерения распределения фазы оптической волны в силу квадратичности оптических детекторов, реагирующих на интенсивность излучения,

всегда требуют организации специальных приёмов для извлечения информации о фазе из измерений её интенсивности, то есть решение «фазовой проблемы» в том или ином варианте её постановки [Д.Фрид, В.Н.Сойфер, Л.М.Сороко, Дж. Харди, М.А.Воронцов, А.В.Корябин, В.И. Шмальгаузен]. Датчики волнового фронта измеряют, как правило, локальные наклоны волнового фронта в дискретном множестве точек [Д.Фрид, Дж.Харди, В.Г.Тараненко, О.И.Шанин], после чего эти данные преобразуются в значения фазы. Чаще всего при моделировании фазовые возмущения раскладываются в ряд по элементарным компонентам, в качестве которых принято использовать круговые полиномы Цернике, описывающие классические аберрации оптических систем. При этом коэффициенты разложения отвечают за относительный вклад отдельных мод (наклонов, кривизны, дисторсии, астигматизм, кома ...) в фазовые искажения. Существующие алгоритмы определения полиномиального разложения фазы основаны на представлении производных – локальных наклонов волнового фронта – конечными разностями с последующим решением системы линейных алгебраических уравнений. Такой подход в известной мере затрудняет оценку качества восстановления из-за присутствия шумов в измерениях наклонов фазы, накладывает ограничения на размер, форму и положение датчиков.

Указанные недостатки могут быть устранены на базе аналитических соотношений, связывающих фазу волны с её производными по координатам. Однако соответствующие алгоритмы не были разработаны. Не была решена задача построения статистически оптимальных модовых разложений фазы для устройств когерентной оптики, позволяющих адекватно моделировать как восстановление волнового фронта так и функционирование устройств когерентной оптической адаптивной техники, предназначенных для работы в турбулентной атмосфере. Одним из возможных подходов к решению подобных задач моделирования может быть разложение Карунена-Лоева-Обухова, если речь идёт о низкочастотных аберрациях.

Если в атмосфере присутствуют высокочастотные аберрации, вызывающие появления сингулярностей и скачков в волновом фронте, то в этом случае необходимо использовать вэйвлет преобразования. Теория вэйвлет преобразований за последние годы получило сильное развитие, главным образом усилиями зарубежных математиков [И.Доубеши, Я.Мейер, С.Малат, Ж.Морлет, Ч.Чуи, М. Викархаузер]. Тем не менее, для большой армии отечественных исследователей в этой области до сих пор присутствует определённый вакуум. Кроме того, большая часть зарубежных работ слишком поверхностна и при большой ширине охвата даёт лишь наброски узловых моментов. Наконец, в большей части работ по вэйвлетам гарантируется возможность разложения исследуемой функции в один из рассматриваемых базисов без объяснений критерия его выбора, то есть, нет ответа на вопрос, какой базис следует выбирать для моделирования конкретной задачи. Оптическое излучение это, как правило, различного рода

векторные и скалярные поля, которые при моделировании представляются в виде изображений, поэтому в зависимости от поставленной задачи: выделение скрытой периодичности или контура изображения, повышение контрастности, выделение сингулярности или сжатие изображения, необходимо выбирать различные вэйвлет – базисы.

Существующие методы исследования мощного лазерного излучения заключаются в восстановлении распределения интенсивности по болометрическим измерениям, по результатам измерений с помощью матриц пироэлектрических, пиромагнитных детекторов излучения, матриц фотоприёмников. Однако указанные измерители не всегда удовлетворяют требованиям по пространственному разрешению и сложны в конструктивном исполнении. Измерения распределения интенсивности мощного лазерного излучения становятся особенно сложными в натуральных условиях на наклонных трассах распространения. Возможный способ определения энергетических параметров падающего на мишень излучения в этом случае заключается в восстановлении распределения интенсивности в пучке из результатов дистанционного определения температурного поля нагреваемой им поверхности мишени или измерения рассеянного аэрозолем или мишенью лазерного излучения. Перспективным для таких измерений является использование тепловизоров, способных обеспечить значительное пространственное и временное разрешение при измерении. Однако вопросы математического моделирования и алгоритмы реконструкции параметров лазерных пучков до появления работ автора не рассматривались.

Цель работы

Разработка новых математических методов конструирования ортогональных базисов, адекватных особенностям сигнала и среды распространения, для оптимального описания структуры случайных и детерминированных оптических сигналов и изображений.

Моделирование волнового фронта в неоднородной среде и разработка алгоритмов его восстановления по измерениям локальных наклонов путем разложения в оптимальный базис.

Моделирование нагрева мишени лазерным излучением и разработка алгоритмов восстановления его интенсивности по температурному полю в оптимальном базисе.

Научная новизна

Впервые на основе вариационного алгоритма сконструированы симметричные ортогональные вэйвлеты, подчиняющиеся быстрым алгоритмам преобразования.

Впервые получен алгоритм, позволяющий синтезировать симметричные биортогональные и комплексные вэйвлеты высокого порядка, позво-

ляющие визуализировать скрытые периодичности сигналов и выделять контуры изображений.

Впервые на основе метода инвариантного погружения разработан метод расчета параметров интенсивности лазерного пучка по температурному полю поверхности мишени при произвольных ее размерах и произвольных граничных условиях на плоскости и в пространстве.

Впервые разработан алгоритм, реализующий способ канонической регуляризации в процедуре построения многомерных обобщенных функций, возникающих при решении обратной задачи теплопроводности.

Впервые разработан алгоритм представления дифференциальных и обратных им операторов в вэйвлет базисах, позволяющий эффективно оценивать аберрации контролируемых оптических систем.

Практическая значимость

Методы и алгоритмы, приведенные в работе, применимы для определения пространственно-временного распределения интенсивности лазерного излучения в турбулентной атмосфере, его интегральных моментов и энергетических функционалов на основе данных дистанционного измерения температуры поверхности, нагретой лазерным излучением. Созданные на основе этих методов пакеты прикладных программ позволили провести обработку результатов реального лабораторного эксперимента по тепловизионному измерению температуры нагреваемой поверхности и провести восстановление падающего теплового потока.

Разработанные алгоритмы и пакеты программ для синтеза ортогональных биортогональных и комплексных вэйвлетов различных порядков и различных фрактальных размерностей позволяют визуализировать неоднородности и определять фрактальную размерность среды распространения оптического сигнала для последующего его моделирования.

Синтезированные адаптивные вэйвлет-пакеты обеспечивает оптимальную фильтрацию сигналов по критерию минимума энтропии.

Алгоритм представления дифференциальных и обратных им операторов в вэйвлет базисах позволяет из измерений наклонов волнового фронта непосредственно рассчитывать отдельные составляющие аберраций контролируемых оптических систем.

Найденные соотношения и разработанные алгоритмы перехода от разложений в базисе Карунена-Лоэва-Обухова к разложению по полиномам Цернике, функциям Хаара, функциям Адамара (Уолша) позволяют осуществить статистически оптимальную модовую компенсацию турбулентных искажений фазы, оптимизировать и сократить время работы адаптивных систем, функционирующих в перечисленных базисах.

Достоверность результатов диссертации обеспечивается корректностью математических преобразований; подтверждается совпадением в ча-

стных случаях с результатами расчетов, выполненными другими авторами с помощью других подходов; согласием результатов расчетов по разработанным алгоритмам и программам с данными лабораторного эксперимента.

На защиту выносятся

1. Статистически оптимальный базис КЛО минимизирующий дисперсию коэффициентов разложения оптических сигналов и учитывающий внешний масштаб турбулентности среды распространения, позволяющий оптимизировать работу корректирующих устройств и сократить время работы адаптивного оптического контура.

2. Вариационный алгоритм синтеза симметричных квазиортогональных вэйвлетов с желаемой гладкостью и обладающих свойством быстрых преобразований, позволяющих существенно сократить время синтеза и анализа нестационарных оптических сигналов.

3. Алгоритм синтеза биортогональных, симметричных вэйвлетов, обладающих высокой локальностью, как в пространственной, так и в частотной областях, с высоким числом нулевых моментов, и обеспечивающих визуализацию скрытых периодичностей и сингулярностей оптических сигналов, прошедших турбулентную атмосферу.

4. Алгоритм синтеза комплексных, ортогональных, симметричных вэйвлетов, обладающих высоким числом нулевых моментов и позволяющих осуществлять анализ и синтез комплексных оптических сигналов и выделять контуры спутниковых оптических изображений.

5. Дифференциальные и обратные им операторы, в том числе и обобщенные, в представлении вэйвлет-базисов, позволяющие восстанавливать волновой фронт лазерного пучка по его локальным наклонам и интенсивность пучка по температуре нагретой им мишени с учетом сингулярностей волнового фронта, при этом обеспечивается повышенная точность и устойчивость представления и сокращается время численной реализации.

6. Алгоритм синтеза адаптивных вэйвлет-пакетов обладающих высокой локальностью и оптимальных в смысле минимума энтропии.

7. Алгоритм решения методом погружения некорректной пространственно-временной обратной задачи теплопроводности.

Апробация результатов

Результаты диссертации докладывались на X, XI Всесоюзном симпозиуме по распространению лазерного излучения (Томск, 1989, 1991), IV Всесоюзном симпозиуме по вычислительной томографии (Ташкент, 1989), VIII Всесоюзной научно-технической конференции «Фотометрия и ее метрологическое обеспечение» (Москва, 1990), Всесоюзной конференции «Оптические методы измерений и способы обработки данных теплофизических и нейтронно-физических процессов в элементах энерготехники»

(Севастополь, 1990), Всесоюзной конференции «Условно-корректные задачи математической физики и анализа» (Новосибирск, 1992), SPIE's International Conference of Industrial Photonics Thermosence XV (Orlando, USA, 1993), I Межреспубликанском симпозиуме «Оптика атмосферы и океана» (Томск, 1994), CLEO Europe/EQEC'94 (Amsterdam, Holland, 1994), Симпозиуме «Прикладная оптика-94» (С.-Петербург, 1994), II Межреспубликанском симпозиуме «Оптика атмосферы и океана» (Томск, 1995), III Межреспубликанском симпозиуме «Оптика атмосферы и океана» (Томск, 1996), SPIE's Intern. Conf. on Thermal Sensing and Imaging Diagnostic Applications XVIII, Orlando, (USA, 1996), CLEO Europe/EQEC'96 (Hamburg, Gergany, 1996), IV Симпозиуме «Оптика атмосферы и океана» (Томск, 1997), SPIE Proceedings San Diego, California (USA, 1997), VII Международном симпозиуме «Оптика атмосферы и океана» (Томск, 2000), VII International Symposium «Remote Sensing», Barcelona (Spain, 2000), VIII International Symposium «Remote Sensing, Toulouse, (France, 2001), Международной конференции ТГУ «Сопряжённые задачи механики, информатики и экологии» (Томск, 2002), IX Международном научно-практической конференции студентов аспирантов и молодых учёных, ТПУ, (Томск, 2003), X Международном симпозиуме «Оптика атмосферы и океана. Физика Атмосферы», (Томск, 2003), V Сибирском совещании по климату - экологическому мониторингу, (Томск, 2003).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 47 печатных работ, в том числе 26 – в журналах, рекомендованных ВАКом, 9 работ опубликованы без соавторов, 7 статей в международных тематических сборниках SPIE, CLEO.

Личный вклад автора.

Диссертационная работа и все результаты, лежащие в её основе, выполнены и получены при непосредственном участии автора на всех этапах. Ему полностью принадлежит постановка задачи исследования, теоретическое описание и анализ численных экспериментов.

Работа выполнялась в Томском политехническом университете и в Институте мониторинга климатических и экологических систем (оптического мониторинга) СО РАН в период с 1989 по 2003 год. В период исследований автор сотрудничал с учёными и специалистами Института оптики атмосферы СО РАН.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, шести глав, и заключения, изложенных на 248 страницах машинописного текста, включая 2 таблицы и 60 рисунков, списка литературы, содержащего 157 наименований.

Во введении обосновывается актуальность темы исследования и излагается состояние вопроса, ставятся цель и основные задачи исследования, раскрывается научная новизна и практическая ценность работы, формулируются основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена разработке методов моделирования и алгоритмов восстановления фазы на базе аналитического интегрального представления, связывающего фазу с ее производной.

Для описания фазовых искажений световых полей на атмосферных трассах обычно используют их разложение на моды в системе базисных функций. Среди наиболее известных методов решения этой задачи можно выделить метод разложения фазы по полиномам Цернике. Использование аналитического соотношения, связывающее фазу с её градиентом позволяет, как показано в диссертации, вычислять коэффициенты разложения фазы по полиномам Цернике без предварительного этапа ее восстановления. При этом положение и форма датчиков могут быть произвольными. Такой подход позволяет быстро оценивать aberrации контролируемой оптической системы.

В § 1.1 рассматривается использование интегрального преобразования Радона для восстановления распределения фазы волновых полей и выводятся аналитические соотношения для коэффициентов разложения фазы по полиномам Цернике из измерений локальных наклонов волнового фронта. Рассматриваемые алгоритмы позволяют восстанавливать волновой фронт и определять амплитуды его модовых составляющих через её градиент, при произвольных размерах и расположении субапертур, минуя этап восстановления фазы. Далее приводятся результаты численного эксперимента, оценивается точность восстановления.

Ниже в качестве примера приведены, полученные из общей рекуррентной формулы, явные выражения для трех первых коэффициентов разложения фазы по полиномам Цернике через измерение локальных наклонов волнового фронта:

$$a_1 = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy (\mu \cdot (x^2 + \rho^2 / 2 + R^2) + xy \cdot \nu), \quad (1)$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy (\mu \cdot xy + \nu \cdot (x^2 + \rho^2 / 2 + R^2)) \quad (2)$$

– наклоны волнового фронта по осям x и y ;

$$a_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy (\rho^2 - 1) \cdot (x\mu + y\nu) \quad (3)$$

– дефокусировка волнового фронта, где $\mu(x, y) = \partial S(x, y) / \partial x$, $\nu(x, y) = \partial S(x, y) / \partial y$, R – радиус апертуры, $\rho(x, y) = \{x, y\}$, – поперечная координата.

В § 1.2 описаны алгоритмы и результаты построения оптимального модового разложения (Карунена-Лоэва-Обухова) случайной фазы оптической волны в турбулентной атмосфере. Раздел посвящен теории построения оптимальных модовых разложений фазы.

Самодостаточность представления Цернике нарушается, если речь идет об aberrациях, обусловленных турбулентностью атмосферы или вносимых самой адаптивной системой. В таких случаях более эффективным оказывается универсальное разложение, отвечающее ряду условий оптимальности, – разложение Карунена-Лоэва-Обухова (КЛЮ). Оно характеризуется следующими свойствами:

1. Минимальность среднеквадратической ошибки при удержании заданного числа членов в бесконечном ряде разложения фазы.

2. Наибольшее (по сравнению с любым другим разложением) количество информации о представляемой усеченным рядом функции фазы, какое бы число членов рядов не удерживалось.

3. Некоррелированность коэффициентов разложения, что упрощает дальнейшее использование результатов и их анализ.

В то же время до работ автора существовало устоявшееся мнение о невозможности реализации данного разложения потому, что «собственные функции разложения характеристик искаженного поля имеют весьма сложную структуру, а практическая реализация их в виде корректирующих устройств с переменным базисом функций оказывается затруднительным» [Д.П.Лукьянов, А.А.Корниенко, Б.Е.Рудницкий]. Отсутствие достаточной теоретической проработки указанной проблемы приводило к тому, что на практике ограничивались близким к оптимальному разложением Цернике. В связи с этим в §§ 1.3, 1.4 диссертационной работы значительное внимание было уделено созданию метода получения аналитического представления базиса Карунена-Лоэва-Обухова для разложения фазы и установлению связи этого представления с разложением в базисе Цернике.

При разработке систем адаптивной оптики следует учитывать, что разложение Цернике является близким к оптимальному при аппроксимации aberrаций не выше пятого порядка. Представление распределения фазы $S(x, y)$ в пределах приемной апертуры можно записать в виде разложения по системе функций $\Psi_k(x, y)$:

$$S(x, y) = \sum_k b_k \Psi_k(x, y). \quad (4)$$

Так как фаза волны в турбулентной среде является случайной, в рамках гипотезы замороженной турбулентности коэффициенты b_k представляют

собой случайные величины. Определим ортонормированную систему функций $\Psi_k(x, y)$ таким образом, чтобы норма ошибки аппроксимации волнового фронта, усредненная по ансамблю реализаций, была минимальной. Известно, что задача построения такого базиса решается, если выполняются условия теоремы Карунена-Лоэва-Обухова. В соответствии с этой теоремой минимальное значение нормы ошибки $\sigma^2(x, y)$ при представлении случайной функции фазы $S(x, y)$, в пределах апертуры с функцией зрачка $W(x, y)$ достигается при использовании в качестве базиса N собственных функций, соответствующих N наибольшим собственным значениям интегрального оператора, ядром которого является корреляционная функция фазы $B_s(\rho, \rho')$. Задача нахождения таких собственных функций $\Psi_k(x, y)$ сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма

$$\int W(\rho') B_s(\rho', \rho) \Psi_k(\rho') d^2 \rho' = \lambda_k \Psi_k(\rho), \quad (5)$$

где λ_k – собственные числа, а

$$B_s(\rho, \rho') = \langle [S(\rho) - \langle S(\rho) \rangle][S(\rho') - \langle S(\rho') \rangle] \rangle, \quad (6)$$

а угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций среды. Средняя квадратичная ошибка аппроксимации случайной функции $\langle \varepsilon^2 \rangle$ будет определяться следующим соотношением

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} W(\rho) \left\langle \left[S(\rho) - \langle S(\rho) \rangle - \sum_{k=0}^N b_k \Psi_k(\rho) \right]^2 \right\rangle d^2 \rho \right\rangle \rightarrow \min = \sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k.$$

Коэффициенты разложения КЛЮ являются некоррелированными, а само разложение оказывается наиболее информативным в сравнении с любым из возможных разложений при представлении $S(x, y)$ усеченным рядом, если число членов ряда в том и другом случае одинаково.

В разделе §1.3 излагается алгоритм численной реализации подхода, описанного в разделе §1.2, и результаты численных экспериментов, приводятся погрешности алгоритмов. Там же приведен аналитический вид основных мод КЛЮ в представлении через базис Цернике, а так же явный вид матриц преобразования базиса Цернике в оптимальный базис КЛЮ

В § 1.4 описываются алгоритмы и результаты построения оптимального модового разложения случайной фазы оптической волны в турбулентной атмосфере с учётом внешнего масштаба турбулентности. Приводится аналитический вид основных мод КЛЮ в представлении базиса Цернике.

Аналитический вид найденных первых пяти функций Карунена-Лоэва-Обухова представлен ниже:

$$\Psi_{1,2}(\rho, \theta) = K_1^1(\rho) \begin{Bmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{Bmatrix} = \left[0.9995 \cdot 2\rho - 0.03195\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \right] \begin{Bmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{Bmatrix},$$

$$\Psi_{3,4}(\rho, \theta) = K_1^2(\rho) \begin{Bmatrix} \sin(2\theta) \\ \cos(2\theta) \end{Bmatrix} = \left[0.9838 \cdot \sqrt{6}\rho^2 - 0.1784\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) + 0.0192\sqrt{14}(15\rho^6 - 20\rho^4 + 6\rho^2) \right] \begin{Bmatrix} \sin(2\theta) \\ \cos(2\theta) \end{Bmatrix},$$

$$\Psi_5(\rho) = K_1^0(\rho) = \left[0.9754 \cdot 2\rho - 0.2205\sqrt{3}(2\rho^2 - 1) + 0.0014\sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^3 + 1) \right],$$

где $K_n^m(\rho)$ радиальные части функций КЛЮ записанные через полиномы Цернике, которые широко используются в оптике.

В § 1.5 рассматривается аналитический метод определения векторных полиномов для градиента фазы при произвольной геометрии приёмной апертуры.

Прежде всего, найдем связь фазы с ее градиентом. Для комплексной функции $f(z) = S(x, y) + iV(x, y)$, $x, y \in \bar{D}$ справедлива формула Бореля-Помпею

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{t-z} - \frac{1}{\pi} \iint \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{d\xi d\eta}{t-z} = \begin{cases} 0, & z \in D_1 \\ f(z), & z \in D \end{cases}, \quad (7)$$

где $D_1 = R^2 / \bar{D}$, R^2 – двумерное вещественное евклидово пространство.

Пусть D является областью, ограниченной апертурой, Γ – его граница. Считая, что на границе фаза равна нулю, (15) можно переписать

$$-\frac{1}{\pi} \iint \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{d\xi d\eta}{t-z} = f(z) \quad (8)$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$. В силу линейной независимости мнимой и действительной частей (8) можно переписать, оставляя лишь ее действительную часть, $z = \xi + i\eta$, $t = x + iy$

$$S(x, y) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\iint \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{d\xi d\eta}{t-z} \right) = -\frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{\partial S}{\partial \xi} (x-\xi) + \frac{\partial S}{\partial \eta} (x-\eta)}{(x-\xi)^2 + (x-\eta)^2} d\xi d\eta = \left\langle \nabla S, \frac{1}{z} \right\rangle, \quad (9)$$

где $1/z$ – фундаментальное решение оператора Коши-Римана. Так как элементы вектора \mathbf{a} (матрица коэффициентов разложения фазы) определяются как

$$a_k = \langle \Psi_k, S \rangle, \quad (10)$$

то, подставляя в данное выражение (9) уравнение (10), получим

$$a_k = \left\langle \Psi_k, \left\langle \nabla S, \frac{1}{z} \right\rangle \right\rangle = \left\langle \nabla S, \left\langle \Psi_k, \frac{1}{z} \right\rangle \right\rangle = \langle \nabla S, \mathbf{G}_k \rangle, \quad (11)$$

где \mathbf{G}_k – векторные полиномы, определяемые соотношением

$$\mathbf{G}_k = \left\langle \Psi_k, \frac{1}{z} \right\rangle \quad (12)$$

или в развернутом виде:

$$G_{kx} = \iint_D \frac{\Psi_k(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + (x-\eta)^2} d\xi d\eta, \quad (13)$$

$$G_{ky} = \iint_D \frac{\Psi_k(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (x-\eta)^2} d\xi d\eta. \quad (14)$$

Отметим, что полученные полиномы обладают свойством ортогональности $\langle \mathbf{G}_n, \mathbf{G}_m \rangle = \delta_{nm}$, что существенно упрощает задачу определения коэффициентов разложения фазы.

Следовательно, для того, чтобы определить коэффициенты разложения фазы $S(x, y)$ через ее градиент в базисе Ψ_k , необходимо градиент фазы ∇S разложить в ряд по векторным полиномам \mathbf{G}_k , которые образуются в результате свертки базисных функций с фундаментальным решением Коши-Римана, при этом область интегрирования свертки должна определяться геометрией апертуры.

Во второй главе в разделе § 2.1 рассматривается связь статически оптимального базиса Карунена-Лоева-Обухова с преобразованиями Хаара и Уолша, которые характеризуются простотой технической реализации в виде корректирующих устройств адаптивной оптической системы. Эти функции принимают только два значения -1 и 1 в силу чего удаётся избежать операции умножения при реализации алгоритмов на ЭВМ. Время выполнения преобразования Уолша в 10 раз быстрее быстрого преобразования Фурье того же массива данных, а преобразование Хаара во столько же раз быстрее преобразования Уолша [А.М.Трахтман, В.А.Трахтман, Л.А.Залманзон, Б.Е.Голубов, А.В.Ефимов]. Таким образом, связь между быстрыми базисами и оптимальными функциями КЛЮ позволяют оптимизировать работу АОС и сокращает время отклика адаптивного контура.

Определим матрицу перехода, связывающую коэффициенты разложения базиса КЛЮ с коэффициентами базисов Уолша и Хаара. Задача установления связи между разложением КЛЮ и функциями Уолша и Хаара адекватна задаче разложения ядра интегрального уравнения (5), определяющего функции КЛЮ, в базисы Уолша и Хаара. Коэффициенты разложения ядра образуют матрицу Грамма, собственные векторы которой дают

нам искомую матрицу преобразования, а собственные числа – дисперсию коэффициентов разложения.

Для определения матрицы преобразования для круглой апертуры функции Уолша $Wal(\mathbf{p})$ представим в виде произведения функций Уолша по каждой из координат

$$Wal_{nm}(\mathbf{p}) = Wal_n(\rho)Wal_m(\theta), \quad (15)$$

здесь $\mathbf{p} = \{x, y\} = \{\rho, \theta\}$. Аналогично можно представить и функции Хаара $H(\mathbf{p})$

$$H_{nm}(\mathbf{p}) = H_n(\rho)H_m(\theta), \quad (16)$$

Средняя фаза волны в большинстве задач адаптивной оптики несущественна, поэтому член разложения, характеризующий среднюю по апертуре фазу, опускают. Учитывая сказанное, искажение волнового фронта в пределах апертуры представим в виде:

$$S(\mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{p}) - \varphi_{av}, \quad (17)$$

где $\varphi_{av} = \int W(\mathbf{p})\varphi(\mathbf{p})d^2\rho$ – средняя по апертуре фаза.

Корреляционная функция фазы имеет вид

$$B_s(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \langle S(\mathbf{p})S(\mathbf{p}') \rangle = \langle (\varphi(\mathbf{p}) - \varphi_{av})(\varphi(\mathbf{p}') - \varphi_{av}) \rangle. \quad (18)$$

Выражая корреляционную функцию фазы через структурную функцию фазы $D(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ и подставляя полученное выражение в (5) можно получить решение в факторизованном виде

$$\Psi(\mathbf{p}) = R(\rho)\Theta(\theta), \quad (19)$$

функция $\Theta(\theta)$ записывается следующим образом:

$$\Theta(\theta) = \exp(il\theta), \quad (20)$$

где $l \in \mathbf{Z}$, то есть $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Раскладывая $\Theta(\theta)$ в ряд по функциям $Wal(\theta)$ и $H(\theta)$ или, что то же самое, осуществляя быстрые преобразования Уолша и Хаара, определяем азимутальную матрицу перехода. Подставив выражения (19),(20) в (5) и после некоторых преобразований получим однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\int_0^R \rho' d\rho' W(\rho')R(\rho')M_l(\rho, \rho') = \lambda R(\rho), \quad (21)$$

где $M_l(\rho, \rho') = \int_0^{2\pi} d\xi \exp(il\xi)B_s(\rho, \rho', \xi)$.

Разложим ядро $M_l(\rho, \rho')$ по функциям Уолша $Wal_n(\rho)$

$$\rho M_l(\rho, \rho') = \sum_s^N \sum_p^N A_{ps}^l Wal_s(\rho)Wal_p(\rho'). \quad (22)$$

Отметим, что функции Уолша относятся к классу мультипликативных систем и образуют Абелеву группу, в которой операция сложения \oplus определяется как суммирование по модулю 2, образующееся путем поразрядного суммирования без переноса единицы в старший разряд $Wal_n(\rho)Wal_m(\rho) = Wal_{n \oplus m}(\rho)$. Используя данное свойство, можно определить коэффициенты разложения

$$A_{ps}^l = \frac{1}{N^2} \int_0^1 \int_0^1 \rho M_l(\rho, \rho') Wal_p(\rho') Wal_s(\rho') d\rho d\rho'. \quad (23)$$

Полученная матрица является матрицей Грамма, диагонализировав которую, можно получить коэффициенты разложения радиальных частей функций КЛО через функции Уолша. Произведя аналогичные операции, можно определить коэффициенты разложения $R(\rho)$ по вэйвлетам Хаара. Коэффициенты разложения радиальной функции $R(\rho)$ в базисе Хаара можно определить и другим способом, используя тесную связь между функциями Уолша и Хаара, выражающуюся в матрице перехода

$$\mathbf{M}_{2^n}^{H-W} = \prod_{r=1}^{n-1} \prod_{p=1}^{r-1} \left(\mathbf{I}_{2^{n-1-r}} \otimes \mathbf{I}_{2^r} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2^p} \otimes \mathbf{G}_2^2 \\ \mathbf{I}_{2^p} \otimes \mathbf{G}_2^3 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_{2^{r-2p+1}} \right) \quad (24)$$

где \mathbf{I}_t – единичная матрица размера $t \times t$, $\mathbf{G}_2^2 = [1 \ 1]$, $\mathbf{G}_2^3 = [1 \ -1]$, \otimes – знак кронекеровского произведения, для $N=8$ матрица перехода от базиса Уолша к базису Хаара выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (25)$$

Итак, в настоящей разделе аналитически получена матрица перехода из базисов Хаара и Уолша, легко реализуемых в виде корректирующих устройств АОС, в базис КЛО, позволяющий полно и точно выявить потенциальные возможности корректирующего базиса АОС. Полученные соотношения позволяют при оценке коэффициентов разложения приблизиться к реальным масштабам временного разрешения случайных вариаций турбулентности за счет использования алгоритмов быстрых преобразований Уолша и Хаара. Кроме того, базис Хаара, в силу своих локальных свойств, позволяет моделировать искажения волнового фронта, имеющего сложную топологию.

В разделе § 2.2 проводится численное моделирование восстановления случайных полей с использованием быстрых преобразований, рассчитываются критерии качества функционирования АОС в различных базисах и приводится явный вид матриц преобразования от одного базиса к другому. Для радиальных компонент функций КЛО $R_j^l(\rho)$ через функции Уолша для $j = 1 \dots N$, $N = 8$, в частности при угловом индексе $l=1$ имеем:

$$\begin{pmatrix} R_1^{\pm 1} \\ R_2^{\pm 1} \\ R_3^{\pm 1} \\ R_4^{\pm 1} \\ R_5^{\pm 1} \\ R_6^{\pm 1} \\ R_7^{\pm 1} \\ R_8^{\pm 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.850 & -0.461 & -0.228 & -0.029 & -0.114 & -0.014 & -0.006 & 0.002 \\ 0.340 & 0.584 & 0.144 & -0.632 & 0.086 & -0.306 & -0.109 & -0.106 \\ 0.127 & 0.501 & -0.528 & 0.414 & -0.148 & 0.121 & 0.009 & -0.496 \\ -0.052 & -0.096 & 0.166 & -0.313 & -0.329 & 0.259 & 0.740 & -0.372 \\ -0.017 & -0.223 & 0.027 & 0.110 & 0.723 & -0.377 & 0.226 & -0.470 \\ -0.027 & -0.097 & -0.087 & -0.336 & 0.374 & 0.747 & -0.347 & -0.227 \\ -0.134 & -0.051 & -0.698 & -0.283 & 0.250 & -0.017 & 0.381 & 0.454 \\ 0.354 & 0.354 & 0.355 & 0.354 & 0.353 & 0.354 & 0.353 & 0.353 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Wal_1 \\ Wal_2 \\ Wal_3 \\ Wal_4 \\ Wal_5 \\ Wal_6 \\ Wal_7 \\ Wal_8 \end{pmatrix}$$

Следует отметить, что сумма квадратов элементов в каждой строке и столбце есть норма функции $R_j^l(\rho)$. Эта величина постоянна и в данном случае равна единице, поскольку базис является ортонормированным:

$$\sum_{n=1}^N (d_{jn}^l)^2 = 1. \quad (26)$$

Это выражение позволяет определить насколько точно определена матрица преобразования.

На рис. 1 показан вид радиальных компонент для первых функций КЛО, разложенных по 8 (а) и 32 (б) функциям Уолша. Из рисунка видно, что для $N=32$ радиальные компоненты функций КЛО $R_j^l(\rho)$ практически совпадают с радиальными компонентами функций КЛО.

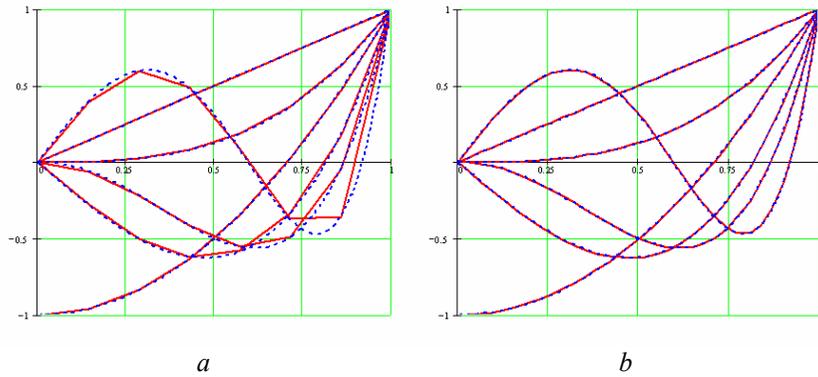


Рис. 1. Вид радиальных компонент функций КЛЮ (пунктирные линии) в разложении по N функциям Уолша (сплошные линии): $a - N = 8$, $b - N = 32$

В разделе § 2.3 этой главы проводится моделирование критерии качества адаптивной системы. Для определения степени совершенства базиса, используемого в качестве корректирующего устройства, существует остаточная ошибка коррекции волнового фронта

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = S(\mathbf{p}) - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(\mathbf{p}), \quad (27)$$

представляющая собой случайную функцию координат, в которой из распределения фазы последовательно устраняются N первых aberrаций. Вторым моментом ошибки коррекции $\varepsilon(\mathbf{p})$ является распределение дисперсии фазовой ошибки по апертуре $\sigma^2(\mathbf{p})$, представляющей собой меру точности аппроксимации случайной фазы в ортонормированном базисе $\varphi_k(\mathbf{p})$. Считая компенсацию N первых мод полной, подставим в выражение (35) фазу волны $S(\mathbf{p})$ в виде суммы и, применяя операцию математического ожидания, получим выражение для дисперсии фазовой ошибки $\sigma^2(\mathbf{p})$:

$$\sigma^2(\mathbf{p}) = \sum_{i \geq N} \sum_{k \geq N} a_{ik} \varphi_k(\mathbf{p}) \varphi_i(\mathbf{p}) \quad (28)$$

где a_{ik} – вторые моменты коэффициентов разложения фазы $\langle a_i a_k \rangle$ или коэффициенты Фурье-разложения корреляционной функции в базисе $\varphi_k(\mathbf{p})$. Приведем профиль $\sigma^2(\rho) = \sigma^2(\rho, 0)$ при фиксированном угле $\theta = 0$ для базисов Цернике и КЛЮ:

$$\sigma^2(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i \geq N} \sum_{k \geq N} a_{ik}^m R_k^m(\rho) R_i^m(\rho) \quad (29)$$

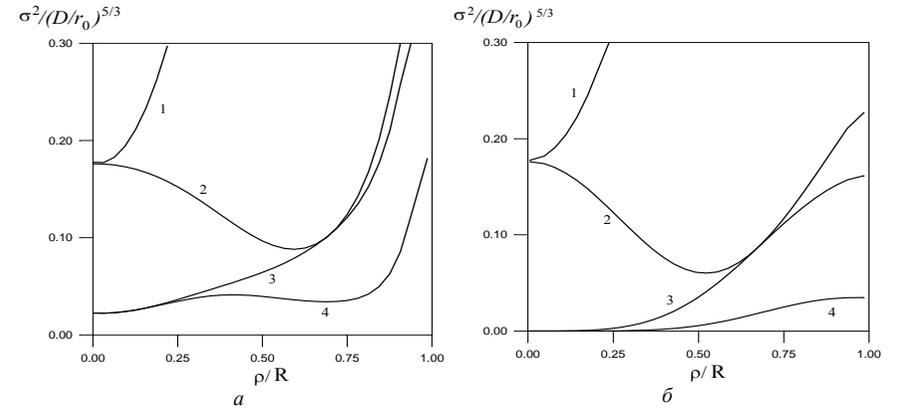


Рис. 2. Распределение дисперсии фазовой ошибки по радиусу апертуры: a -для базиса Цернике, b - для базиса КЛЮ: 1 – коррекция средней фазы; 2 – коррекция средней фазы и наклонов; 3 – коррекция первых четырех мод; 4 – коррекция первых шести мод

Из проведенных исследований можно сделать вывод, что рассмотренные базисы имеют взаимоисключающие преимущества, следовательно, нужно иметь возможность переходить из разложения фазы случайной волны в каком-либо одном базисе к разложению в другом, используя различные свойства этих базисов для анализа и адаптивного управления волновым фронтом. В частности, если восстановление волнового фронта производится в произвольном базисе, требующим большого количества мод, то достаточно вектор коэффициентов разложения фазы в заданном базисе умножить на матрицу преобразования в базис КЛЮ. При этом корректирующая система оптимизируется, то есть, комбинации группы мод принимают форму функций КЛЮ, потенциально готовя систему к принятию сигнала, и в дальнейшем одним сигналом управляется группа мод. Таким образом, количество управляющих сигналов сокращается и нет необходимости строить корректор в самом базисе КЛЮ, который, заметим, меняется с изменением состояния атмосферы. Данная интерпретация представлена на рисунке - 3. На рисунке имеется исходный волновой фронт S который полностью представляется тремя функциями КЛЮ. Этот же волновой фронт можно представить в виде четырнадцати функций Хаара. Следовательно корректором управляют 14 сигналов. Но если с помощью корректоров сформировать три функции КЛЮ то корректором будут управлять только три сигнала. Таким образом в данной главе представлен метод позволяющий вычислять коэффициенты разложения фазы с большой скоростью с помощью быстрых преобразований и затем с помощью матриц преобразования получить коэффициенты разложения в базисе КЛЮ которые можно

использовать при оценки эффективности модальной коррекции или определения параметра Штреля.

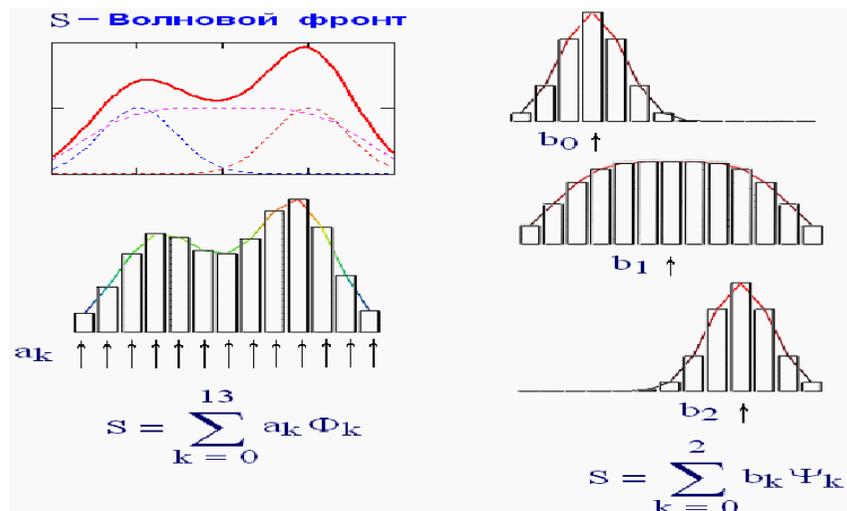


Рис. 3

В третьей и четвёртой главах описывается синтез оптимальных вэйвлет базисов для моделирования сигналов прошедших атмосферу в условиях сильной турбулентности. Из большого класса вэйвлет-базисов рассматривается синтез вэйвлетов подчиняющихся условию кратно-масштабного анализа.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^N p_k \varphi(2x - k), \quad (30)$$

так как именно такие вэйвлеты сочетают в себе свойства иерархической структуры турбулентности, её фрактальности. Они подчиняются свойствам быстрых преобразований и на порядок превышают скорость вычислений БПФ, они близки к статистически оптимальному базису КЛО, и наконец они позволяют представлять степенные особенности и сингулярности оптических пучков претерпевших сильное искажение в атмосфере.

В третьей главе рассматриваются синтез ортогональных, симметричных вэйвлет базисов вопреки установившемуся мнению о невозможности их существования. Их симметричность и ортогональность сокращает быстродействие численных алгоритмов. На основе энтропийного критерия конструируется базис наилучшим образом отображающий форму анализируемого сигнала.

Выражение (30) называется масштабирующим уравнением и является фундаментальным выражением в теории вэйвлетов. Оно является инструментом для построения новых вэйвлетов и даёт существенную экономию вычислительных затрат. Заметим, что аналитического вида функция $\varphi(x)$ не имеет. Функция $\varphi(x)$ образуется в результате сжатия и сдвигов себе подобных функций. Вид функции $\varphi(x)$ определяется коэффициентами разложения и их количеством, т.е. верхним индексом суммирования. Верхний индекс N является также и носителем функции $\varphi(x)$, $N = \text{supp}\varphi(x)$. Найти подобную функцию, значит, определить коэффициенты этого разложения.

Составляем необходимую систему уравнений для коэффициентов. Для этого подчиним функцию $\varphi(x)$ условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1. \quad (31)$$

Для коэффициентов это выражение преобразуется в следующее

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^N p_k = 1. \quad (32)$$

Будем считать, что $\varphi(x)$ подчиняется условиям ортогональности

$$\langle \varphi(x), \varphi(x - k) \rangle = \delta_{0,k}. \quad (33)$$

Подставляем (30) в (33) и получаем для коэффициентов

$$\sum_{k=1}^N p_k p_{k+2m} = \delta_{0,m}, \quad m = 0..N/2. \quad (34)$$

Вэйвлет-функция $\Psi(x)$ в этом случае определяется соотношением

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^N (-1)^k p_{N-k} \varphi(2x - k), \quad (35)$$

которое является следствием выражения $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) dx = 0$.

Система уравнений (32) и (34) необходима, чтобы решить вариационную задачу по определению коэффициентов для конструкции вэйвлетов. Например, при $N = 4$ мы имеем уравнения

$$\sum_{k=0}^4 p_k^2 = 1, \quad p_0 p_2 + p_1 p_3 = 0, \quad (36)$$

Чтобы сузить неоднозначность предлагается привлечь моменты для

функции $\varphi(x)$, $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) x^m dx = M$. Тогда мы получаем ещё несколько уравнений

нений

$$\sum_{k=0}^N (-1)^k k^m p^k = M, \quad m = 0..N/2. \quad (37)$$

Однако, при таких дополнительных условиях, сходимость численных, вариационных алгоритмов в большей степени зависит от удали выбора начальных-стартовых значений коэффициентов. Это требует определённых навыков от исследователя. Если стартовые значения выбраны неудачно, итерационный алгоритм может просто не сойтись. Причём, из решения исключаются вэйвлеты не подчиняющиеся ограничению (37), то есть вэйвлеты с меньшей гладкостью. Поэтому нужны жёсткие условия, которые бы, с одной стороны, допускали известный произвол в задании стартовых значениях вариационного алгоритма, и с другой стороны позволили бы «выловить» все возможные решения.

Получен критерий по сути являющийся более жёстким требованием на ортогональность и выражающийся соотношениями

$$\sum_{k=0}^N p_k p_{k+1} = b_1, \quad (38)$$

$$\sum_{k=0}^N p_k p_{k+3} = b_3, \quad (39)$$

$$b_3 = 0,5 - b_1, \quad (40)$$

где $b_1 \leq 1/\sqrt{3}$, $b_3 = 0,5 - b_1$, и $b_0 = 1$, $b_2 = b_4 = 0$ в соответствии с условием (33). Заметим, что индекс у коэффициентов b соответствует фиксированному индексу в выражениях (33), (34) и (37). Непрерывно изменяя значения коэффициента b_1 от его максимального значения $\approx 0,56$ в сторону уменьшения, и используя уравнения (38-40) совместно с уравнением (33) можно получить все возможные коэффициенты для конструирования ортогональных вэйвлетов. С помощью описанного алгоритма можно, например, проследить эволюцию перехода известного второго вэйвлета Добеши в первый вэйвлет Добеши-Хаара. А в промежутке между первым и вторым вэйвлетом предложенный алгоритм показывает каскад вэйвлетов с разной степенью гладкости, (рис. 4). Используя выше описанный алгоритм, автор получил большое разнообразие вэйвлетов с различной степенью гладкости и различными N -носителями функции $\varphi(x)$, причём, начиная с $N = \text{supp } \varphi(x) = 5$ одно из множества решений было симметричным вэйвлетом. Некоторые из решений автору удалось получить аналитически. Примеры вэйвлетов приведены на рис. 5.

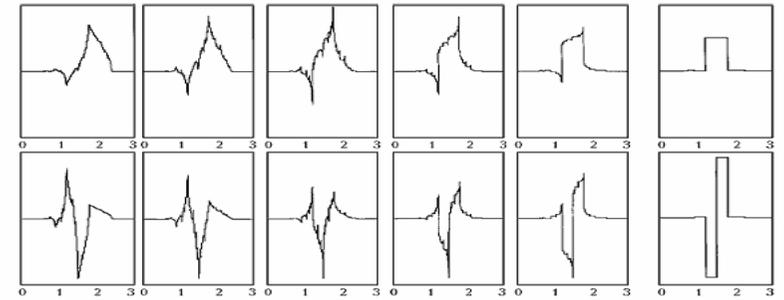


Рис. 4. Эволюция преобразования вэйвлета Добеши-2 в вэйвлет Хаара; верхний ряд – скейлинговые функции, нижний ряд – вэйвлеты

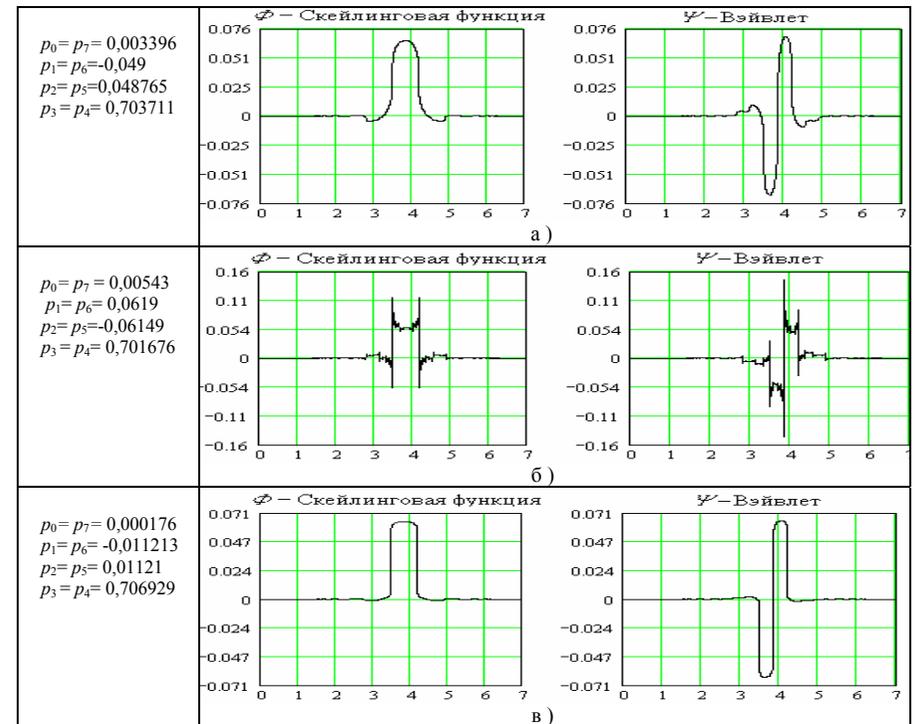


Рис. 5. Симметричные ортогональные вэйвлеты

В четвёртой главе рассматривается синтез биортогональных вэйвлетов. Преимущество биортогональных вэйвлетов перед ортогональными в их повышенной гладкости. В возможности синтезировать вэйвлет на перёд

заданными числом нулевых моментов, что существенно повышает оптимальность разложения. Разложения по биортогональным вэйвлетам позволяет визуализировать скрытые периодичности сигналов и гасить низкочастотные тренды в изображениях для повышения контрастности. В этой же главе приводятся комплексные вэйвлеты позволяющие выделять контуры изображения. При разложении спутниковых изображений в комплексный вэйвлет-базис происходит «перекачка» сингулярностей изображения в мнимую часть разложения. Сингулярности – это резкие изменения градиента интенсивности изображения. После фильтрации мнимой части изображения получается ярко выраженная картина контуров (рис. 6).

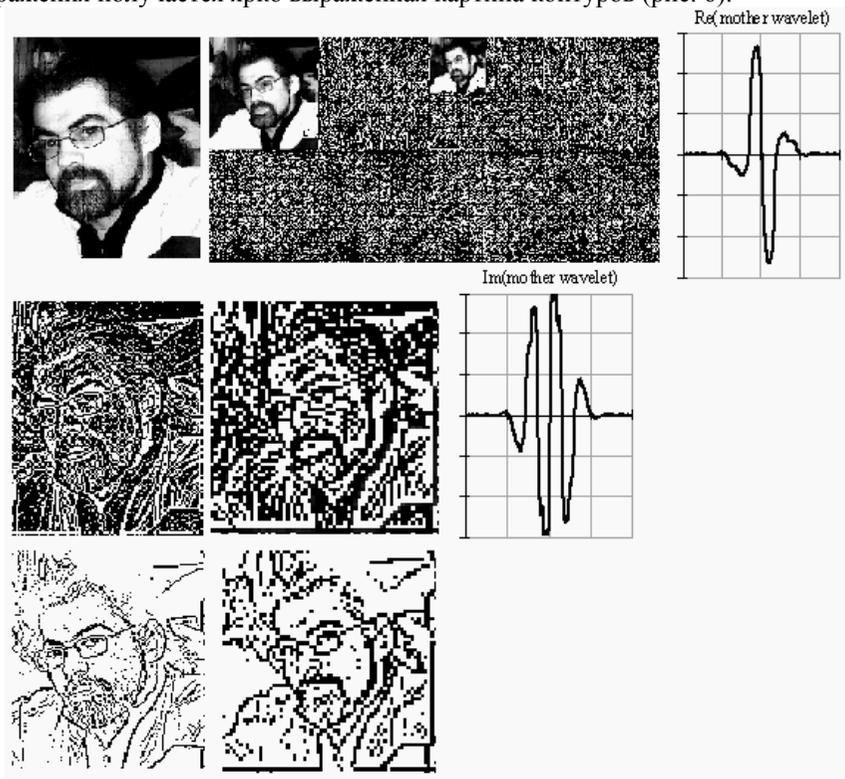


Рис 6. Выделения контуров изображения с помощью комплексных вэйвлетов

Одной из важных проблем видения изображений, наблюдаемых в рассеивающих средах и описываемых в терминах уравнения свертки, является задача восстановления замутненных изображений. Класс задач, связанных с этой проблемой, например, в спутниковом мониторинге подстилающей поверхности Земли, необозримо велик. Сложность решения этой задачи

определяется тем, что функция размытия точки (ФРТ) на момент регистрации изображений, как правило, неизвестна, кроме того, необходимо учитывать некорректность операции обращения свертки. Среди многообразия реальных атмосферно – оптических ситуаций нередки случаи, когда мы наблюдаем достаточно четкое, хотя и слабоконтрастное изображение на фоне общего «размытия». Это соответствует такому виду ФРТ, которая содержит четко выраженную дельта-составляющую и «размытое основание». Если построить преобразование, «усиливающее» роль высокочастотных составляющих наблюдаемого размытого изображения и подавить фоновую составляющую, то получим восстановленное высококонтрастное изображение. Технология использования вейвлет – преобразований для решения этой задачи заключается в следующем. Выбирается объект имеющий резкие границы, например объект с прямоугольными краями Производится его вэйвлет разложение по уровням разрешения. Далее, для усиления роли высоких частот вэйвлет-коэффициенты высокого уровня разрешения помножаются на множитель выше единицы, а низкочастотно на множитель меньше единицы. Для примера на рис. 7 было выбрано 7 уровней разложения. Самый низкий уровень разложения с коэффициентом $k_7=0.9$ и дальше по уровням возрастания разрешения соответственно $k_6=0.8$, $k_5=1$, $k_4=1.4$, $k_3=1.5$, $k_2=1.5$, $k_1=1.5$. Затем производится обратное вэйвлет преобразование где заметно усилена роль краёв изображения.

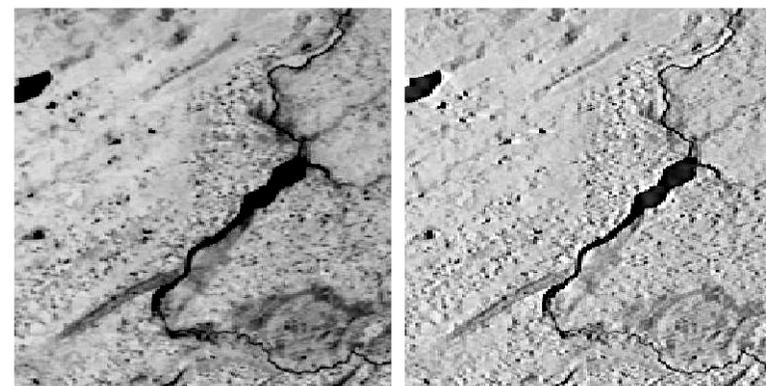


Рис. 7. Новосибирское водохранилище

Таким образом перераспределяя относительный вклад различных уровней разложения можно сузить функцию рассеяния точки. После того как коэффициенты уровней определены можно переходить к обработке 2-D изображения. В качестве примера рассмотрено спутниковое изображение Новосибирского водохранилища (рис. 6). Видно, что в обработанном изображении повышенная контрастность, чётче узнаётся рельеф местности.

При моделировании восстановления фазы и интенсивности оптического поля приходится использовать дифференциальные и обратные операторы. Необходимо решать задачи оптимального гашения шумов изображения. Как было упомянуто выше, вэйвлеты не имеют аналитического представления. Поэтому в пятой главе приводятся представления дифференциальных и обратных операторов в вэйвлет-базисах, а для оптимального гашения шумов описывается алгоритм синтеза адаптивных вэйвлет пакетов которые наилучшим образом «подстраиваются» под шумы.

Приведём алгоритм представления дифференциальных операторов $\frac{d^n}{dx^n}$ в базисе скейлинговых функций, подчиняющихся свойству кратно-масштабного анализа:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^N p_k \varphi(2x - k). \quad (41)$$

Находим элементы матрицы представления операторов $\frac{d^n}{dx^n}$:

$$D_k^{(n)} = \left\langle \varphi(x) \left| \frac{d^n}{dx^n} \right| \varphi(x - k) \right\rangle, \quad (42)$$

где $\langle f_1(x) | f_2(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) dx$ – скалярное произведение.

Подставив выражения (50) в (51) получаем

$$D_k^{(n)} = \sum_{s,m=0}^N p_s p_m \left\langle \varphi(2x - s) \left| \frac{d^n}{dx^n} \right| \varphi(2x - 2k - m) \right\rangle = 2^{n-1} \sum_{s,m=0}^N p_s p_m D_{2k+s+m}^{(n)}. \quad (43)$$

После простых преобразований нетрудно получить соотношение (43) в более подробной записи

$$D_k^{(n)} = 2^{n-1} \sum_{s,m=0}^N p_s p_m D_{2k+s+m}^{(n)} = 2^{n-1} \sum_{m=-N+1}^{N-1} \sum_{s=0}^N p_s p_{m-2k+s} D_m^{(n)}. \quad (44)$$

Введём обозначение:

$$A_{k,m}^{(n)} = 2^{n-1} \sum_{s,m=0}^N p_s p_{m-2k+s} = 2^{n-1} a_{m-2k}, \quad -N+1 \leq k, m \leq N-1, \quad (45)$$

где $a_s = \sum_{m=0}^N p_s p_{m+s}$, тогда систему (45) можно записать как алгебраическое

уравнение на собственные значения: $D^{(n)} = A^{(n)} D^{(n)} = 2^n A^{(0)} D^{(n)}$.

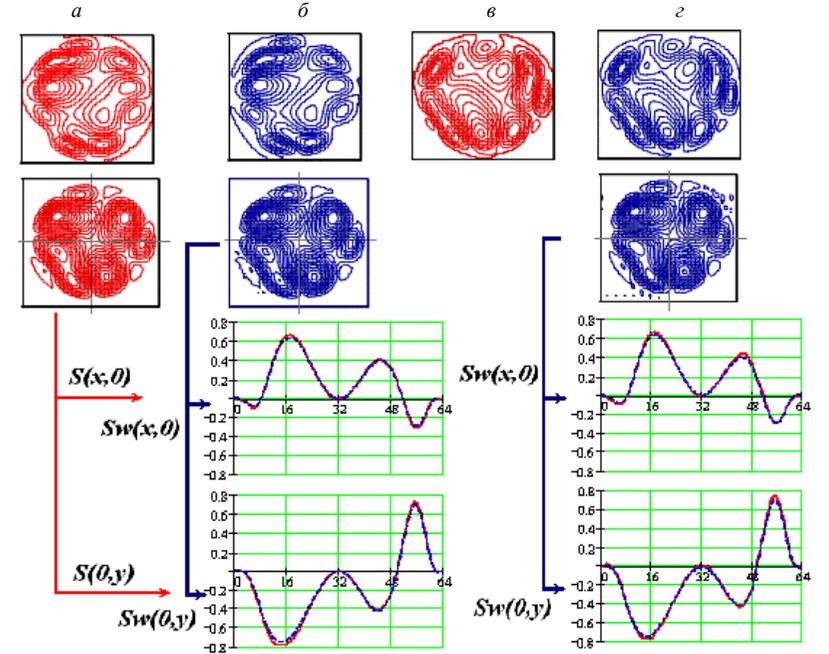


Рис. 8.

Верхний рисунок: *a* – модельная $v(x, y) = \partial S(x, y) / \partial x$ компонента градиента фазы; *б* – $v(x, y) = \partial S(x, y) / \partial x$ восстановленная компонента фазы с помощью вэйвлет преобразования; *в* – модельная $\mu(x, y) = \partial S(x, y) / \partial y$ компонента градиента фазы; *г* – $\mu(x, y) = \partial S(x, y) / \partial y$ восстановленная компонента фазы с помощью вэйвлет преобразования.

Средний рисунок: *a* – модельная $S(x, y)$ функция фазы; *б* – $S(x, y)$ функция фазы восстановленная через компоненту $v(x, y) = \partial S(x, y) / \partial x$ градиента фазы с помощью вэйвлет преобразования; *г* – $S(x, y)$ функция фазы восстановленная через компоненту $\mu(x, y) = \partial S(x, y) / \partial y$ градиента фазы с помощью вэйвлет преобразования.

Нижний рисунок: Результаты сравнения профилей модельной фазы $S(x, 0)$, $S(0, y)$ и восстановленной $Sw(x, 0)$, $Sw(0, y)$ через компоненты градиента фазы с помощью вэйвлет разложений.

После того, как определены матричные элементы дифференциальных операторов, можно простым обращением полученных матриц получить операторы, обратные дифференциальным. Однако следует учесть, что диагональные элементы матрицы представления первой производной равны нулю и обратная ей матрица при обращении становится сингулярной. Поэтому необходимо произвести регуляризацию (псевдо обращение матрицы). Как было упомянуто выше, локальный базис является устойчивым, поэтому достаточно осуществить слабый сдвиг спектра.

На рис. 8 представлены результаты восстановления фазы по её локальным наклонам с использованием дифференциальных и обратных им операторов в базисе вэйвлет преобразований.

В этой же главе вводится обобщенное понятие вэйвлетов – вэйвлет пакеты. Вэйвлет-пакеты конструируются по следующей схеме: выбирается некоторый вэйвлет с его скейлинговой функцией. Записывается для них двухмасштабные соотношения

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^N p_k \varphi(2x - k), \quad (46)$$

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^N q_k \varphi(2x - k) \quad q_k = (-1)^k p_{-k+1}. \quad (47)$$

Теперь, в выражения (46) и (47), в места скейлинговой функции $\varphi(x)$ подставляется вэйвлет $\psi(x)$, и получаются следующие выражения:

$$\mu_3(x) = \sum_{k=0}^N p_k \psi(2x - k), \quad (48)$$

$$\mu_4(x) = \sum_{k=0}^N q_k \psi(2x - k) \quad q_k = (-1)^k p_{-k+1}. \quad (49)$$

Эту процедуру можно продолжить и в результате получить семейство ортогональных функций, называемых вэйвлет пакетами

$$\mu_{2l}(x) = \sum_{k=0}^N p_k \mu_l(2x - k), \quad (51)$$

$$\mu_{2l+1}(x) = \sum_{k=0}^N q_k \mu_l(2x - k), \quad (52)$$

где $\mu_0(x) = \varphi(x)$, $\mu_l(x) = \psi(x)$, $l = 0, 1, 2, \dots$

Полученный базис вэйвлет пакетов обладает лучшей локализацией и является адаптивным базисом. При разложении функции $f(x)$ в базис вэйвлет пакетов

$$f(x) = \sum_{k,j} a_{k,j} \mu(2^j x - k), \quad (53)$$

кроме индексов локализации k и масштабирования j присутствует ещё и частотный индекс n . При выборе базиса руководствуются информационно-энтропийным критерием

$$E = -\sum_{k=0}^N |a_k|^2 \log(|a_k|^2), \quad E \rightarrow \min, \quad (54)$$

здесь a_k - коэффициенты разложения сигнала по базису вэйвлет пакетов

Критерий (54) отражает некий принцип «похожести» приближаемой и приближающей функций. Большая величина E -энтропии свидетельствует о равномерном вкладе каждой из компонент разложения, а малое значение E означает сосредоточенность раскладываемой функции на малом числе базисных направлений. Это означает, что при разложении различных сигналов в один и тот же базис в формировании сигналов будут участвовать разные базисные функции из одного и того же пакета.

Автором получены вэйвлет-пакеты на основе вэйвлетов, описанных в главах 3 и 4, а на рис. 9 (а,б) приводится графический вид некоторых из них.

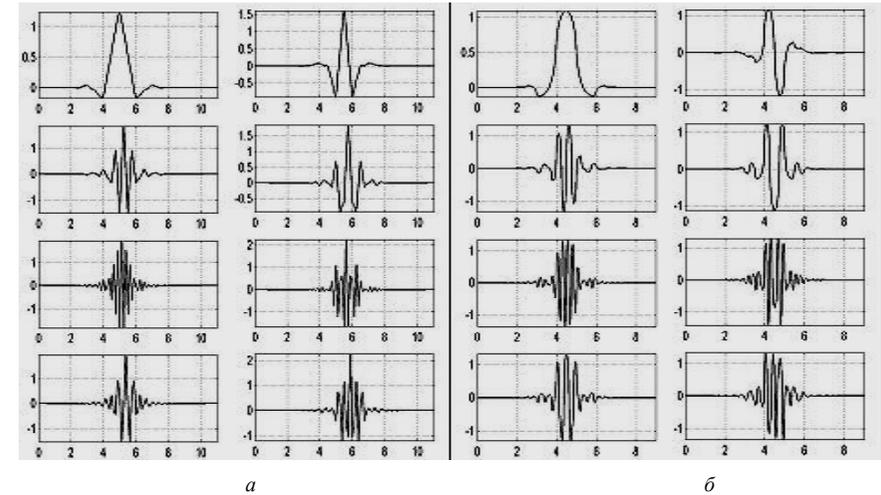


Рис. 9. Вэйвлет пакеты

На рис. 10 приведён пример разложения двух различных сигналов в вэйвлет-пакеты. На том же рисунке слева сверху приводится иерархическая структура полного дерева разложения в четыре уровня. Там же внизу приводится иерархическая структура дерева разложения для каждого сигнала, в которых отсутствуют некоторые из ветвей. Такая структура говорит о том, что не все вэйвлеты из пакета участвуют в разложении.

В шестой главе описываются методы моделирования и алгоритмы восстановления интенсивности волны по температурному полю поверхности мишени.

Полагая тепловые потери незначительными, а коэффициент отражения R известным, можно считать, что интенсивность падающего пучка с точностью до множителя $(1 - R)$ равна тепловому потоку на поверхности мишени, за счет которого формируется температурное поле в образце. Для восстановления потока необходимо решить обратную задачу теплопроводности (задачу пересчета граничных условий).

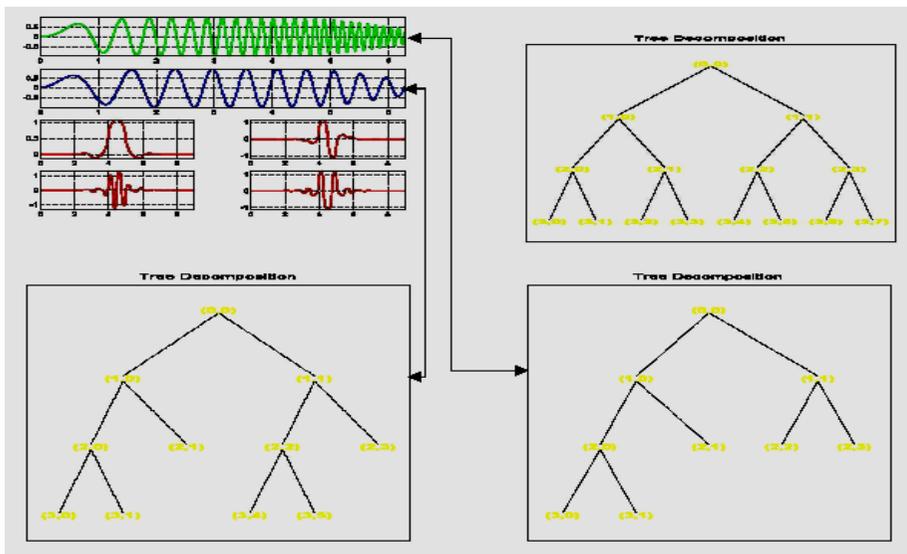


Рис. 10. Разложения в вэйвлет-пакеты

Значительное число работ посвящено решению прямых задач, где определяется температура внутри облучаемой мишени в зависимости от ее конфигурации и интенсивности падающего на нее теплового потока. При этом достаточно решить дифференциальное уравнение теплопроводности с граничными и краевыми условиями.

Задача восстановления интенсивности падающего излучения требует решения задачи теплопроводности в ее обратной постановке. В этом случае решения имеют вид интегральных соотношений, связывающих температуру на поверхности мишени с падающим на нее тепловым потоком. Эти интегральные соотношения имеют особенности и требуют специальных методов аналитической регуляризации, при численной реализации которых возникают большие трудности. Решение одномерной задачи (падающий поток должен быть однородным) для бесконечной в поперечном направлении мишени приводится в работах автора. Однако для реальных ситуаций эти задачи не представляют большого интереса. Поэтому автором разработан метод решения обратной тепловой задачи в многомерной постановке, без ограничений на продольные размеры мишени и граничные режимы. Такой подход позволяет учесть неоднородность распределения интенсивности падающего излучения и предоставляет свободу выбора размеров мишени и граничных условий на ее поверхности при реализации такого способа измерений.

Процесс переноса тепла в твердых телах характеризуется значительным сглаживанием особенностей граничных функций по мере удаления рас-

считываемой точки внутрь тела от теплообменной поверхности, темп изменения температуры в удаленных внутренних точках может оказаться существенно ниже темпа изменения температуры внешней поверхности. Такая физика распространения тепла приводит к известной патологической особенности обратных задач, заключающейся в отсутствии непрерывной зависимости результатов от входных температурных данных (нарушения условия корректности по Адамару).

Классический метод решения задач восстановления распределения интенсивности лазерного пучка по температурному полю на поверхности произвольной мишени, заключается в следующем: решается прямая задача теплопроводности с краевыми условиями (определяется температура в образце), после решения прямой задачи решается задача Коши для приграничной к мишени области (определяется поток). Метод инвариантного погружения, заключающийся во введении дополнительной пространственной переменной (параметром погружения является продольный размер мишени), позволяет связать краевую задачу с задачей Коши, что освобождает от необходимости решать прямую краевую задачу. В заключительном уравнении погружения имеется прямая связь потока с температурой на поверхности мишени и содержится параметр погружения, варьируя который могут быть получены решения для произвольных размеров мишени (бесконечно-тонкая, ограниченная и полуограниченная). Результатом решения данной задачи является обобщенное интегральное соотношение, связывающее поток с температурой на поверхности мишени. Для численной реализации такого решения необходимо избавиться от сингулярностей в интегральных соотношениях. Для устранения сингулярностей определяется порядок их полюсов, в соответствии с которым применяются соответствующие правила регуляризации. Таким образом, на основе метода погружения удастся решить обратную задачу теплопроводности.

Полученные соотношения позволили получить аналитические соотношения и разработать численные алгоритмы:

1. Для интенсивности пучка через температуру поверхности нагретой мишени.
2. Для вектора координат центра тяжести интенсивности.
3. Для эффективного радиуса пучка.
4. Для функционала фокусировки, равного мощности пучка в пределах заданной апертуры.

С помощью данного метода проведена обработка результатов лабораторного эксперимента по восстановлению интенсивности пучка с помощью тепловизора.

В **заключении** диссертации приводятся основные результаты проведенных исследований.

1. На основе аналитического соотношения, связывающего фазу с ее пространственным градиентом, получены формулы, позволяющие опреде-

лять коэффициенты полиномиального разложения фазы непосредственно из измерения ее локальных наклонов (минуя этап восстановления фазы). Предложен полуаналитический подход к проблеме получения оптимальных в среднем по ансамблю модовых разложений случайной фазы в системах адаптивной оптики, на основе которого получены представления функций Карунена-Лоэва-Обухова.

2. Предложен способ оптимизации классического разложения Цернике, заключающийся в коррекции коэффициентов этого разложения на основе информации о пространственной корреляции в случайно неоднородной среде. Приведен явный вид матрицы преобразования полиномов Цернике в оптимальный базис. Показано, что такие оптимальные коэффициенты могут быть найдены непосредственно из измерений наклонов волнового фронта.

3. Исследована эффективность предлагаемого полуаналитического подхода к проблеме построения оптимального для турбулентной атмосферы базиса в представлении случайной фазы в системах когерентной адаптивной оптики. Описаны алгоритмы численной реализации, оценена погрешность, допускаемая при замене бесконечных рядов в представлении функции Карунена-Лоэва-Обухова рядом с конечным числом членов. Приведены результаты численного эксперимента и аналитический вид основных мод Карунена-Лоэва-Обухова в представлении через базис Цернике. Разработанные подходы и алгоритм могут служить основой для построения программных комплексов, обеспечивающих управление корректорами волнового фронта, функционирующими по принципам модовой или зональной коррекции.

4. Предложен алгоритм позволяющий вычислять матрицы перехода из оптимального базиса КЛО в быстрые базисы Уолша и Хаара, что позволяет существенно сократить время отклика адаптивной оптической системы.

5. На основе свойств локальности симметричных, ортогональных и биортогональных вэйвлетов позволяющих локально сужать функцию рассеяния точки изображения разработан новый алгоритм повышения контрастности изображения.

6. На основе свойств комплексных вэйвлетов позволяющих выделять сингулярности сигналов предложен новый алгоритм выделения контуров изображения.

7. На основе представления дифференциальных операторов в вэйвлет-базисах получен алгоритм восстановления волнового фронта с сингулярностями по его локальным наклонам.

8. Разработанные алгоритмы по моделированию и восстановлению волнового фронта в условиях сильной турбулентности могут служить основой для создания программного продукта, обеспечивающего функционирование адаптивной оптической системы в условиях сильной турбулентности вызывающей появления вихревых сингулярностей волновом фронте.

9. На основе метода инвариантного погружения получены формулы для восстановления интенсивности лазерного пучка по температуре нагретой поверхности бесконечно протяженной в поперечном направлении пластины для различных продольных длин и краевых условий. Аналитическое решение пространственно-временной обратной задачи теплопроводности в многомерной постановке получено впервые.

10. Решен вопрос регуляризации обобщенного решения многомерной обратной задачи пересчета граничных условий. Получены расчетные формулы для восстановления распределения интенсивности, интегральных моментов и энергетических функционалов лазерного пучка по температурному распределению на поверхности нагрываемой мишени.

11. Построены алгоритмы, учитывающие особенности решения обратной некорректной задачи, проведены численные и обработан лабораторный эксперименты по восстановлению тепловых потоков по зашумленным значениям температуры. Оценены точностные характеристики алгоритмов для характерных моделей временного хода интенсивности и показано, что использование сглаживающих сплайнов и алгоритмов, не содержащих дифференцирования значений температуры, повышает точность восстановления теплового потока. Разработанные алгоритмы могут служить основой для создания программного продукта, обеспечивающего функционирование соответствующих измерительных систем.

Основные материалы диссертации опубликованы в следующих работах

1. Аксенов В.П., Захарова Е.В., Исаев Ю.Н. Восстановление распределения интенсивности лазерного излучения по температуре поверхности секционированной мишени // Оптика атмосферы, 1991, т. 4, № 2, с. 166-172.
2. Аксенов В.П., Исаев Ю.Н. Преобразование Радона в задаче фазового оптического контроля // Оптика атмосферы. 1991, т. 4, № 12, с. 166-172.
3. Аксенов В.П., Исаев Ю.Н. Восстановление параметров лазерного пучка по температурному полю нагретой поверхности // Оптика атмосферы и океана, 1992, т. 5, № 5, с. 509-516.
4. Аксенов В.П., Исаев Ю.Н. Оптимальное модовое разложение фазы, восстановленной по измерениям наклонов волнового фронта в турбулентной атмосфере. I. Представление аберраций в базисе Карунена-Лоэва-Обухова // Оптика атмосферы и океана, 1994, т. 7, № 7, с. 947-954.
5. Аксенов В.П., Банах В.А., Захарова Е.В., Исаев Ю.Н. Оптимальное модовое разложение фазы, восстановленной по измерениям наклонов волнового фронта в турбулентной атмосфере. II. Погрешность алго-

- ритмов и численный эксперимент // Оптика атмосферы и океана, 1994, т. 7, № 7, с. 955-959.
6. Исаев Ю.Н. Инженерный метод расчета распределения интенсивности излучения по температуре поверхности мишени // Оптика атмосферы и океана, 1994, т. 7, № 10, с. 1433-1436.
 7. Исаев Ю.Н., Захарова Е.В. Восстановление интенсивности лазерного пучка по температурному полю тонкой мишени // Оптика атмосферы и океана, 1995, т. 8, № 6, с. 841-846.
 8. Аксенов В.П., Банах В.А., Исаев Ю.Н., Захарова Е.В., Тихомирова О.В. Дифракционный томографический датчик волнового фронта // Оптика атмосферы и океана, 1995, т. 8, № 12, с. 1884-1888.
 9. Исаев Ю.Н. Аналитический метод определения векторных ортогональных полиномов для градиента фазы при произвольной геометрии приемной апертуры // Оптика атмосферы и океана, 1995, т. 8, № 10, с. 1539-1541.
 10. Исаев Ю.Н., Захарова Е.В. Восстановление интенсивности лазерного пучка по зашумленному температурному полю мишени. Ч. I. Построение регуляризирующего алгоритма на основе БПФ // Оптика атмосферы и океана 1996, т. 9, № 10, с. 1353-1358.
 11. Исаев Ю.Н., Захарова Е.В., Аксенов В.П., Исаков А.В., Рейно В.В., Цвык Р.Ш. Восстановление интенсивности лазерного пучка по зашумленному температурному полю мишени. Ч. II. Обработка модельного и лабораторного экспериментов // Оптика атмосферы и океана 1996, т. 9, № 10, с. 1359-1366.
 12. Исаев Ю.Н., Захарова Е.В. Представление функций Карунена–Лозва–Обухова в базисах Уолша и Хаара // Оптика атмосферы и океана, 1997, т. 10, № 8, с. 959-966.
 13. Исаев Ю.Н., Захарова Е.В. Синтез оптимального базиса для восстановления случайных волновых полей // Оптика атмосферы и океана, 1998, т. 11, № 5, с. 451-454.
 14. Исаев Ю.Н., Захарова Е.В. Критерии эффективности адаптивных оптических систем при различных базисах разложения фазы случайной волны // Оптика атмосферы и океана, 1999, т. 12, № 8, с. 708-711.
 15. Исаев Ю.Н. Синтез вэйвлет-базиса для анализа оптических сигналов Ч. I. Ортогональный вэйвлет-базис // Оптика атмосферы и океана, 2002, т. 15, № 11, с. 974-981.
 16. Исаев Ю.Н. Синтез вэйвлет-базиса для анализа оптических сигналов Ч. II Биортогональный и комплексный вэйвлет-базисы // Оптика атмосферы и океана, 2003, т. 16, № 4, с. 329-336.
 17. Исаев Ю.Н. Синтез вэйвлет-базиса для анализа оптических сигналов. Ч. III. Представление дифференциальных и обратных им операторов в вэйвлет-базисах. Вэйвлет-пакеты // Оптика атмосферы и океана 2003, т. 16, № 8, с. 688-694.
 18. Aksenov V.P., Isaev Yu.N. Analytical representation of the phase and its mode components reconstructed according to the wave front slopes // Optics Letters, 1992, v. 17, No 17, p. 1180-1182.
 20. Аксенов В.П., Захарова Е.В., Исаев Ю.Н. Измерение теплового потока по температурному полю нагретой поверхности. Ч. I. Однородный поток // Инженерно-физический журнал, 1994, т. 64, № 3-4, с. 275-280.
 21. Аксенов В.П., Захарова Е.В., Исаев Ю.Н. Измерение теплового потока по температурному полю нагретой поверхности. Ч. II. Неоднородный поток // Инженерно-физический журнал, 1995, т. 68, № 4, с. 622-628.
 22. Исаев Ю.Н., Колчанова В.А., Хохлова Т.Е. Определение параметров двухполосника как эквивалентной схемы замещения электрического разряда при воздействии импульсного напряжения // Электричество, 2003, № 11, с. 63-69.
 23. Тартаковский В.А., Исаев Ю.Н., Несвитайло В.Д., Волков Ю.В., Попов В.Н. Монотонность, причинность и демодуляция годовых колец деревьев // Автометрия, 2003, № 5, с. 118-127.
 24. Яворовский Н.А., Исаев Ю.Н., Корнев Я.И., Чен-Бен Нам, Хасельберг М.Б. Определение параметров двухполосника как эквивалентной схемы замещения электрического разряда при воздействии импульсного напряжения // Известия вузов «Физика», 2003, № 10, с. 3-7.
 25. Исаев Ю.Н. Конструирование биортогональных вэйвлет базисов для оптимального представления сигналов // Известия Томского политехнического университета, 2004, т. 307, № 1, с. 37-42.
 26. Исаев Ю.Н. Конструирование вэйвлет базисов для оптимального представления оптических изображений // Известия Томского политехнического университета, 2004, т. 307, № 2, с. 31-40.
 27. Aksenov V.P., Isaev Yu.N. Reconstruction of laser radiation intensity distribution from temperature along target surface // SPIE's Intern. Conf. on Industrial Photonics. Thermosence XV. Orlando, USA, 1993, p. 298-307.
 28. Aksenov V.P., Isaev Yu.N. Retrieving the laser beam intensity distribution from temperature field along of the heated target surface // CLEO Europe/EQEC'94 Abstract, Amsterdam, Holland, 1994, p.109-110.
 29. Aksenov V.P., Isaev Yu.N., Zakharova E.V. Spatial-temporal reconstruction of laser beam intensity distribution from the temperature along surface of the heated target // SPIE's Intern. Conf. on Thermal Sensing and Imaging Diagnostic Applications XVIII, Orlando, USA, 1996, v. 2766, p. 336-358.
 30. Isaev Yu.N., Zakharova E.V. Expansion of random wave phase in terms of eigenfunctions of phase correlation function // VIII International Symposium "Remote Sensing", Toulouse, France, 2001, p. 1011-1012.
 31. Isaev Yu.N., Banakh V.A., Zakharova E.V. Orthogonal expansions of phase of random wave fields // SPIE Proceedings, Barcelona, Spain, 1998, V. 3494, p. 1234-1237.

32. Isaev Yu.N., Banakh V.A., Zakharova E.V. Representation of Karhunen-Loeve-Obukhov functions in bases of Walsh and Haar // SPIE Proceedings San Diego, California, USA, 1997, v. 3126, p. 507-514.
33. Isaev Yu.N., Zakharova E.V, Representation of phase of distorted optical wave through the orthonormal bases including the outer scale of turbulence // Numerical experiment. VII International Symposium "Remote Sensing", Barcelona, Spain, 2000, p.107-108.
34. Аксенов В.П., Банах В.А., А.А.Землянов, Исаев Ю.Н. Определение моментов интенсивности и функционала фокусировки лазерного пучка по рассеянному излучению // IV Всесоюзный симпозиум по вычислительной томографии. Тез. докл. – Ташкент, 1989, с. 31.
35. Аксенов В.П., Исаев Ю.Н. Определение энергетического центра эффективного размера лазерного пучка по трем проекциям, зарегистрированным в пределах острого угла // IV Всесоюзный симпозиум по вычислительной томографии. Тез. докл. – Ташкент, 1989, с. 41.
36. Аксенов В.П., Захарова Е.В., Исаев Ю.Н. Восстановление тепловых потоков по температуре нагретой поверхности // Оптические методы измерений и способы обработки данных теплофизических и нейтронно-физических процессов в элементах энерготехники. Тез. докл. – Севастополь, 1990, с. 62.
37. Аксенов В.П., Исаев Ю.Н. Аналитический метод восстановления фазового распределения в лазерном пучке по измерениям локальных наклонов // Фотометрия и ее метрологическое обеспечение. 8 Всес. научно-техн. конференция. Тез. докл. – Москва, 1990, с. 62.
38. Аксенов В.П., Исаев Ю.Н. Преобразование Радона в задачах фазового контроля оптических полей // XI Всес. симпоз. по распространению лазерного излучения в атмосфере и водных средах. Тез. докл. – Томск, 1991, с.123.
39. Аксенов В.П., Исаев Ю.Н. Фазовый и модовый контроль в когерентной оптике на основе преобразования Радона // XI Всес. симпоз. по распространению лазерного излучения в атмосфере и водных средах. Тез. докл. – Томск, 1991, с.132-133.
40. Аксенов В.П., Исаев Ю.Н. Аналитическое решение многомерной задачи восстановления теплового потока по температуре нагретой поверхности // Условно-корректные задачи математической физики и анализа. Всес. конф. Тез. докл. – Новосибирск, 1992, с. 44-45.
41. Аксенов В.П., Исаев Ю.Н. Томографические методы измерения фазы световых пучков в системах лазерной, астрономической оптики, оптического контроля // Симпоз. «Прикладная оптика-94». Тез. докл. – СПб, 1994, с. 231.
42. Исаев Ю.Н. Синтез вэйвлет базиса для анализа сигналов прошедших турбулентную атмосферу // Тез.док. Международная конференция ТГУ, "Сопряжённые задачи механики, информатики и экологии". Томск, 2003, с. 23.
43. Исаев Ю.Н. Представления дифференциальных и обратных им операторов в вэйвлет базисах для обработки оптических сигналов // X Юбилейный международный симпозиум «Оптика Атмосферы и Океана. Физика Атмосферы». – Томск, 2003, с. 70.
44. Исаев Ю.Н. Фирсов К.М. Вэйвлет анализ спектров поглощения атмосферных газов // X Юбилейный международный симпозиум «Оптика Атмосферы и Океана. Физика Атмосферы». – Томск, 2003, с. 49.
45. Исаев Ю.Н. Артамонов Е.С., Протасов К.Т. Адаптивное восстановление замутненных аэрокосмических изображений с использованием вэйвлет преобразований // X Юбилейный международный симпозиум «Оптика Атмосферы и Океана. Физика Атмосферы». – Томск, 2003, с. 92.
46. Исаев Ю.Н. Захарова Е.В. Вэйвлет-анализ атмосферных метеопараметров // X-Юбилейный международный симпозиум «Оптика Атмосферы и Океана. Физика Атмосферы». – Томск, 2003, с. 73.
47. Исаев Ю.Н., Колчанова В.А. Вэйвлет базис для анализа и синтеза сигналов // X Международная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых учённых, Т.2. – Томск, 2004, с. 149-150.