

На правах рукописи

**Клевцова Анна Владимировна**

Численное моделирование внутренних  
течений электропроводящей жидкости

05.13.18 – математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Томск – 2004

Работа выполнена в Томском государственном университете

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук, профессор А.М.Бубенчиков

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор В.А. Якутенок

кандидат физико-математических наук, доцент И.А. Иванова

Ведущая организация: Институт вычислительных технологий  
СО РАН (г. Новосибирск)

Защита состоится 30 декабря 2004 г. в 10:30 на заседании диссертационного совета Д 212.267.08 при Томском государственном университете (634050, г. Томск, пр. Ленина, 36)

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Отзывы на автореферат, заверенные печатью, просьба высылать по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, Томский государственный университет, ученому секретарю университета.

Автореферат разослан « 27 » ноября 2004 г.

Ученый секретарь

Диссертационного совета Д 212.267.08

доктор технических наук, доцент

А.В. Скворцов

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Магнитная гидродинамика развивалась параллельно со становлением теории электричества и магнетизма. основополагающие исследования в магнитной гидродинамике выполнили в нашей стране следующие ученые: Л. Д. Ландау, Я. И. Френкель, А. Б. Ватажин, Г. А. Любимов, А. Г. Куликовский, С. А. Регирер; за рубежом: Дж. Гартман, Р. Гарднер, Т. Каулинг, Дж. Шеклиф, Дж. Хант, З. Блевис. Большой вклад в развитие теории МГД течений внесли Я. С. Уфлянд, Г. А. Остроумов, А. В. Тананаев, А. Е. Якубенко, Н. М. Тучин, О. А. Лиелаусис и многие другие.

Традиционно актуальными остаются исследования по разработке теоретических основ работы МГД-устройств различного назначения: генераторы электрического тока, электромагнитные насосы, индукционные расходомеры и т.д. Такие устройства находят широкое применение в космической технике, энергетике, металлургии. Особая актуальность развития теоретических разделов магнитной гидродинамики связана с расчетом систем охлаждения для устройств термоядерного синтеза. При этом еще на стадии проектирования необходимо оценить и, если возможно, снизить дополнительные потери давления в охлажденных трубах, обусловленные наложенным магнитным полем, которое необходимо в реакторе для удержания плазмы.

В настоящее время широко исследуются течения электропроводящих жидкостей под воздействием постоянных и переменных электромагнитных полей в различных технических устройствах, а также в биологических системах, в частности потому, что кровь является электропроводящей средой. Широко известно положительное влияние полей постоянных магнитов на кровь. В последние годы выявлено также положительное воздействие на сосуды человека от электромагнитов переменного тока. Новые данные по терапевтическому и профилактическому воздействию магнитных полей требуют углубленного изучения гидродинамики проводящих жидкостей в трубах и каналах, находящихся в электромагнитных полях.

**Объектом исследования** является фрагмент трубки, находящейся в магнитном поле, с текущей по нему электропроводящей жидкостью. Трубка моделирует участок артериального сосуда, основной элемент электрогенератора или элемент системы охлаждения реактора.

Глобальная модель процесса – это модель механики сплошной среды или модель континуального поля. В рамках подхода Эйлера рассматривается МГД-состояние в объеме фиксированного по длине

участка канала. При этом, распределения искомых МГД-величин в каждой точке рассматриваемого объема связаны дифференциальными условиями, выражающими собой баланс массы, теорему о количестве движения для электропроводящей жидкости, закон Ома, условие потенциальности электрического поля и условие отсутствия в пространстве распределенных зарядов. Априорное знание геометрических особенностей рассматриваемой системы, в нашем случае это протяженность канала, позволяет упростить математическую модель еще на предварительной стадии, т.е. на дифференциальном уровне, что и сделано в разделе 2.1. Некоторые упрощения дифференциальной постановки задачи могут быть выполнены апостериори, т.е. после ее решения, на основе анализа полученных данных о расчетных распределениях величин. Так были построены осесимметричные модели почти симметричных процессов, представленных в разделах 2.5. и 3.1.

**Цель, преследуемая в работе,** состоит в разработке эффективных численных моделей, пригодных для изучения воздействия магнитных полей на характер внутренних течений проводящей среды и достижения эффекта по снижению сопротивления. Теоретическая направленность данной работы предопределила круг рассматриваемых задач о ламинарных МГД-течениях в канале. Предпочтение отдано развивающимся и стабилизированным ламинарным движениям вязкой проводящей жидкости в круглых трубах.

Для достижения поставленной цели были поставлены следующие задачи:

1. Разработать математическую модель развивающегося незакрученного течения электропроводящей жидкости во входном участке канала с непроводящими стенками.
2. Разработать математическую модель закрученного течения проводящей жидкости в трубе с непроводящими стенками.
3. Разработать математическую модель стабилизированного МГД-течения в канале с частично проводящими стенками.

**Метод исследования** состоит в использовании конечных разностей для дискретизации математической модели, представленной в дифференциальной форме, и разработке эффективных способов итерационного решения, получающихся в результате дискретизации систем алгебраических уравнений. Связанные задачи «скорость – давление» разделяются на уровне конечно-разностной схемы (полностью или частично) на две части: кинематическую и динамическую. Причем первая из этих частей, кинематическая, решается независимо от динамической. По данным решения первой части, опираясь на соответствующую структурную формулу, находится неизвестный акси-

альный градиент давления. В результате чего, в процессе вычислений, отпадает необходимость в использовании итераций, обеспечивающих согласование полей скорости и градиента давления.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Граничное условие, позволяющее вычислять значения искомым магнитогидродинамических величин на полярной оси при неосесимметрических процессах.
2. Способ разрешения координатной неопределенности, возникающей при вычислениях радиальной и окружной компонент скорости на оси трубы.
3. Осесимметричное приближение для описания незакрученного МГД-течения в узких осесимметричных трубках.
4. Осесимметричное приближение для описания закрученного МГД-потока в трубках круглого поперечного сечения.
5. Эффект увеличения скорости за счет движения заряженных частиц поперек потока в каналах с частично проводящими стенками.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается строгостью математических постановок задач, тестированием разработанных алгоритмов расчета МГД-течений, а также сравнением результатов вычислений с известными аналитическими решениями и экспериментальными данными.

**Научная новизна** работы состоит:

1. Впервые предложены приближенные осесимметричные математические модели МГД-течений для незакрученного и закрученного потоков в осесимметричных каналах.
2. Впервые получен эффективный алгоритм для численного решения неосесимметричных задач в цилиндрических координатах.
3. Обнаружен и объяснён эффект демпфирующего воздействия магнитного поля на тенденцию к образованию возвратных движений в закрученном потоке.
4. Найден и объяснён эффект снижения сопротивления за счет генерации среднего поперечного тока в проводящем канале.

**Практическая значимость** работы определяется возможностью использования предложенных приближений в инженерных расчетах по оценке влияния магнитных полей на характер течения вязкой проводящей жидкости в трубах и каналах, а также в использовании эффекта по снижению сопротивления в проектах по разработке системы охлаждения реактора.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались:

1. На III Всероссийской научной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики» (2–4 октября 2002 г., г. Томск).
2. На Международной конференции по математике и механике (16–18 сентября 2003 г., г. Томск).
3. На IV Всероссийской конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики» (5–7 октября 2004, г. Томск).
4. На семинаре кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования ТГУ под руководством профессора А.В. Старченко.
5. На семинарах кафедры теоретической механики ТГУ под руководством профессора А.М. Бубенчикова.

**Вклад автора.** Все результаты, представленные в данной работе, получены автором самостоятельно.

#### **Объем и структура работы**

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объем диссертации – 113 с., в том числе 108 с. основного текста с рисунками. Список литературы – 5 с. и содержит 60 названий.

#### **Краткое содержание работы**

**Во введении** приводятся сведения по актуальности исследований, и дается общая характеристика работы.

**В первой главе** приводится общая постановка задачи о стабилизированном течении проводящей жидкости в каналах произвольной формы поперечного сечения. Представлены так же классические результаты по автомодельным течениям в каналах и материалы по устойчивости МГД-поток.

**Во второй главе** в рамках безиндукционного приближения получены уравнения магнитной гидродинамики, определяющие не осесимметричные процессы в осесимметричных каналах. Отличительной особенностью данного подхода является неучет аксиальной диффузии импульса и магнитного поля, что позволяет выделить маршевую переменную  $x$  и соответствующим образом выстроить технологию проведения вычислений. В работе показано, что для класса незакрученных движений в узких каналах приближенно можно принять

$$p(x, r, \theta, t) \approx p_1(x, t) + p_2(x, r, \theta, t), \quad (1)$$

причем  $\frac{\partial p_2}{\partial r} \ll \frac{\partial p_1}{\partial x}$ ,  $\frac{1}{r} \frac{\partial p_2}{\partial \theta} \ll \frac{\partial p_1}{\partial x}$  и величина  $p_1(x, t)$  входит в уравнение для аксиальной компоненты скорости  $U$ , а  $p_2(r, \theta, t)$  в уравнение для  $V$  и  $W$ . В связи с этим процедура численного решения уравнения для  $U$  состояла в использовании подхода Л.М. Симуни, обобщенного в данной работе на случай неосесимметричного течения. Для разрешения системы уравнений движения жидкости относительно  $p_2$  через поправку давления автор использовал метод *SIMPLE*, предложенный в книге С.Патанкара. Уравнение неразрывности аппроксимировалось с помощью центральных разностей во внутренних точках. Для расчета  $\frac{\partial V}{\partial r}$  в граничных точках применялись трехточечные направленные разности второго порядка. Поправку давления рассчитывали в области, расширенной по всему периметру фиктивными узлами. При этом в фиктивных узлах величина поправки давления предполагалась равной нулю. Для расчета поправки давления во внутренних узлах был использован разностный оператор, такой же, как в работе С. Патанкара, и по своему виду близкий к разностному оператору уравнения Пуассона. Для разрешения полученной схемы алгебраических уравнений применялся метод Гаусса–Зейделя. В заключении с использованием полученной поправки давления производилась коррекция распределений давления и компонент скоростей  $V$  и  $W$  по всей расчетной области. Итерационный процесс продолжали до удовлетворения уравнения неразрывности и уменьшения нормы разности между двумя последовательными распределениями расчетных величин до значений меньших наперед заданной величины  $\varepsilon=10^{-4}$ .

При использовании метода конечных разностей и цилиндрических координат  $\{x, r, \theta\}$  не обойтись без применений условий при  $r=0$  для рассчитываемых величин. В работе получено нелокальное граничное условие вида:

$$U^0 = \frac{1}{\gamma} \oint_{\gamma} U d\gamma, \quad (2)$$

где  $U^0$  – значение продольной компоненты скорости на оси канала;  $\gamma$  – элементарная окружность, содержащая осевую точку, а так же более точное условие:

$$U^0 = \frac{4}{3\gamma_1} \oint_{\gamma_1} U d\gamma_1 - \frac{1}{3\gamma_2} \oint_{\gamma_2} U d\gamma_2, \quad (3)$$

где  $\gamma_1, \gamma_2$  – две смежные ближайшие к началу полярной системы отсчета окружности. Условия (2) и (3) использованы при проведении

всех расчетов настоящей диссертационной работы. Условие (3) при его правильной разностной интерпретации обеспечивает второй порядок аппроксимации относительно шага по радиальной координате, по крайней мере, в предельном случае осесимметричных движений. Это обстоятельство позволяет надеяться, что в случае несимметричных движений порядок точности простейшего разностного аналога (3) будет выше первого.

При интегрировании уравнений несимметричных развивающихся течений, записанных в цилиндрических или тороидальных координатах, необходимо рассчитывать все три компоненты сходимости  $U$ ,  $V$ ,  $W$ . Причем очевидно, что значения  $V$  и  $W$  на оси канала являются неоднозначными. В действительности, для переменных  $V$  и  $W$  в каждой точке оси трубы имеем множества значений, мощность которых есть континуум. Эти множества легко воспроизводятся с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} V_k &= U_y^0 \sin \theta_k + U_z^0 \cos \theta_k, \\ W_k &= U_y^0 \cos \theta_k - U_z^0 \sin \theta_k, \quad k = \overline{1, M}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $U_y^0$ ,  $U_z^0$  – уже однозначные проекции скорости на оси декартовых координат, введенных в плоскости нормальных к оси сечений канала. Естественно, что выполняя численный анализ, мы работаем с конечным числом значений  $V$  и  $W$  на оси канала. Их количество будет равно полному числу сеточных лучей в выделенном сечении канала.

Для класса развивающихся течений электропроводящей жидкости в трубах постоянного сечения находящихся в поперечных магнитных полях характерно, что аксиальное движение приближенно можно считать осесимметричным. При этом, радиальные и окружные перемещения весьма приглушены действием поля и не обладают симметрией относительно оси канала. Тем не менее, анализируя расчетные поля кинематических характеристик можно установить, что имеются две плоскости симметрии в распределениях  $V$  и  $W$  компонент скорости. Однако, вполне допустимым является приближенное описание динамики электропроводящих жидкостей, опирающуюся на систему (5) в которой все искомые распределения уже являются симметричными относительно осевой линии канала.

Расчеты выполненные по несимметричной модели, описанной во второй главе, показывают что по крайней мере до значений  $Na = 5$  кинематические и динамические характеристики потока жидкости могут быть представлены следующей системой уравнений:



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r}\right) &= -\operatorname{Re} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \operatorname{Ha}^2 (1 - U), \\ 2\pi \int_0^R U r dr &= G(t), \\ \operatorname{div}(\vec{V}) &= 0, \\ \vec{V} &\equiv [U(t, x, r), V(t, x, r)] \end{aligned} \right\}, (5)$$

в которой распределения  $U$  и  $V$  уже не зависят от  $\theta$ , а  $p_1 = p_1(x, t)$ . Здесь  $\operatorname{Re}$ ,  $\operatorname{Ha}$  – числа Рейнольдса и Гартмана,  $G$  – объемный расход жидкости.

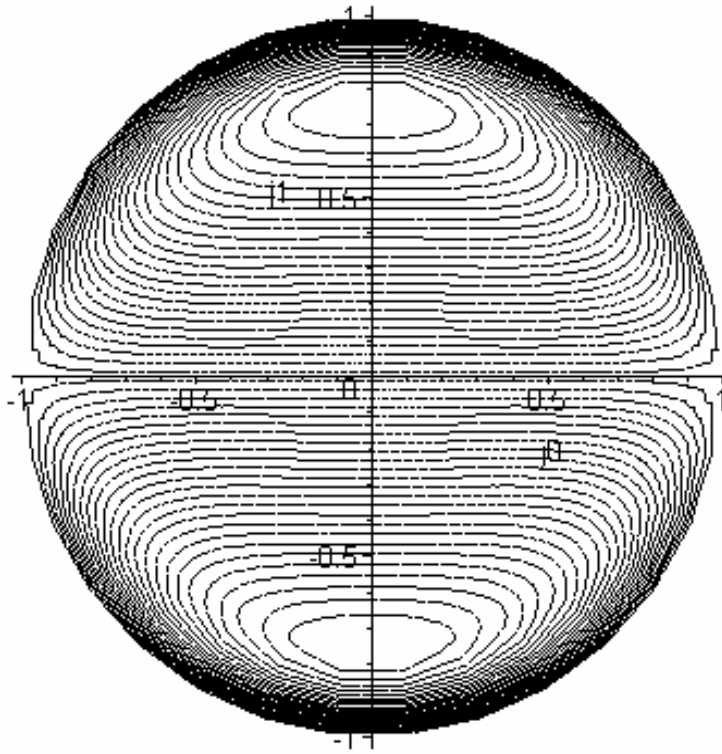


Рис. 1. Эффект Гартмана для контуров тока. Распределения отвечают участку стабилизированного течения

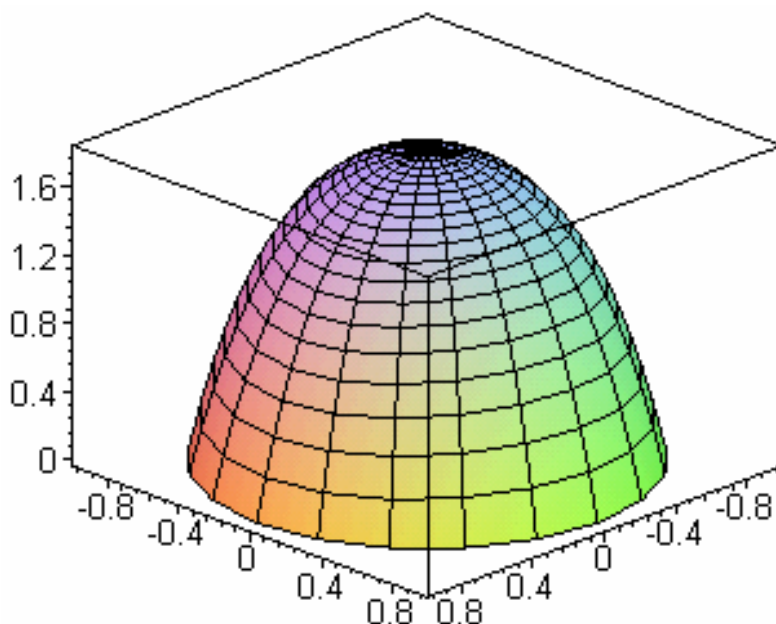


Рис. 2. Поверхность скоростей для  $Ha=5$ ;  $X=30$ ;  $Re=400$

**В третьей главе** рассмотрена численная модель закрученного потока электропроводящей жидкости в узких трубках при воздействии на них магнитного поля. Способом осреднения всех соотношений модели по окружной координате получены приближенные уравнения закрученного потока в осесимметричных каналах, которые имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re} \left( \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} \right) &= -\text{Re} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \text{Ha}^2 (1 - U) \\ \text{Re} \left( \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{VW}{r} \right) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial W}{\partial r} \right) - \frac{W}{r^2} - \frac{\text{Ha}^2}{2} W \\ 2\pi \int_0^R U r dr &= G(t), \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{W^2}{r}, \quad \frac{\partial(Ur)}{\partial x} + \frac{\partial(Vr)}{\partial r} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Здесь давление, как и компоненты скорости, являются функциями продольной и радиальной координат  $(x, r)$  и быть может времени  $t$  и не зависит от окружной координаты  $\theta$ ;  $G(t)$  – объемный расход жидкости через сечение трубки, имеющей форму окружности радиуса  $R$ . Уравнения (8) относятся к классу моделей безиндукционного приближения. Полученная система дифференциальных уравнений интегрировалась численно, по способу, и была использована для анализа как прямоточных так и закрученных течений вязкой электропроводящей жидкости в круглых трубках,

помещенных в магнитное поле и без них. Ниже приведены некоторые результаты вычислений, выполненные по модели (8) включая результаты тестирования на данных опытов.

Как видим из рис. 3 даже в рамках модели осесимметричного приближения удается добиться хорошего согласования с экспериментальными данными.

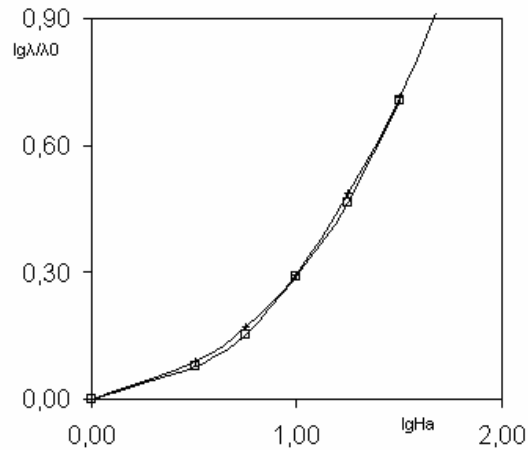


Рис. 3. Коэффициент сопротивления для трубки с электропроводящей жидкостью, находящейся в поперечном магнитном поле. Сплошная линия – расчет по модели (4,5), значки – данные опытов

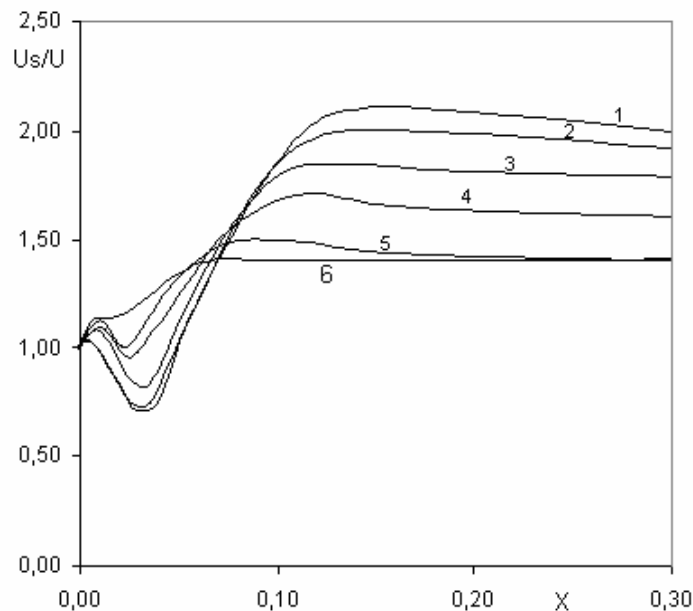


Рис. 4. Распределение по длине канала относительной продольной скорости на оси симметрии в закрученном потоке  $Re=80$ ,  $Ro=2$  при различных числах  $Ha$ : 1 –  $Ha=0$ ; 2–2; 3–4; 4–6; 5–8; 6–10. Здесь  $X = x/ReR$  – приведенная осевая координата

Некоторые результаты иллюстрирующие эффект совместного влияния магнитного поля и крутки потока на тенденцию к образованию возвратных движений представлены на рис. 4, 5.

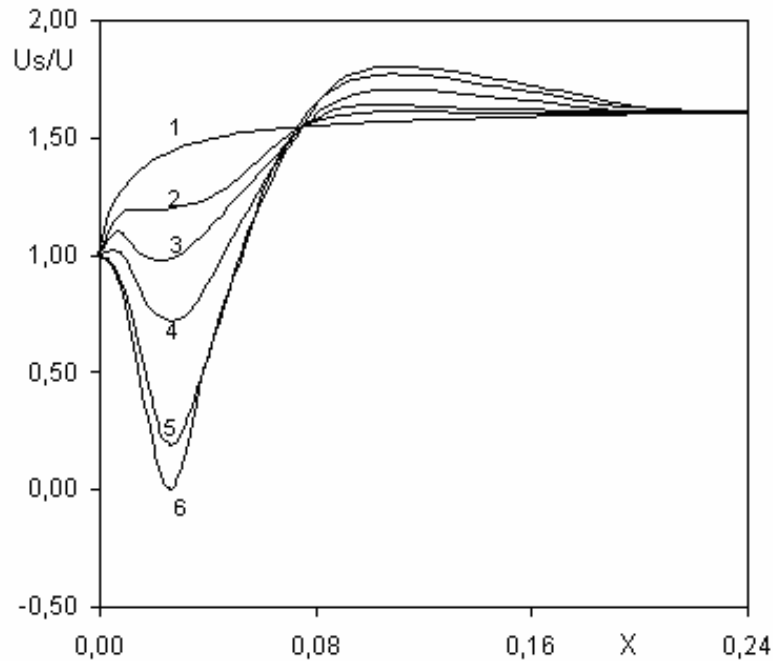


Рис. 5. Распределение по длине канала относительной продольной скорости на оси симметрии в закрученном потоке  $Re=100$ ,  $Na=6$  при различных числах  $Ro$ : 1– $Ro=0$ ; 2–1,5; 3–2; 4–2,5; 5–3; 6–4. Здесь,  $U_s$  – скорость на оси канала;  $\bar{U}$  – среднемассовая скорость потока

**В четвертой главе** рассмотрены автомодельные течения вязкой проводящей жидкости в каналах с частично проводящими стенками. В этом случае линии тока являются параллельными оси трубы, вектор скорости имеет вид  $\vec{V} = (U, 0, 0)$ , а градиент давления, входящий в осевую проекцию уравнения импульсов является постоянной величиной. В таких условиях все гидродинамические и физические величины могут зависеть лишь от полярных координат  $r$  и  $\theta$ , введенных в плоскостях нормальных сечений трубы. Поэтому удастся исключить нелинейные конвективные члены в уравнении движения, и оно становится не параболическим как ранее, когда были рассмотрены развивающиеся течения, а эллиптическим. Далее считаем, что стенки канала выполнены в виде рельсовой камеры причем два обращенных друг к другу рельса являются проницаемыми для электрического тока, а два других являются участками изоляции канала. Таким образом, электрические заряды могут заходить в поток и выходить из него че-

рез участки проводимости и, поэтому, во внешней электрической цепи мог возникать индуцированный движением жидкости электрический ток (рис. 8, 9). Канал с описанной конструкцией стенок, находящийся в магнитном поле воспроизводит простейшую схему МГД-генератора. Автор исследовал влияние поперечных токов на поля скоростей в канале. Это влияние иллюстрируется рис. 6,7.

Характер движения заряженных частиц иллюстрируется рисунками 8, 9.

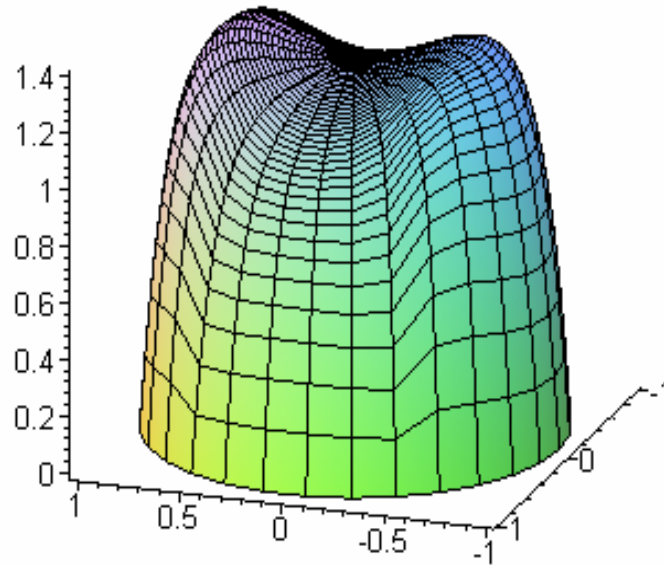


Рис. 6. Поверхность скоростей в канале с частично проводящими стенками.  $Na = 7$ , получено  $dP/dx = 0,088$

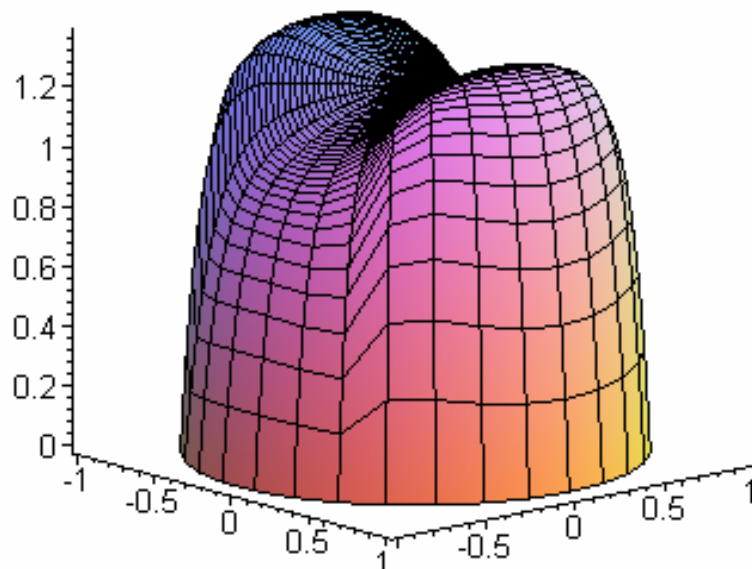


Рис. 7. Поверхность скоростей в канале с частично проводящими стенками.  $Na = 9$ , найдено  $dP/dx=0,135$

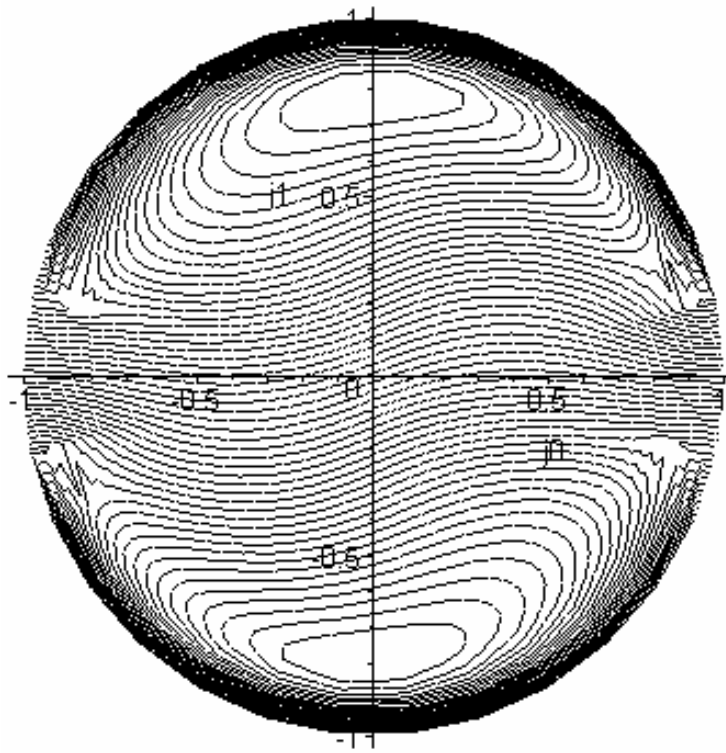


Рис. 8. Линии движения заряженных частиц для случая, когда угловой размер окна прозрачности равен  $\alpha = \pi/4$

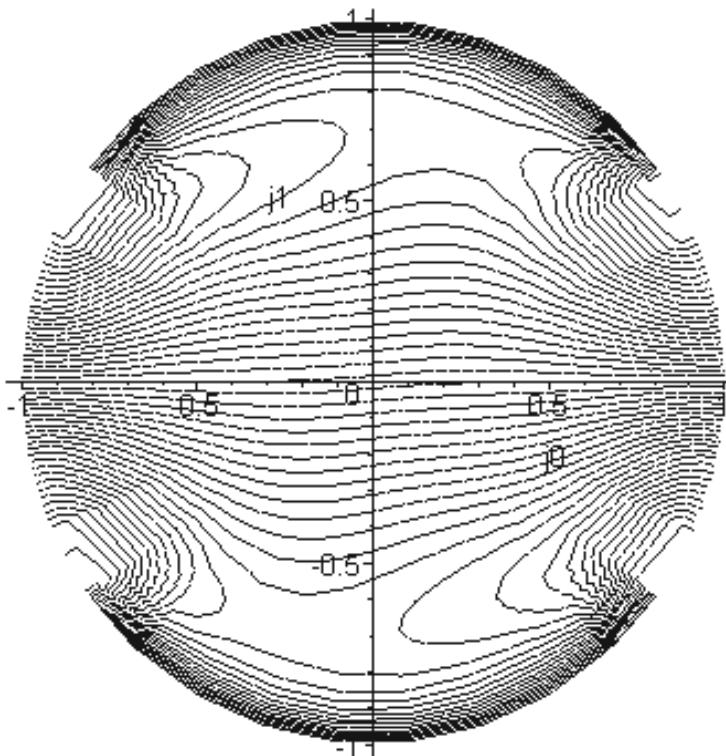


Рис. 9. Линии электрического тока для случая  $\alpha = \pi/2$

Если во внешней электрической цепи возникал ток, то при том же перепаде давления средняя скорость жидкости заметно увеличивалась в сравнении со случаем течения в канале с непроводящими стенками. Этот эффект составлял величину порядка 25%. Наряду с этим, в данной главе выполнены параметрические расчеты по влиянию чисел Гартмана и углового размера окон проводимости на распределения гидродинамических и электромагнитных величин.

**В заключение** диссертации приводятся основные выводы по работе:

1. Получено граничное условие, позволяющее вычислять значения искомых магнитогидродинамических величин на полярной оси при неосесимметричных процессах.
2. Разрешена координатная неопределенность, возникающая при вычислениях радиальной и окружной компонент скорости на оси трубы.
3. Построено осесимметричное приближение для описания незакрученного МГД-течения в узких осесимметричных трубках.
4. Предложено также осесимметричное приближение для описания закрученного МГД-потока в трубках круглого поперечного сечения.
5. Выявлен эффект увеличения скорости за счет движения заряженных частиц поперек потока в каналах с частично проводящими стенками.

**Основные публикации автора по теме диссертации.**

1. Корнелик С.Е., Клевцова А.В., Павлова О.А. Движение эритроцита в аневризме кровеносного сосуда под действием магнитного поля // Вычислительная гидродинамика. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999, с. 68-74.
2. Бубенчиков А.М., Клевцова А.В., Фирсов Д.К. Приближение «узкого канала» для течения электропроводящей жидкости // Вестник ТГУ, 2001, №4, с. 53-64.
3. Бубенчиков А.М., Клевцова А.В., Фирсов Д.К. Течение электропроводящих жидкостей в тонких трубках в поперечном магнитном поле // Математическое моделирование, 2003, т.15 №9, с. 76-87.
4. Бубенчиков А.М., Клевцова А.В., Харламов С.Н. Закрученный поток проводящей жидкости в узких трубах при наличии магнитного поля // Математическое моделирование, 2004, т.16, №9, с. 109-122.