На правах рукописи

Горбатенко Анна Евгеньевна

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ПОТОКАМИ В СПЕЦИАЛЬНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2010

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики ГОУ ВПО «Томский государственный университет»

Научный руководитель: доктор технических наук,
профессор Назаров Анатолий Андреевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
доцент Рожкова Светлана Владимировна

кандидат физико-математических наук,
доцент Колесникова Светлана Ивановна

Ведущая организация: Сибирский федеральный университет,
г. Красноярск

Защита состоится 2 декабря 2010 г. в 12:30 на заседании диссертационного совета Д 212.267.08 при ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, корп. 2, ауд. 102.

Отзывы на автореферат (в двух экземплярах), заверенные гербовой печатью организации, просим направлять по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, ученому секретарю ТГУ Буровой Н.Ю.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу г. Томск, пр. Ленина, 34а.

Автореферат разослан 27 октября 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.267.08,
доктор технических наук, профессор А.В. Скворцов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Математические модели систем массового обслуживания широко применяются при исследовании процессов в системах управления и организаций промышленными и сельскохозяйственными предприятиями, в сфере обслуживания; в системах проектирования и анализа функционирования автоматизированных систем управления, в распределенных большемасштабных вычислительных системах, кластерных и Grid-системах, в системах противовоздушной обороны и средствах радиолокации, в различных экономических системах, системах телекоммуникации и т.п.

Первые работы по теории массового обслуживания связаны с именем датского ученого А.К. Эрланга. Его труды, опубликованные в 1908–1922 гг., в области проектирования и анализа функционирования телефонных станций вызвали большой интерес к математическим задачам по организации работы телефонных сетей.

В 1924 г. Д. Юл опубликовал работу, в которой определил понятие процесса чистого размножения, а в 30-х годах В. Феллер ввел понятие процесса размножения и гибели. Одновременно были опубликованы фундаментальные работы по теории массового обслуживания А.Н. Колмогоровым, А.Я. Хинчиным и Ф. Поллачеком.

Основные работы в СССР по теории массового обслуживания с 60-х годов принадлежат школам Б.В. Гнеденко, А.А. Боровкова.

Развитие микроэлектроники в 80-е года привело к существенным изменениям в области вычислительной техники и средств связи. Системы массового обслуживания оказались наиболее лучшим математическим аппаратом для исследования и оптимизации процессов в телекоммуникационных сетях. Применение классических моделей систем массового обслуживания к исследованию процессов в телекоммуникационных сетях давало достаточно грубые результаты. В связи с этим появилась необходимость создания адекватных математических моделей систем массового обслуживания, применимых к реальным телекоммуникационным системам, и, прежде всего адекватных моделей телекоммуникационных потоков.

Одним из новых направлений исследований стало изучение процессов обслуживания в системах, входящие потоки которых отличны от классических потоков (*пуассоновский* и *рекуррентный* потоки). В книге Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко, изданной в 2007 г., потоки этого класса названы *специальными потоками однородных событий*. В монографии А.Н. Дудина и В.И. Клименок специальные потоки названы коррелированными.

В 1955 г. Д. Кокс предложил рассматривать потоки, интенсивность которых зависит от состояний некоторого процесса, управляющего такими потоками. Эти потоки были названы *процессами Кокса*.

Потоки Кокса являются основой класса специальных или коррелированных потоков, наиболее популярным из которых является MAP-поток (Markovian Arrival Process). Впервые понятие MAP-потока было введено М. Ньютсом в 1979 г., а затем уточнено Д. Лукантони. Описание этого потока однородных событий можно найти в работах Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко, А.Н. Дудина, А.А. Назарова. Данный поток широко применим при исследовании СМО.

В терминах различных математических школ MAP-потоки также называются *дважды стохастическими потоками*, которые были введены в 1964 г. Д. Кингменом. В таких потоках, во-первых, интервалы времени между наступлениями событий являются случайными, во-вторых, с течением времени интенсивность потока меняется случайным образом. Частными случаями дважды стохастических потоков являются *альтернирующие*, *синхронные* и *полусинхронные* потоки, рассматриваемые А.М. Горцевым и его учениками с целью оценки параметров этих потоков.

Наиболее общим ординарным потоком однородных событий является полумарковский или SM-поток (Semi-Markovian process). Идея введения такого потока была выдвинута Э. Леви (1954 г.) и В. Смитом (1955 г.). Системы массового обслуживания с таким входящим потоком интенсивно изучаются в настоящее время.

Исследователи, занимающиеся потоками, также занимались изучением СМО с неограниченным числом приборов, на вход которых поступают специальные потоки, применяя главным образом методы численного анализа. В работах Д. Баума, Л. Броера, были рассмотрены СМО BMAP|GI|∞, COX|GI|∞, получено асимптотическое распределение числа занятых приборов в условии растущего времени обслуживания.

Для изучения потоков однородных событий и систем массового обслуживания применяют методы аппроксимации, имитационного моделирования, численного анализа, а также диффузионной или гауссовской аппроксимации. Применение этих методов к анализу коррелированных потоков и систем массового обслуживания с такими потоками либо невозможно в связи с существенным увеличением размерности решаемых задач, либо дает недопустимо большую погрешность. Эти методы не учитывают существенной особенности коррелированных потоков, заключающейся в дискретности процессов, управляющих этими потоками.

Целью работы является разработка метода исследования коррелированных потоков и систем массового обслуживания с такими потоками.

В рамках указанной цели были поставлены **следующие задачи**:

1. Определение специальных предельных условий и классификация этих условий.

2. Модификация метода асимптотического анализа в специальных предельных условиях для исследования моделей коррелированных потоков, систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов и такими входящими потоками.

3. Исследование допредельных моделей систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов с коррелированными входящими потоками и детерминированным временем обслуживания.

Научная новизна результатов, выносимых на защиту, состоят в следующем:

1. Определены предельные условия, которые названы специальными, учитывающие специфику коррелированных потоков, управляемых случайными процессами с дискретным множеством состояний, выполнена их классификация.

2. Введено понятие квазиразложимых цепей Маркова, допускающее предельно редкие переходы между классами, которое позволяет существенно сократить размерность решаемых задач, в том числе при исследовании коррелированных потоков и систем массового обслуживания с такими потоками больших размерностей.

3. Разработана модификация метода асимптотического анализа моделей коррелированных потоков однородных событий и систем массового обслуживания с такими потоками, позволяющая в предельных условиях находить аналитические выражения для вероятностно-временных характеристик коррелированных потоков и систем массового обслуживания с такими потоками.

4. Применив интегральный подход к исследованию систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов с входящим MAP-потоком и детерминированным обслуживанием с использованием методов просеянного потока, матричной экспоненты и формулы Сильвестра найдено допредельное распределение вероятностей числа занятых приборов в системе.

Методы исследования. Основная часть исследований носит теоретический характер и основана на рассмотрении различных математических моделей коррелированных потоков однородных событий и систем массового обслуживания с такими входящими потоками. В ходе исследования рассмотренных моделей потоков и систем массового обслуживания с такими потоками применялся аппарат теории вероятностей, теории случайных процессов, теории массового обслуживания, теории дифференциальных уравнений. Для определения области применимости асимптотических результатов применялись численные расчеты на основе полученных в допредельной ситуации формул, а также была реализована имитационная модель систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов.

Теоретическая ценность работы заключается в разработке модификации метода асимптотического анализа для исследования коррелированных потоков и систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов и коррелированными входящими потоками, в обосновании многомодальности распределения вероятностей состояний таких моделей. Предложенная модификация метода асимптотического анализа допускает его дальнейшее развитие для построения и исследования неординарных потоков (BMAP-потоков) и систем массового обслуживания с такими потоками.

Практическая ценность работы заключается в применении метода асимптотического анализа в специальных предельных условиях и разработке комплекса программ, позволяющие находить вероятностно-временные характеристики исследуемых моделей, для исследования более адекватных математических моделей потоков и систем в различных предметных областях, в частности для исследования телекоммуникационных потоков, компьютерных сетей связи, кредитно-депозитных организаций и страховых компаний.

Достоверность и обоснованность всех полученных в диссертации результатов подтверждается строгим математическим исследованием с использованием методов теории вероятностей и случайных процессов, теории массового обслуживания, дифференциального и интегрального исчислений.

Апробация работы. Основные положения работы и отдельные ее результаты докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

1. IV Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи». г. Анжеро-Судженск, 2007г.
2. VII Всероссийская конференция по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. г. Красноярск, 2008г.
3. XII Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи». Анжеро-Судженск, 2008г.
4. Международная научная конференция «Теория вероятностей и, случайные процессы, математическая статистика и приложения». г. Минск, 2008г.
5. Международная научная конференция «Математические методы повышения эффективности функционирования телекоммуникационных сетей». Минск, 2007г.
6. VII Международная научно-практическая конференция с международным участием «Информационные технологии и математическое моделирование». Анжеро-Судженск, 2008г.
7. Международная научная конференция "Современные математические методы анализа и оптимизации информационно - телекоммуникационных сетей". Минск, 2009г.
8. VIII Международная конференция по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. Красноярск, 2009г.
9. XIII Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи». Анжеро-Судженск, 2009г.
10. VIII Международная научно-практическая конференция с международным участием «Информационные технологии и математическое моделирование». Анжеро-Судженск, 2009г.
11. Международная конференция, посвященной 75-летию профессора, доктора физико-математических наук Г.А. Медведева. Минск, 2010г.
12. XIV Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи». Анжеро-Судженск, 2010г.
13. The third international Conference «Problems of Cybernetics and Informatics» (PCI’2010). Baku, 2010.
14. International conference «Modern Stochastics: Theory and Applications II», Kiev, 2010.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)» Федерального агентства по образованию по проекту «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи».

Публикации. По результатам выполненных исследований автором опубликовано 17 печатных работ, в том числе 5 статей, из них 3 в изданиях, рекомендованных списком ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 105 наименований. Общий объем работы составляет 156 страницу, в том числе основной текст 145 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность работы, сформулирована цель и задачи диссертационного исследования, изложена его научная новизна, раскрыты теоретическое значение и практическая ценность полученных результатов, кратко излагается содержание диссертационной работы.

В главе 1 определяются специальные предельные условия для рассматриваемых коррелированных потоков (MAP, SM) и проводится исследования рассматриваемых потоков с помощью метода асимптотического анализа в специальных предельных условиях.

Случайный процесс $n(t)$ для рассматриваемых коррелированных потоков не является марковским, поэтому с помощью метода дополнительной переменной в разделе 1.1 выполнена их марковизация, а в разделе 1.2 получены системы дифференциальных уравнений Колмогорова для характеристических функций, определяющих функционирование этих потоков.

Для MAP-потока была введена дополнительная переменная $k(t)$. Для марковского процесса $\{k(t),n(t)\}$ определены характеристические функции

$$H(k,u,t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jun}P(k,n,t)$$

и получена задача Коши

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H(u,t)}{\partial t}=H(u,t)\left\{Q+(e^{ju}-1)B\right\},\\ H(u,0)=R,\end{cases}\tag{1}$$

для векторной характеристической функции

$$H(u,t)=\left\{H(1,u,t),H(2,u,t),...\right\}.$$

Здесь Q – матрица инфинитезимальных характеристик, управляющей цепи Маркова $k(t)$, а матрица $B = \Lambda+D*Q$, Λ – диагональная матрица условных интенсивностей MAP-потока, D – матрица вероятностей наступления событий MAP-потока в момент изменения состояния управляющей цепи Маркова, R – вектор стационарного распределения вероятностей цепи Маркова $k(t)$.

Для SM-потока были введены дополнительные переменные $s(t)$, $z(t)$. Для этого марковского процесса $\{s(t),n(t),z(t)\}$ определены характеристические функции

$$H(s,u,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jun}P(s,n,z,t),$$

и получена задача Коши

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H(u,z,t)}{\partial t}=\dfrac{\partial H(u,z,t)}{\partial z}+\dfrac{\partial H(u,0,t)}{\partial z}\left\{e^{ju}A(z)-I\right\},\\ H(u,z,0)=R(z),\end{cases} \tag{2}$$

для векторной характеристической функции

$$H(u,z,t)=\left\{H(1,u,z,t),H(2,u,z,t),...\right\}.$$

Здесь I – единичная матрица, а $R(z)$ – вектор стационарного распределения двумерного марковского процесса $\{s(t),z(t)\}$, $A(z)$ – полумарковская матрица.

Решение полученных задач найдено с помощью метода асимптотического анализа в специальных условиях.

1. В условии предельно редких изменений состояний потока.

Условие предельно редких изменений состояний MAP-потока:

$$q_{k\nu}^{(1)}=\delta q_{k\nu},\quad \delta\to 0,$$

определяющие достаточно малые значения инфинитезимальных характеристик. Здесь $Q^{(1)}$ матрица инфинитезимальных характеристик управляющей MAP-потоком цепи Маркова $k(t)$

Условие предельно редких изменений состояний полумарковского потока формализуется следующим равенством для матрицы $P(\delta)$ вероятностей переходов его вложенной цепи Маркова

$$P(\delta)=I+\delta\cdot Q.$$

2. В условии растущих условных интенсивностей потока.

Условием растущих условных интенсивностей MAP-потока:

$$\lambda_k=N\cdot\lambda_k^{(1)},\ N\to\infty.$$

определяющие достаточно большие значения условных интенсивностей потока и существенные различия их значений.

3. В условии квазиразложимости.

Цепь Маркова $k(t)$ с непрерывным временем t будем называть квазиразложимой, если выполняется следующее условие:

$$Q^{(1)}=Q+\delta Q^{(0)},\delta\to 0,$$

где δ – некоторый малый положительный параметр ($\delta\to 0$).

Цепь Маркова с дискретным временем будем называть квазиразложимой, если для матрицы вероятностей переходов выполнено следующее условие:

$$P(\delta)=P+\delta\cdot Q,$$

где δ – некоторый малый положительный параметр ($\delta\to 0$). Здесь P – блочно-диагональная матрица, блоки которой являются стохастическими матрицами, а свойства матрицы Q совпадают со свойствами матрицы инфинитезимальных характеристик.

Применяя метод асимптотического анализа в условиях предельно редких изменений состояний потока доказаны следующие утверждения:

Теорема 1.1. *Для решения* $F(k,u,t,\delta)$ *задачи* (1) *существует предел*

$$\lim_{\delta\to 0} F(k,u,t,\delta) = F_1(k,u,t), \tag{3}$$

в котором функция $F_1(k,u,t)$ *имеет вид*

$$F_1(k,u,t) = R(k)\exp\left\{\left(e^{ju}-1\right)\lambda_k t\right\}. \tag{4}$$

Следствие**.** *Асимптотическое распределение вероятностей* $P_1(n,t)$ *числа* $n(t)$ *событий потока в условии предельно редких изменений состояний MAP-потока, наступивших за время t, является взвешенной суммой пуассоновских распределений с параметрами* $\lambda_k t$ *и с весами* $R(k)$*, то есть имеет вид*

$$P_1(n,t) = \sum_k R(k)\frac{(\lambda_k t)^n}{n!}\exp\{-\lambda_k t\}. \tag{5}$$

Аппроксимацию первого порядка можно существенно уточнить, рассматривая асимптотики более высокого порядка, полагая

$$P(n,t) = P_1(n,t) + \sum_{m=1}^{\infty}\delta^m f_{m+1}(n,t), \tag{6}$$

где

$$f_m(n,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{jun}F_m(u,t)E\,du. \tag{7}$$

Теорема 1.2. *Функции* $F_m(k,u,t)$ *определяются рекуррентной последовательностью*

$$F_{m+1}(k,u,t) = \int_0^t \exp\left\{\lambda_k(t-\tau)\left(e^{ju}-1\right)\right\}\sum_{\nu} F_m(\nu,u,\tau)\left\{1+\left(e^{ju}-1\right)d_{\nu k}\right\}q_{\nu k}\,d\tau. \tag{8}$$

В разделе 1.5 рассматривается MAP-поток в условии растущих условных интенсивностей. Исследование MAP-потока в данных условиях сводится к исследованию MAP-потока в условии предельно редких изменений состояний, которое было выполнено в разделе 1.4.

В разделе 1.6 и 1.8 были исследованы MAP-поток и SM-поток методом асимптотического анализа в условии квазиразложимости, позволивший существенно понизить размерность решаемых задач, исследование которых выполнено методом асимптотического анализа в условии растущего времени наблюдения. Найдено асимптотическое распределение вероятностей $P_1(n,t)$ числа $n(t)$ событий, наступивших в квазиразложимом потоке.

Асимптотическое распределение вероятностей числа событий, наступивших в квазиразложимом MAP-потоке за время *t* является взвешенной суммой дискретных аналогов гауссовских распределений и имеет вид

$$P_1(n,t) = \sum_{m=1}^{M} c_m\left(\exp\left\{-\frac{(n-a_m t)^2}{2\sigma_m^2 t}\right\}\Bigg/\sum_{\nu=0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(\nu-a_m t)^2}{2\sigma_m^2 t}\right\}\right), \tag{9}$$

где

$$a_m = r^{(m)}B^{(m)}E_m,\ \ \sigma_m^2 = a_m + 2f_2^{(m)}B^{(m)}E_m,\ \ B^{(m)} = \Lambda^{(m)} + D^{(m)} * Q_{mm}.$$

Вектор-строка $f_2^{(m)}$ является решением системы

$$f_2^{(m)}Q_{mm} + r^{(m)}\left(B^{(m)} - a_m I^{(m)}\right) = 0,$$

которое удовлетворяет условию

$$f_2^{(m)}E_m = 0.$$

Константы c_m определяются системой

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{M} c_m r^{(m)} Q_{m\nu}^{(0)} E_\nu = 0, \nu = \overline{1, M-1}, \\ \sum_{m=1}^{M} c_m = 1. \end{cases}$$

Асимптотическое распределение вероятностей числа событий, наступивших в квазиразложимом SM-потоке за время t является взвешенной суммой дискретных аналогов гауссовских распределений и имеет вид

$$P_1(n,t) = \sum_{m=1}^{M} c_m \left(\exp\left\{ -\frac{(n-a_m t)^2}{2\sigma_m^2 t} \right\} \Big/ \sum_{\nu=0}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{(\nu - a_m t)^2}{2\sigma_m^2 t} \right\} \right), \tag{11}$$

где

$$a_m = \frac{1}{r^{(m)} A_{mm} E_m},\ \ \sigma_m^2 = a_m + 2\frac{\partial f_2^{(m)}(0)}{\partial z} E_m.$$

Здесь вектор функция $f_2^{(m)}(z)$ является таким решением уравнения

$$\frac{\partial f_2^{(m)}(z)}{\partial z} + \frac{\partial R_2^{(m)}(0)}{\partial z} A_{mm}(z) + \frac{\partial f_2^{(m)}(0)}{\partial z}\left(A_{mm}(z) - I\right) - a_m R^{(m)}(z) = 0,$$

которое удовлетворяет условию

$$f_2^{(m)}(\infty) E_m = 0.$$

Константы c_m определяются системой

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{M} c_m r^{(v)} Q_{mv} E_v = 0, v = \overline{1, M}, \\ \sum_{m=1}^{M} c_m = 1. \end{cases}$$

В разделе 1.7 с помощью метода асимптотического анализа в условиях предельно редких изменений состояний потока и преобразований Лапласа доказана следующая теорема.

Теорема 1.3 *Асимптотическое при* $\delta \to 0$ *распределение вероятностей* $P_1(n,t)$ *числа n событий, наступивших в SM-потоке за время t в условии предельно редких изменений состояний потока, имеет следующий вид*

$$\begin{cases} P_1(0,t) = 1 - \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\sum\limits_s a_s r_s \left(1-G_{ss}^*(y)\right)dy, \\ P_1(n,t) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\sum\limits_s a_s r_s \left(1-G_{ss}^*(y)\right)^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{jun} G_{ss}^{*\,n-1}(y)dy, \end{cases} \qquad (10)$$

где

$$a_s = \frac{1}{\int\limits_0^{\infty}\left(1-G_{ss}(x)\right)dx},$$

r *– это вектор стационарного распределения вероятностей вложенной цепи Маркова.*

В главе 2 выполнено исследование марковских систем массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов и с коррелированными входящими потоками в специальных предельных условиях.

Случайный процесс $i(t)$ для рассматриваемых СМО с коррелированными входящими потоками не является марковским. Поэтому с помощью метода дополнительной переменной в разделе 2.1 была выполнена их марковизация, аналогично марковизации для потоков, и получены системы дифференциальных уравнений Колмогорова для характеристических функций, определяющих функционирование этих систем.

Для векторной характеристической функции $H(u)$ системы с входящим MAP-потоком, при задании дополнительного условия, получена следующая задача

$$\begin{cases} j\mu\left(e^{-ju}-1\right)\dfrac{\partial H(u)}{\partial u} = H(u)\left\{Q+\left(e^{ju}-1\right)B\right\}, \\ H(0) = R. \end{cases} \qquad (12)$$

Для векторной характеристической функции $H(u,z)$ системы с входящим SM -потоком, при задании дополнительного условия, получена следующая задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(u,z)}{\partial z} + j\mu\left(1-e^{-ju}\right)\dfrac{\partial H(u,z)}{\partial u} + \dfrac{\partial H(u,0)}{\partial z}\left\{e^{ju}A(z)-I\right\} = 0, \\ H(0,z) = R(z). \end{cases} \qquad (13)$$

Полученные для систем массового обслуживания дифференциальные уравнения для характеристических функций существенно отличаются от уравнений для потоков тем, что дифференцирование осуществляется по разным переменным. Несмотря на это применение специальных предельных условий, дает аналогичные результаты, полученные для потоков.

В разделах 2.2 и 2.3 с помощью метода асимптотического анализа в условиях предельно редких изменений состояний потока и условиях растущих условных интенсивностей найдено первое приближение асимптотического стационарного распределения вероятностей числа $i(t)$ занятых приборов в системе

MAP|M|∞, которое является взвешенной суммой пуассоновских распределений с весами $R(k)$. Поэтому рассматриваемое распределение может быть многомодальным.

$$P_1(i) = \sum_k R(k) \frac{(\rho_k)^n}{n!} e^{-\rho_k}, \tag{14}$$

$$\rho_k = \frac{\lambda_k}{\mu}.$$

Также найдены асимптотики более высокого порядка, существенно повышающие точность аппроксимации допредельного распределения.

В разделах 2.4 и 2.5 и 2.6 проведено исследование систем MAP|M|∞ с квазиразложимым MAP-потоком и систем SM|M|∞ в условии предельно редких изменений состояний и условии квазиразложимости. В предельных условиях удается существенно понизить размерность решаемых задач, исследование которых выполняется методом асимптотического анализа в условиях растущего времени обслуживания.

Асимптотическое стационарное распределение вероятностей $P_1(i)$ для системы MAP|M|∞ с квазиразложимым MAP-потоком имеет вид

$$P_1(i) = \sum_{m=1}^{M} c_m \left(\exp\left\{ -\frac{(i\mu - a_m)^2}{2\sigma_m^2} \right\} \Big/ \sum_{\nu=0}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{(\nu\mu - a_m)^2}{2\sigma_m^2} \right\} \right). \tag{15}$$

В условии предельно редких изменений состояний входящего SM-потока распределение вероятностей числа занятых приборов в системе SM|M|∞ имеет вид

$$P_1(i) = \sum_s r_s \left(\exp\left\{ -\frac{(i\mu - a_s)^2}{2\sigma_s^2} \right\} \Big/ \sum_{m=0}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{(m\mu - a_s)^2}{2\sigma_s^2} \right\} \right), \tag{16}$$

где

$$\sigma_s^2 = a_s + \frac{\partial f_2(s,0)}{\partial z}.$$

Здесь функция $f_2(s,z)$ является таким решением уравнения

$$\frac{\partial f_2(s,z)}{\partial z} + \frac{\partial f_2(s,0)}{\partial z}\left(G_{ss}(z) - 1\right) + \frac{\partial R(s,0)}{\partial z} G_{ss}(z) - a_s R(s,z) = 0,$$

которое удовлетворяет условию

$$f_2(s,\infty) = 0.$$

Для системы SM|M|∞ с квазиразложимым SM-потоком распределение вероятностей числа занятых приборов в системе имеет вид

$$P_1(i) = \sum_{m=1}^{M} c_m \left(\exp\left\{ -\frac{(i\mu - a_m)^2}{2\sigma_m^2} \right\} \Big/ \sum_{\nu=0}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{(\nu\mu - a_m)^2}{2\sigma_m^2} \right\} \right). \tag{17}$$

В главе 3 выполнено исследование систем массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов, произвольной функцией распределения времени обслуживания заявок и с коррелированными входящими потоками в специальных предельных условиях.

Случайный процесс $i(t)$ для рассматриваемых СМО с коррелированными входящими потоками не является марковским. Применение метода дополнительной переменной не дает марковизацию процесса $i(t)$, поэтому в данной главе был применен метод просеянного потока, основная идея которого заключается в том, что с вероятностью $S(t)$ поступившая заявка формирует событие просеянного потока, а с вероятностью $1 - S(t)$ не рассматривается.

В некоторый конечный момент времени t_1 число $n(t)$ событий, наступивших в просеянном потоке равно числу занятых приборов в рассматриваемой системе массового обслуживания, то есть $n(t_1) = i(t_1)$.

Исследование таких систем массового обслуживания сводится к исследованию просеянных коррелированных потоков. Принципиальное отличие просеянных коррелированных потоков от исследованных в первой главе потоков заключается в том, что они являются нестационарными.

Для векторной характеристической функции $H(u,t)$ просеянного потока системы MAP|GI|∞, при задании начального условия, получена следующая задача Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(u,t)}{\partial t} = H(u,t)\left\{Q + S(t)\left(e^{ju}-1\right)B\right\}, \\ H(u,t_0) = R, \quad t_0 \le t \le t_1. \end{cases} \tag{18}$$

Для векторной характеристической функции $H(u,z,t)$ просеянного потока системы SM GI|∞, при задании начального условия, получена следующая задача Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(u,z,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial H(u,z,t)}{\partial z} + \dfrac{\partial H(u,0,t)}{\partial z}\left\{A(z) - I + \left(e^{ju}-1\right)S(t)A(z)\right\}, \\ H(u,z,t_0) = R(z). \end{cases} \tag{19}$$

В разделах 3.3 и 3.4 с помощью метода асимптотического анализа в условиях предельно редких изменений состояний потока и условиях растущих условных интенсивностей найдено первое приближение асимптотического распределения вероятностей числа $i(t)$ занятых приборов в системе MAP|GI|∞, которое является взвешенной суммой пуассоновских распределений с весами $R(k)$.

$$P_1(i) = \sum_k R(k)\frac{(\rho_k)^i}{i!}\cdot e^{-\rho_k}, \tag{20}$$

где

$$\rho_k = \lambda_k \cdot b, \quad b = \int_{-\infty}^{0} S(x)\,dx = \int_0^{\infty}\left(1 - B(x)\right)dx.$$

Также найдены асимптотики более высокого порядка, существенно повышающие точность аппроксимации допредельного распределения.

В разделах 3.5 3.7 и 3.8 проведено исследование системы MAP|GI|∞ в условии квазиразложимости, системы SM|GI|∞ в условиях предельно редких изменений состояний потока и в условии квазиразложимости . В предельных условиях удается существенно понизить размерность решаемых задач, исследование которых выполняется методом асимптотического анализа в условиях растущего времени обслуживания.

Для системы MAP|GI|∞ в условии квазиразложимости распределение вероятностей числа занятых приборов в системе имеет вид

$$P_1(i)=\sum_{m=1}^{M}c_m\left(\exp\left\{-\frac{(i-\rho_m)^2}{2\sigma_m^2}\right\}\Big/\sum_{\nu=0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(\nu-\rho_m)^2}{2\sigma_m^2}\right\}\right),\qquad(21)$$

$$\rho_m=a_m b,\quad \sigma_m^2=\rho_m+2\kappa_m\beta,\quad \beta=\int_{-\infty}^{0}S^2(x)dx,\quad \kappa_m=f_2^{(m)}B^{(m)}E_m.$$

В условии предельно редких изменений состояний полумарковского потока найдено распределение вероятностей числа занятых приборов в системе SM|GI|∞.

$$P_1(i)=\sum_{s}r_s\left(\exp\left\{-\frac{(i-\rho_s)^2}{2\sigma_s^2}\right\}\Big/\sum_{\nu=0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(\nu-\rho_s)^2}{2\sigma_s^2}\right\}\right).\qquad(22)$$

В предельном условии квазиразложимости для систем SM|GI|∞ удается существенно понизить размерность решаемых задач. Найдено распределение вероятностей числа занятых приборов в системе

$$P_1(i)=\sum_{m=1}^{M}c_m\left(\exp\left\{-\frac{(i-\rho_m)^2}{2\sigma_m^2}\right\}\Big/\sum_{\nu=0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(\nu-\rho_m)^2}{2\sigma_m^2}\right\}\right).\qquad(23)$$

В разделе 3.6 исследована система массового обслуживания MAP|D|∞. Продолжительность обслуживания заявок является детерминированной величиной, равной b. Доказана следующая теорема.

Теорема 3.1 *Распределение вероятностей $P(i)$ числа занятых приборов в системе MAP|D|∞ имеет следующий вид*

$$P(i)=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi}e^{-jui}R\left(\sum_{l=0}^{N}e^{\omega_l(u)b}\prod_{m\neq l}\frac{\left(Q-\left(e^{ju}-1\right)B-\omega_m(u)I\right)}{\omega_l(u)-\omega_m(u)}\right)Edu,\qquad(24)$$

здесь $\omega_m(u)$ *собственные числа матрицы* $\left(Q-\left(e^{ju}-1\right)B\right)$.

В разделе 3.9 исследована система массового обслуживания SM|D|∞. Доказана следующая теорема.

Теорема 3.2 *Распределение вероятностей* $P(i)$ *числа занятых приборов в системе SM|D|∞ имеет следующий вид*

$$\begin{cases} P(0) = 1 - \dfrac{ar}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{y^2} \left(1 - e^{-jyb}\right)\left(I - A^*(y)\right) E dy, \\ P(i) = \dfrac{ar}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{y^2} \left(1 - e^{-jyb}\right)\left(1 - A^*(y)\right)^2 A^{*i-1}(y) E dy, \end{cases} \tag{25}$$

где

$$A^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha z} dA(z),$$

величина a *определяется равенством*

$$a = \frac{1}{rAE},$$

матрица A *имеет вид*

$$A = \int_0^{\infty} \left(P - A(x)\right) dx,$$

а вектор r *– это вектор стационарного распределения вероятностей вложенной цепи Маркова.*

В главе 4 применяются алгоритмы численного анализа коррелированных потоков, систем массового обслуживания с такими потоками в специальных предельных условиях.

Для определения точности аппроксимации находится расстояние Колмогорова Δ_k.

Для СМО с неограниченным числом приборов и коррелированными входящими потоками реализована имитационная модель.

Для оценки точности результатов, полученных с помощью имитационного моделирования, рассматривается система M|G|∞. Для данной системы распределение числа занятых приборов является пуассоновским с параметром $\rho = \lambda \cdot b$, где b – среднее время обслуживания заявки. Погрешность имитационной модели составляет менее 1%.

Ниже приведены примеры графиков распределений вероятностей числа событий, наступивших в MAP и SM-потоках, полученных методами асимптотического анализа, имитационного моделирования и реализаций численного алгоритма решения систем уравнений Колмогорова.

Данные примеры иллюстрируют многомодальность этих распределений и высокую точность асимптотической аппроксимации.

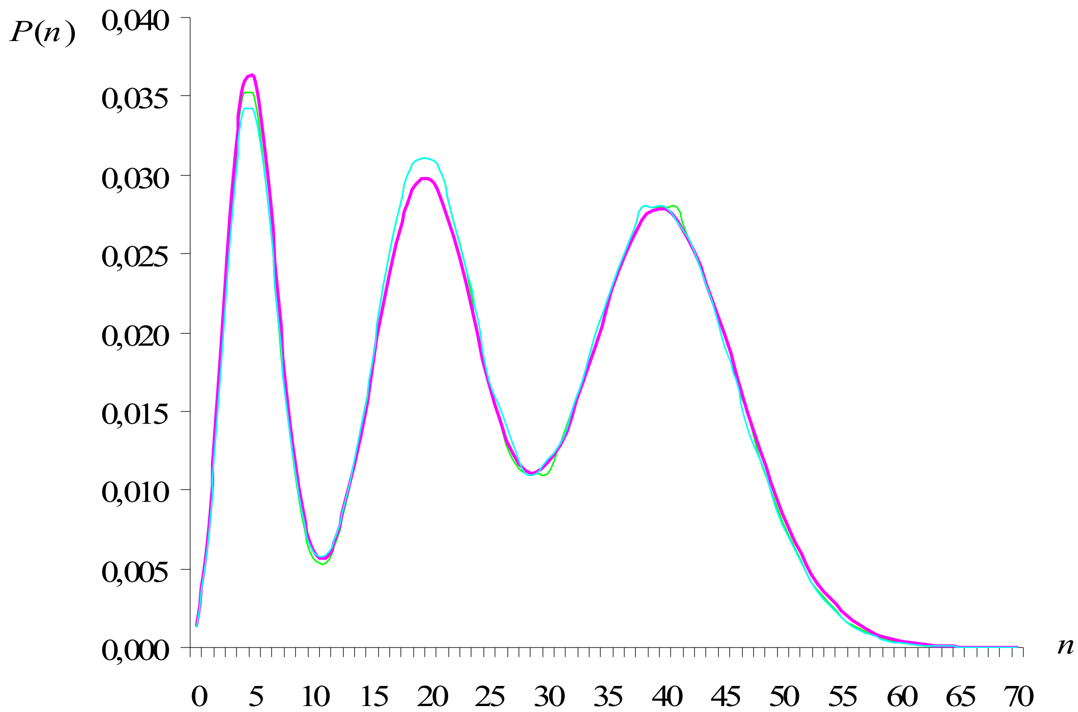

Рис.4.1 – Распределение вероятностей числа событий, наступивших в MAP-потоке за время $t = 5$

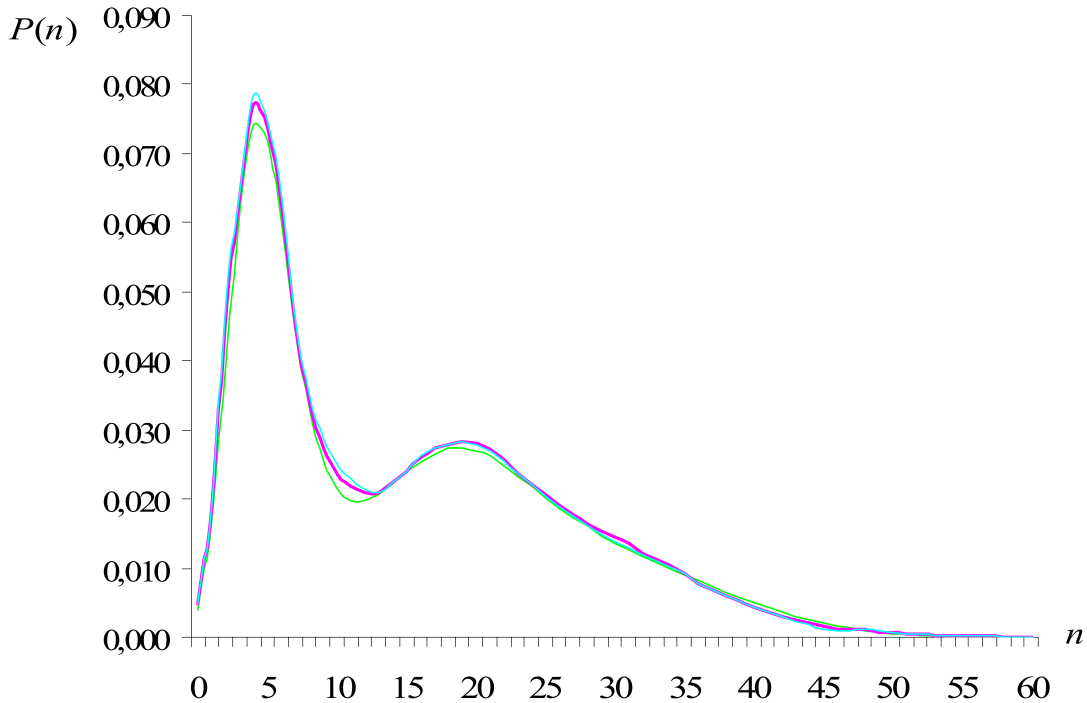

Рис.4.2 – Распределение вероятностей числа событий, наступивших в SM-потоке за время $t = 5$

Значения погрешностей такой аппроксимации приведены в следующих таблицах.

Таблица 4.1

	$\delta = 0{,}1$	$\delta = 0{,}05$	$\delta = 0{,}01$
Δ_0	0,0450	0,0245	0,0050
Δ_1	0,0362	0,0143	0,0093
Δ_2	0,0363	0,0141	0,0093

Таблица 4.2

	$\delta = 0{,}1$	$\delta = 0{,}05$	$\delta = 0{,}01$
Δ_0	0,0523	0,0360	0,0070
Δ_1	0,0422	0,0167	0,0086
Δ_2	0,0418	0,0164	0,0087

При уменьшении параметра δ уменьшается отклонение результатов асимптотического анализа в специальных предельных условиях от результатов допредельного исследования коррелированных потоков и от результатов имитационного моделирования для СМО с неограниченным числом приборов и коррелированными входящими потоками. При $\delta \le 0{,}01$ величины Δ_k составили менее 0,01. Это позволяет сделать вывод о том, что применение метода асимптотического анализа для коррелированных потоков дает достаточно точную аппроксимацию допредельного распределения.

В заключении диссертации приведены основные результаты.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах перечня ВАК (редакция от 19 февраля 2010 года)

1. Горбатенко А.Е. Асимптотический анализ системы MMP|M|1|ИПВ в условии предельно редких изменений состояний входящего потока / А.Е. Горбатенко, А.А. Назаров // Известия Томского политехнического университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – Т. 315. – №5. – С. 187–190.

2. Горбатенко А.Е. Асимптотики произвольного порядка для системы MAP|GI|∞ в условии растущей интенсивности входящего потока / А.Е. Горбатенко // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010 – № 2 (11). – С. 35–43.

3. Горбатенко А.Е. Исследование полумарковского потока в условии предельно редких изменений его состояний / А.Е. Горбатенко, А.А. Назаров // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. – 2010. – № 2 (28). – С. 8–11.

В других изданиях:

4. Горбатенко А.Е. Метод асимптотического анализа MAP-потока в условии предельно редких изменений состояний потока / А.Е. Горбатенко, А.А. Назаров // Современные информационные компьютерные технологии: сб. науч. ст. в 2 ч. (mcIT – 2008). – Гродно: ГрГУ, 2008. – Ч. 2. – С. 30–32.

5. Горбатенко А.Е. Исследование MAP-потока в условии растущей интенсивности / А.Е. Горбатенко, А.А. Назаров // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2008. – № 3 (4). – С. 66–70.

6. Горбатенко А.Е. Исследование системы $MMP|M|\infty$ в условиях предельно редких изменений состояния входящего потока / А.Е. Горбатенко // Материалы XI Всероссийской научно-практической конференции «Научное творчество молодежи». Филиал КемГУ в г.Анжеро-Судженске, 20–21 апреля 2007 г. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. – Ч. 1. – С. 14–17.

7. Горбатенко А.Е., Назаров А.А. Исследование системы MAP|GI|∞ в условиях предельно редких изменений состояния входящего потока / А.Е. Горбатенко // Труды VII Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. Красноярск, 29 февраля – 4 марта 2008 г. – Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2008. – Ч. 2. – С. 58–62.

8. Горбатенко А.Е. Метод асимптотического анализа MMP-потока в условии растущей интенсивности / А.Е. Горбатенко // Материалы XII Всероссийской научно-практической конференции «Научное творчество молодежи». Филиал КемГУ в г. Анжеро-Судженске, 18–19 апреля 2008 г. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2008. – Ч. 1. – С. 14–17.

9. Горбатенко А.Е. Исследование системы MAP|GI|∞ в условии растущей интенсивности входящего потока / А.Е. Горбатенко, А.А. Назаров // Теория вероятностей и, случайные процессы, математическая статистика и приложения. Сборник научных статей международной научной конференции. Минск, 15–19 сентября 2008 г. – Минск: Издательский центр БГУ, 2008. – С. 52–56.

10. Горбатенко А.Е. Нахождение асимптотик произвольного порядка для системы MAP|GI|∞ в условии растущей интенсивности входящего потока / А.Е. Горбатенко // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2008): Материалы VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Филиал КемГУ в г. Анжеро-Судженске, 14–15 ноября 2008 г. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2008. – Ч. 2. – С. 10–15.

11. Горбатенко А.Е. Метод асимптотического анализа MMP-потока, управляемого квазиразложимой цепью Маркова, в условии растущего времени / А.Е. Горбатенко // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети. Материалы международной научной конференции "Современные математические методы анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей". Минск, 26–29 января 2009 г. – Минск: РИВШ, 2009. – С. 85–89.

12. Горбатенко А.Е. Асимптотический анализ MAP-потока, управляемого квазиразложимой цепью Маркова // Труды VIII Международной конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. Красноярск, 24–26 апреля 2009 г. – Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2009. – Ч. 2. – С. 26–28.

13. Горбатенко А.Е. Исследование системы $MMP|M|\infty$ в условии квазиразложимости цепи Маркова / А.Е. Горбатенко // Материалы XIII Всероссийской научно-практической конференции «Научное творчество молодежи». Филиал КемГУ в г.Анжеро-Судженске, 14–15 мая 2009г. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2009. – Ч. 1. – С. 26–28.

14. Горбатенко А.Е. Асимптотический анализ системы MAP|M|∞ в условии квазиразложимости цепи Маркова / А.Е. Горбатенко // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2009): Материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Филиал КемГУ в г.Анжеро-Судженске, 12–13 ноября 2009 г. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2009. – Ч. 1. – С. 16–20.

15. Горбатенко А.Е. Исследование квазиразложимого полумарковского потока / А.Е. Горбатенко // Теория вероятностей математическая статистика и их приложения: сборник научных статей (материалы Международной конференции, посвященной 75-летию профессора, доктора физико-математических наук Г.А. Медведева). Минск, 22–25 февраля 2010 г. – Минск: РИВШ, 2010. – С. 53–59.

16. Горбатенко А.Е. Исследование системы SM|M|∞ в условии предельно редких изменений состояний потока и условии растущего времени обслуживания / А.Е. Горбатенко, С.В. Лопухова // Материалы XIV Всероссийской научно-практической конференции «Научное творчество молодежи». Филиал КемГУ в г. Анжеро-Судженске, 15–16 апреля 2010 г. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. – Ч. 1. – С. 16–19.

17. Gorbatenko A. SM|M|∞ in special limit conditions / A. Gorbatenko, S. Lopuchova // The third international conference «Problems of cybernetics and informatics»(PCI’2010), Baku, Azerbaijan. 6–8 September, 2010. – Baku: Elm, 2010. – V. 2. – P. 213–217.