На правах рукописи

ГЕНЗЕ Леонид Владимирович

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ БЭРОВСКИХ ФУНКЦИЙ, ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ КОНЕЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ И СВОБОДНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Томск — 2010

Работа выполнена на кафедре теории функций
ГОУВПО «Томский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Гулько Сергей Порфирьевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
Сипачёва Ольга Викторовна

кандидат физико-математических наук,
доцент
Лазарева Елена Геннадьевна

Ведущая организация: Учреждение Российской академии наук
Институт математики и механики
Уральского отделения РАН (г. Екатеринбург)

Защита диссертации состоится 27 декабря 2010 г. в 16.00 на заседании диссертационного совета Д 212.267.21 при ГОУВПО «Томский государственный университет» по адресу: 634050, Томск, пр. Ленина, 36, корпус 2, ауд. 304.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке ГОУВПО «Томский государственный университет» по адресу г. Томск, пр. Ленина, 34а.
Автореферат разослан 24 ноября 2010 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент **А. Н. Малютина**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Проблема классификации математических объектов является одной из центральных в математике. Так как многие объекты, возникающие в математике, обладают несколькими естественными структурами, то и классификация соответствующих объектов может быть различной. Так, например, множество $C_p(X)$ всех непрерывных вещественнозначных функций, определенных на тихоновском пространстве X, снабженное топологией поточечной сходимости, является одновременно топологическим кольцом, топологической группой, топологическим векторным пространством, равномерным пространством и просто топологическим пространством.

В 1951 г. А. А. Милютин в своей диссертации доказал, что если X и Y — несчетные метризуемые компакты, то банаховы пространства $C(X)$ и $C(Y)$ линейно гомеоморфны, решив тем самым известную проблему Банаха (этот результат стал широко известен лишь в 1966 г. с выходом статьи [8]). В 1960 г. Ч. Бессага и А. Пелчинский в работе [12] дали полную классификацию банаховых пространств $C(X)$ для счетных (метризуемых) компактов X относительно линейных гомеоморфизмов. Таким образом, теоремы Милютина и Бессаги-Пелчинского дают полную линейную гомеоморфную класификацию банаховых пространств $C(X)$ для метризуемых компактов X. В 1960 г. З. Семадени [13] доказал, что при различных натуральных n и m банаховы пространства $C[1, \omega_1 \cdot n]$ и $C[1, \omega_1 \cdot m]$ не являются линейно гомеоморфными, продолжив тем самым классификацию Бессаги-Пелчинского на все отрезки ординалов $[1, \alpha]$ при $\alpha < \omega_1 \cdot \omega$. В 1975 г. С. П. Гулько и А. В. Оськин ([5]) и С. В. Кисляков ([6]) независимо друг от друга дали полную линейную гомеоморфную классификацию банаховых пространств $C[1, \alpha]$ для произвольных ординалов α.

Ситуация с пространствами вида $C_p(X)$ более сложная. Так, из теоремы о замкнутом графике следует, что если X и Y — компакты и пространства $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ линейно гомеоморфны, то и банаховы пространства $C(X)$ и $C(Y)$ линейно гомеоморфны. Обратное верно не всегда: например, известно, что размерность тихоновских пространств сохраняется при линейных ([9]) и даже равномерных ([3]) гомеоморфизмах пространств функций, снабженных топологией поточечной сходимости. В частности, пространства непрерывных функций на канторовом множестве, на отрезке $[0,1]$ и на квадрате $[0,1]^2$ попарно не линейно гомеоморфны. Значит, аналога теоремы Милютина для пространств вида $C_p(X)$ не существует. В тоже время, линейная гомеоморфная классификация пространств $C_p[1,\alpha]$ для произвольных ординалов α, как показал С. П. Гулько в [4], полностью совпадает с данной ранее ([5], [6]) классификацией банаховых пространств $C[1,\alpha]$. В этой же статье параллельно была дана классификация (относительно топологических изоморфизмов) свободных топологических групп $F[1,\alpha]$ и свободных абелевых топологических групп $A[1,\alpha]$ отрезков ординалов, причем эта классификация, выраженная в терминах некоторых неравенств на α, фактически совпала с классификацией соответствующих пространств непрерывных функций $C_p[1,\alpha]$.

В настоящей диссертации нас будет интересовать линейная гомеоморфная классификация пространств $C_p\big([1,\alpha],Y\big)$ всех непрерывных отображений $f\colon [1,\alpha]\to Y$ и пространств $B_p\big([1,\alpha],Y\big)$ бэровских функций $f\colon [1,\alpha]\to Y$, определенных на отрезках ординалов со значениями в Y. При этом данные пространства снабжаются топологией поточечной сходимости, а в качестве Y рассматриваются либо конечные дискретные пространства (для непрерывных функций) либо вещественная прямая и двухточечное дискретное пространство (для бэровских функций). В том случае, когда Y является конечным пространством мощности n, сложение функций происходит «по модулю n» и Y отождествляется с циклической группой $\mathbb{Z}_n$ порядка n.

Уточним понятие пространства $C_p\big([1,\alpha],\mathbb{Z}_n\big)$. Если n — простое число, то $\mathbb{Z}_n$ является полем и $C_p\big([1,\alpha],\mathbb{Z}_n\big)$ — линейное пространство (над полем $\mathbb{Z}_n$). Если же n — число составное, то $\mathbb{Z}_n$ полем не является (оставаясь при этом абелевой группой) и следовательно, множество $C_p\big([1,\alpha],\mathbb{Z}_n\big)$ есть абелева группа. Но везде в этой работе будет использоваться «линейная» терминология для произвольного n: будем употреблять термин «линейное пространство» для множеств $C_p\big([1,\alpha],\mathbb{Z}_n\big)$ и термин «линейное отображение» для отображений таких множеств. Ни к каким противоречиям и некорректностям такая терминология не приведет.

Цель работы:

- дать линейную гомеоморфную классификацию пространств всех бэровских функций, определенных на отрезках ординалов $[1,\alpha]$ с топологией поточечной сходимости.

- дать линейную гомеоморфную классификацию пространств всех непрерывных n-значных функций, определенных на отрезках ординалов $[1,\alpha]$ с топологией поточечной сходимости.

- дать топологическую изоморфную классификацию свободных n-периодических топологических групп $F^{[n]}(X)$ и свободных абелевых n-периодических топологических групп $A^{[n]}(X)$.

Научная новизна и практическая ценность. Основные результаты настоящей диссертационной работы являются новыми. К основным результатам работы можно отнести следующие.

- Даны необходимые и достаточные условия того, что произвольная функция $f\colon [1,\alpha]\to Y$, где $Y=\mathbb{R}$ или $Y=\mathbb{Z}_2$, является бэровской (теорема 1.2).

- Установлено, что пространства бэровских функций на отрезках ординалов вида $[1,\alpha\cdot\beta]$ разлагаются в $\sum$-произведение более простых сомножителей (лемма 2.2).

- Даны необходимые и достаточные условия линейной гомеоморфности пространств $B_p[1,\alpha]$ (теоремы 2.8, 3.4, 3.9, 3.12 и 3.13).

- Даны необходимые и достаточные условия линейной гомеоморфности пространств $C_p\big([1,\alpha],\mathbb{Z}_n\big)$ (теорема 6.1).

- Параллельно с классификацией пространств $C_p\big([1,\alpha],\mathbb{Z}_n\big)$ дана классификация сопряженных пространств $L_p\big([1,\alpha],\mathbb{Z}_n\big)$ (теорема 6.1).

- Введены понятия свободной n-периодической топологической группы и свободной абелевой n-периодической топологической группы тихоновского пространства. Доказано существование таких групп (теоремы 4.3 и 4.7). Параллельно с классификацией пространств $C_p\big([1,\alpha],\mathbb{Z}_n\big)$ дана их классификация относительно топологических изоморфизмов (теорема 6.1).

Результаты работы имеют теоретическое значение и могут быть использованы в исследованиях по теории топологических пространств функций, теории топологических групп.

Апробация результатов. Основные результаты настоящей диссертации докладывались на Международной конференции по математике и механике (Томск, 2003 г.), международной конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2005 г.), Международной топологической конференции «Александровские чтения» (Москва, 2006 г.), Всероссийской конференции по математике и механике (Томск, 2008 г.), Всероссийской молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики» (Екатеринбург, 2010 г.) и были опубликованы в работах [14] – [25]. Кроме того, они неоднократно докладывались на семинарах кафедры теории функций Томского государственного университета.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, списка литературы и списка обозначений. Глава I содержит три параграфа, глава II — четыре параграфа. Работа изложена на 75 страницах.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность выбранного направления научного исследования и излагаются основные результаты, полученные в диссертации.

В главе I приводится линейная гомеоморфная классификация пространств $B_p\big([1,\alpha],Y\big)$ всех бэровских функций $f\colon [1,\alpha]\to Y$, определенных на отрезках ординалов. В качестве пространства Y рассматривается либо вещественная прямая $\mathbb{R}$, либо поле $\mathbb{Z}_2$. Данные пространства снабжаются топологией поточечной сходимости. В §1 приводятся необходимые определения и доказывается теорема, характеризующая функции первого класса Бэра, заданные на отрезках ординалов. Из этой теоремы выводится, что любая функция класса λ по классификации Бэра принадлежит первому классу Бэра и что произвольная функция, заданная на счетном отрезке ординалов $[1,\alpha]$, является функцией первого класса Бэра. В §2 доказывается лемма 2.2, которая оказывается ключевой в доказательствах утверждений из этого параграфа и приводятся достаточные условия на ординалы α и β, при которых пространства $B_p[1,\alpha]$ и $B_p[1,\beta]$ линейно гомеоморфны. Лемма 2.2 позволяет представлять пространства вида $B_p[1,\alpha]$ для «больших» ординалов α в виде $\sum$-произведений пространств вида $B_p[1,\gamma]$ с «маленькими» ординалами γ. В §3 приведены необходимые условия на ординалы α и β, при которых пространства $B_p[1,\alpha]$ и $B_p[1,\beta]$ линейно гомеоморфны.

Приведем основные определения. Пусть α — предельный ординал. Множество $A\subset[1,\alpha)$ называется конфинальным в $[1,\alpha)$, если для каждого $\xi\in[1,\alpha)$ существует такой $\eta\in A$, что $\eta\geqslant\xi$. Известно [7, с. 282], что наименьший порядковый тип множеств A, конфинальных в $[1,\alpha)$, является начальным ординалом; будем обозначать его $\mathrm{cf}(\alpha)$.

Определение 1.1. Пусть X и Y — метризуемые пространства. Отображение $f\colon X\to Y$ называется отображением *первого класса Бэра*, если существует последовательность $\{f_n\in C(X,Y):n\in\mathbb{N}\}$ непрерывных отображений, поточечно сходящаяся к f. Множество всех отображений из X в Y первого класса Бэра обозначим $B_1(X,Y)$. Далее по индукции для произвольного ординала $\lambda<\omega_1$ определяются *отображения класса* λ следующим образом: $f\in B_\lambda(X,Y)$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{f_n\in B_{\lambda_n}(X,Y):\lambda_n<\lambda, n\in\mathbb{N}\}$, поточечно сходящаяся к f.

Можно распространить это определение на тот случай, когда X — произвольный отрезок ординалов $[1,\alpha]$. В этой ситуации имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2. *Отображение $x\colon [1,\alpha] \to Y$ является отображением первого класса Бэра тогда и только тогда, когда оно непрерывно во всех таких точках $\beta \in [1,\alpha]$, что $\mathrm{cf}(\beta) > \omega$.*

Следствие 1.3. *Если $\alpha < \omega_1$, то любое отображение $x\colon [1,\alpha] \to Y$ есть отображение первого класса Бэра.*

Из теоремы 1.2 следует, что для любого счетного ординала λ отображения класса λ по классификации Бэра совпадают с отображениями первого класса Бэра; поэтому вместо термина «отображение первого класса Бэра» в дальнейшем употребляется термин «бэровское отображение».

Приведем несколько дальнейших определений. Начальный (наименьший) ординал мощности $\aleph_\tau$ будем обозначать ω_τ (но вместо ω_0 будем писать по традиции просто ω). Если $\{X_s : s \in S\}$ — семейство топологических векторных пространств, то $\prod\{X_s : s \in S\}$ — их тихоновское произведение, а символом $\sum\{X_s : s \in S\}$ обозначается их $\sum$-произведение (с центром в нуле), т.е. множество

$$\bigl\{x \in \textstyle\prod\{X_s : s \in S\} : \bigl|\{s \in S : x_s \neq 0\}\bigr| \leqslant \aleph_0\bigr\}.$$

Если $X_s = X$ для всех $s \in S$, то вместо $\sum\{X_s : s \in S\}$ будем писать $\sum\{X : \mathfrak{m}\}$, где $\mathfrak{m} = |S|$.

Если топологические векторные пространства E и F линейно гомеоморфны, то будем писать $E \sim F$.

Следующая лемма является ключевой во всех рассуждениях в §2.

Лемма 2.2. *Пусть α и β — произвольные ординалы. Тогда*

$$B_p[1,\alpha\cdot\beta] \sim B_p[1,\beta] \times \textstyle\sum\bigl\{B_p[1,\alpha] : |\beta|\bigr\}.$$

Из этой леммы следует, в частности, что в том случае, когда $|\beta| < |\alpha|$ или $\alpha = \beta$, первый множитель будет «поглощаться» $\sum$-произведением, т.е. $B_p[1,\alpha\cdot\beta] \sim \sum\bigl\{B_p[1,\alpha] : |\beta|\bigr\}$.

Достаточные условия линейной гомеоморфности пространств $B_p[1,\alpha]$ и $B_p[1,\beta]$ приводятся в следующей теореме.

Теорема 2.8. (i) *Для любых* $\alpha,\beta\in[\omega,\omega_1)$ *пространства* $B_p[1,\alpha]$ *и* $B_p[1,\beta]$ *линейно гомеоморфны;*

(ii) *Для любых* $\alpha,\beta\in[\omega_1,\omega_2)$ *пространства* $B_p[1,\alpha]$ *и* $B_p[1,\beta]$ *линейно гомеоморфны;*

(iii) *Если* $\alpha,\beta\in[\omega_\tau\cdot n,\omega_\tau\cdot(n+1))$*, где* $n\in\mathbb{N}$ *и* $\omega_\tau\geqslant\omega_2$ *— начальный ординал, то пространства* $B_p[1,\alpha]$ *и* $B_p[1,\beta]$ *линейно гомеоморфны;*

(iv) *Если* $\alpha,\beta\in[\omega_\tau\cdot\omega_\sigma,\omega_\tau\cdot\omega_{\sigma+1})$*, где* ω_τ*,* ω_σ *— начальные ординалы, причем* $\omega_\tau\geqslant\omega_2$ *и* $\omega\leqslant\omega_\sigma\leqslant\omega_\tau$*, то пространства* $B_p[1,\alpha]$ *и* $B_p[1,\beta]$ *линейно гомеоморфны.*

Отметим, что если пункт (i) в этой теореме прямо следует из следствия 1.3, то пункт (ii) выглядит несколько неожиданным.

Теорему 2.8 можно сформулировать иначе. Для этого рассмотрим класс ординалов

$$\Delta=\{\omega,\omega_1\}\cup\{\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}\mid\mathfrak{m},\mathfrak{n}\text{ — кардиналы},\mathfrak{m}\geqslant\aleph_2\text{ и }1\leqslant\mathfrak{n}\leqslant\mathfrak{m}\}.$$

Этот класс разбивает класс всех бесконечных ординалов на непересекающиеся полуинтервалы $I_\delta=[\delta,\delta^+)$, где $\delta,\delta^+\in\Delta$ и $\delta^+=\min\{\gamma\in\Delta:\gamma>\delta\}$. В этих обозначениях теорема 2.8 примет такой вид: *если ординалы* α *и* β *попадают в один и тот же полуинтервал* I_δ*, то пространства* $B_p[1,\alpha]$ *и* $B_p[1,\beta]$ *линейно гомеоморфны.*

Основой доказательства одной группы достаточных условий линейной гомеоморфности пространств $B_p[1,\alpha]$ в §3 являются следующие две леммы, являющиеся модификациями лемм из [2].

Лемма 3.2. (i) *Пусть* ω_τ *— начальный ординал регулярной мощности и* $n,m<\omega$*. Если* $T\colon\ (B_p[1,\omega_\tau])^n\to(B_p[1,\omega_\tau])^m$ *— линейный гомеоморфизм, то множество*

$$L=\Big\{\alpha<\omega_\tau: x_i|_{[1,\alpha)}=0, i=1,\dots,n\Longleftrightarrow(Tx)_j|_{[1,\alpha)}=0, j=1,\dots,m$$
$$\textit{для каждого } x=(x_1,\dots,x_n)\in(B_p[1,\omega_\tau])^n\Big\}$$

замкнуто и конфинально в $[1,\omega_\tau)$.

(*ii*) *Пусть* ω_τ *— начальный ординал регулярной мощности,* ω_σ *и* ω_ρ *— начальные ординалы, такие, что* $\omega \leqslant \omega_\sigma < \omega_\tau$, $\omega \leqslant \omega_\rho < \omega_\tau$. *Если* $T\colon \sum\bigl\{B_p[1,\omega_\tau] : \aleph_\sigma\bigr\} \to \sum\bigl\{B_p[1,\omega_\tau] : \aleph_\rho\bigr\}$ *— линейный гомеоморфизм, то множество*

$$L = \bigl\{\alpha < \omega_\tau : x_\gamma|_{[1,\alpha)} = 0, \gamma < \omega_\sigma \Longleftrightarrow (Tx)_\delta|_{[1,\alpha)} = 0, \delta < \omega_\rho \\ \text{для каждого } x = \{x_\gamma\} \in \sum\bigl\{B_p[1,\omega_\tau] : \aleph_\sigma\bigr\}\bigr\}$$

замкнуто и конфинально в $[1,\omega_\tau)$.

Лемма 3.3. (*i*) *Пусть* ω_τ *— начальный ординал регулярной мощности,* $n, m < \omega$. *Если* $T\colon (B_p[1,\omega_\tau])^n \to (B_p[1,\omega_\tau])^m$ *— линейный гомеоморфизм, то множество*

$$M = \bigl\{\alpha < \omega_\tau : T\left(\bigl(B_p^{0,\alpha}[1,\omega_\tau]\bigr)^n\right) = \bigl(B_p^{0,\alpha}[1,\omega_\tau]\bigr)^m\bigr\}$$

замкнуто и конфинально в $[1,\omega_\tau)$.

(*ii*) *Пусть* ω_τ *— начальный ординал регулярной мощности,* ω_σ *и* ω_ρ *— начальные ординалы, такие, что* $\omega \leqslant \omega_\sigma < \omega_\tau$, $\omega \leqslant \omega_\rho < \omega_\tau$. *Если* $T\colon \sum\bigl\{B_p[1,\omega_\tau] : \aleph_\sigma\bigr\} \to \sum\bigl\{B_p[1,\omega_\tau] : \aleph_\rho\bigr\}$ *— линейный гомеоморфизм, то множество*

$$M = \bigl\{\alpha < \omega_\tau : T\left(\sum\bigl\{B_p^{0,\alpha}[1,\omega_\tau] : \aleph_\sigma\bigr\}\right) = \sum\bigl\{B_p^{0,\alpha}[1,\omega_\tau] : \aleph_\rho\bigr\}\bigr\}$$

замкнуто и конфинально в $[1,\omega_\tau)$.

С помощью двух вышеприведенных лемм не удается дать ответ на вопрос о линейной гомеоморфности пространств $B_p[1,\omega_\tau\cdot\omega_\sigma]$ и $B_p[1,\omega_\tau\cdot\omega_\tau]$ для регулярного изолированного ординала ω_τ и $\sigma = \tau - 1$. Приведем схему доказательства неэквивалентности этих пространств. Ниже Y — это либо вещественная прямая, либо дискретное двоеточие.

Лемма 3.5. *Если* $T\colon B_p[1,\omega_\tau\cdot\omega_\sigma] \to B_p[1,\omega_\tau\cdot\omega_\tau]$ *— произвольный линейный гомеоморфизм, то его можно продолжить до линейного гомеоморфизма* $\widetilde{T}\colon Y^{[1,\omega_\tau]\times[1,\omega_\sigma]} \to Y^{[1,\omega_\tau]\times[1,\omega_\tau]}$.

Введем следующее обозначение. Пусть X — топологическое пространство, A — подмножество в X и $\mathfrak{m}$ — кардинал. Символом $\big[A\big]_{\mathfrak{m}}$ будем обозначать множество всех точек $x \in X$, для которых каждое множество типа $G_{\mathfrak{m}}$ (т.е. являющее пересечением не более чем $\mathfrak{m}$ открытых множеств), содержащее точку x, имеет непустое пересечение с A.

Пусть $\widetilde{T}$ — линейный гомеоморфизм из предыдущей леммы.

Лемма 3.6. *Отображение $\widetilde{T}$ переводит $\big[\sum\big\{B_p[1,\omega_\tau] : \aleph_\sigma\big\}\big]_{\aleph_\sigma}$ в точности на $\big[\sum\big\{B_p[1,\omega_\tau] : \aleph_\tau\big\}\big]_{\aleph_\sigma}$.*

Лемма 3.7. (i) *Произвольная функция $x \in Y^{[1,\omega_\tau]\times[1,\omega_\sigma]}$ принадлежит множеству $\big[\sum\big\{B_p[1,\omega_\tau] : \aleph_\sigma\big\}\big]_{\aleph_\sigma}$ тогда и только тогда, когда x непрерывна в любой точке $\gamma \in [1,\omega_\tau] \times [1,\omega_\sigma]$, для которой $\mathrm{cf}(\gamma) \in [\omega_1,\omega_\sigma]$.*

(ii) *Функция $x \in Y^{[1,\omega_\tau]\times[1,\omega_\tau]}$ принадлежит $\big[\sum\big\{B_p[1,\omega_\tau] : \aleph_\tau\big\}\big]_{\aleph_\sigma}$ тогда и только тогда, когда x непрерывна в любой точке $\gamma \in [1,\omega_\tau] \times [1,\omega_\tau]$, для которой $\mathrm{cf}(\gamma) \in [\omega_1,\omega_\sigma]$.*

Лемма 3.8. (i) *Если $x \in \big[\sum\big\{B_p[1,\omega_\tau] : \aleph_\sigma\big\}\big]_{\aleph_\sigma}$, то множество точек γ со свойством $\mathrm{cf}(\gamma) = \omega_\tau$, в которых x отлична от нуля, не более чем счетно.*

(ii) *Если $x \in \big[\sum\big\{B_p[1,\omega_\tau] : \aleph_\tau\big\}\big]_{\aleph_\sigma}$, то множество точек γ со свойством $\mathrm{cf}(\gamma) = \omega_\tau$, в которых x отлична от нуля, не более чем счетно.*

Отдельного рассмотрения потребовал тот случай, когда ω_τ является сингулярным ординалом.

Теорема 3.12. *Пусть ω_τ — сингулярный ординал. Тогда для любого α из $[\omega_\tau,\omega_{\tau+1})$ пространства $B_p[1,\alpha]$ и $B_p[1,\omega_\tau]$ линейно гомеоморфны.*

Сами необходимые и достаточные условия приводятся в теореме 3.13.

Теорема 3.13. *Пусть $[1,\alpha]$ и $[1,\beta]$ — бесконечные отрезки ординалов. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *Пространства $B_p[1,\alpha]$ и $B_p[1,\beta]$ линейно гомеоморфны;*

(ii) *Выполнено одно из следующих взаимоисключающих условий:*

- $\alpha,\beta \in [\omega,\omega_1)$;

- *$\alpha, \beta \in [\omega_1, \omega_2)$;*

- *$\alpha, \beta \in [\omega_\tau, \omega_{\tau+1})$, где ω_τ — сингулярный ординал;*

- *$\alpha, \beta \in [\omega_\tau \cdot \lambda, \omega_\tau \cdot \lambda^+)$, где $\omega_\tau \geqslant \omega_2$ — несчетный регулярный ординал, $\lambda < \omega_\tau$ —начальный (возможно, конечный) ординал и λ^+ — наименьший из начальных ординалов, больших λ;*

- *$\alpha, \beta \in [\omega_\tau^2, \omega_{\tau+1})$, где $\omega_\tau \geqslant \omega_2$ — несчетный регулярный ординал.*

В связи с этой теоремой отметим, что существует большая разница между регулярностью и сингулярностью ординала ω_τ применительно к линейной гомеоморфной классификации пространств бэровских функций.

Во второй главе приводится полная классификация пространств вида $C_p\big([1, \alpha], \mathbb{Z}_n\big)$ и сопряженных к ним пространств $L_p\big([1, \alpha], \mathbb{Z}_n\big)$ относительно линейных гомеоморфизмов. Так же дается полная классификация групп $F^{[n]}[1, \alpha]$ и $A^{[n]}[1, \alpha]$ относительно топологических изоморфизмов.

В §4 вводятся понятия свободной n-периодической топологической группы $F^{[n]}(X)$ и свободной абелевой n-периодической топологических группы $A^{[n]}(X)$ тихоновского пространства X и доказывается их существование. При этом используется схема доказательства из [1]. В §5 излагается метод разложения групп $F^{[n]}[1, \alpha]$. Этот метод позволяет сводить изучение групп $F^{[n]}[1, \alpha]$ для «больших» ординалов α к изучению групп $F^{[n]}[1, \gamma]$ для «маленьких» ординалов γ. В §6 приводятся необходимые и достаточные условия на ординалы α и β, при которых пространства $C_p\big([1, \alpha], \mathbb{Z}_n\big)$ и $C_p\big([1, \beta], \mathbb{Z}_n\big)$ а также сопряженные к ним пространства $L_p\big([1, \alpha], \mathbb{Z}_n\big)$ и $L_p\big([1, \beta], \mathbb{Z}_n\big)$ будут линейно гомеоморфны. Эти же условия на α и β оказываются необходимыми и достаточными для существования топологического изоморфизма между группами $F^{[n]}[1, \alpha]$ и $F^{[n]}[1, \beta]$ и между группами $A^{[n]}[1, \alpha]$ и $A^{[n]}[1, \beta]$. В §7 приводится явное описание топологии свободной 2-периодической топологической группы $F^{[2]}(X)$ тихоновского пространства X в терминах непрерывных псевдометрик на пространстве X и явное описание топологии этой же группы для метризуемого компакта X. Идея такого описания взята из [10] и [11].

Определение 4.1. Пусть $n \geqslant 2$ — некоторое натуральное число. Группу G с единицей e будем называть *n-периодической*, если $g^n = e$ для каждого $g \in G$.

Пусть $n \geqslant 2$ — некоторое фиксированное натуральное число и X — произвольное множество. Формальное выражение вида $x_1 x_2 \ldots x_k$, где все $x_i \in X$, будем называть *словом*. Слова будем обозначть символами с полужирным начертанием - например, $\boldsymbol{a}$. Пустое выражение тоже будем называть словом и обозначать $\boldsymbol{e}$.

Два слова будем называть *эквивалентными*, если одно из них можно получить из другого путем вычеркивания и вставки слов вида $(x_1 x_2 \ldots x_j)^n$. Ясно, что таким образом мы действительно вводим отношение эквивалентности на множестве всех слов. Класс эквивалентности, содержащий слово $\boldsymbol{a}$, будем обозначать, как обычно, символом $[\boldsymbol{a}]$.

Заметим, что любое слово эквивалентно слову вида $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_k^{\varepsilon_k}$, где $x_i \in X$, $\varepsilon_i \in \{1, \ldots, n-1\}$ при $i = 1, \ldots, k$ и $x_i \neq x_{i+1}$ при $i = 1, \ldots, k-1$.

На множестве классов эквивалентностей слов заведем операцию умножения следующим образом: $[\boldsymbol{a}][\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{ab}]$, где $\boldsymbol{ab}$ — слово, в котором сначала идут все элементы слова $\boldsymbol{a}$ в их исходном порядке, а затем все элементы слова $\boldsymbol{b}$ (также в их исходном порядке).

Множество классов эквивалентностей слов (включая класс, содержащий пустое слово $\boldsymbol{e}$) с только что введенной операцией умножения образует группу, которую мы обозначим $\mathcal{F}^{[n]}(X)$ и будем называть *свободной n-периодической группой, порожденной множеством X*. Единицей в этой группе является класс, содержащий пустое слово, а обратный элемент к классу $[x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_k^{\varepsilon_k}]$ (где все $\varepsilon_i \in \{1, \ldots, n-1\}$) — это класс $[x_k^{n-\varepsilon_k} x_{k-1}^{n-\varepsilon_{k-1}} \ldots x_1^{n-\varepsilon_1}]$. Очевидно, что $\mathcal{F}^{[n]}(X)$ является n-периодической группой.

Определение 4.2. Группа $F^{[n]}(X)$, построенная выше, называется *свободной n-периодической группой, порожденной множеством X.*

Теорема 4.3. *Для любого тихоновского пространства X существует n-периодическая топологическая группа $F^{[n]}(X)$, обладающая следующими* *свойствами:*

(NP1) *X гомеоморфно замкнутому подпространству в $F^{[n]}(X)$;*

(NP1) *Алгебраически $F^{[n]}(X)$ является свободной n-периодической группой, порожденной множеством X;*

(NP1) *Если G — n-периодическая топологическая группа и $f\colon X \to G$ – непрерывное отображение, то f можно продолжить до непрерывного гомоморфизма $\tilde{f}\colon F^{[n]}(X) \to G$.*

Определение 4.6. Группу $F^{[n]}(X)$, существование которой доказано в теореме 4.3, будем называть *свободной n-периодической топологической группой пространства X* (в смысле Маркова).

Определим теперь свободные абелевы n-периодические группы тихоновских пространств. Пусть $n \geqslant 2$ — фиксированное натуральное число и X — произвольное множество. *Свободной абелевой n-периодической группой, порожденной множеством X*, будем называть прямую сумму семейства групп $\{\mathbb{Z}_n^x : x \in X\}$, где группа $\mathbb{Z}_n^x$ изоморфна $\mathbb{Z}_n$ (аддитивной группе классов вычетов по модулю n) для каждого $x \in X$. Обозначим эту группу $\mathcal{A}^{[n]}(X)$. Очевидно, что $\mathcal{A}^{[n]}(X)$ является n-периодической группой. Элементы группы $\mathcal{A}^{[n]}(X)$ можно представлять себе так: это формальные конечные линейные комбинации $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k$ элементов множества X с коэффициентами $\alpha_i \in \mathbb{Z}_n$, причем две такие линейные комбинации равны тогда и только тогда, когда они отличаются, самое большее, порядком слагаемых. Сложение линейных комбинаций проводится формально, путем сложения коэффициентов при одинаковых x_i и приведения их по модулю n.

Теорема 4.7. *Для любого тихоновского пространства X существует абелева n-периодическая топологическая группа $A^{[n]}(X)$, обладающая следующими свойствами:*

(ANP1) *X гомеоморфно замкнутому подпространству в $A^{[n]}(X)$;*

(ANP1) *алгебраически $A^{[n]}(X)$ является свободной абелевой n-периодической группой, порожденной множеством X;*

(ANP1) *любое непрерывное отображение* $f\colon X \to G$ *в произвольную абелеву* n*-периодическую топологическую группу* G *можно продолжить до непрерывного гомоморфизма* $\tilde{f}\colon A^{[n]}(X) \to G$.

Определение 4.8. *Группу* $A^{[n]}(X)$, *существование которой доказано в теореме 4.7, будем называть свободной абелевой* n*-периодической топологической группой пространства* X *(в смысле Маркова).*

Чтобы сформулировать главный результат главы II, нам потребуется ввести еще 2 понятия.

Символом $L_p(X, Z_n)$ обозначается множество всех непрерывных линейных отображений $\phi : C_p(X, \mathbb{Z}_n) \to \mathbb{Z}_n$, снабженное слабейшей топологией, относительно которой каждое отображение $\phi \mapsto \phi(f)$ непрерывно для любой функции $f \in C_p(X, \mathbb{Z}_n)$.

Символом Δ_S обозначается класс всех ординалов вида $\lambda \cdot \sigma$, где λ — бесконечный регулярный кардинал и σ — (возможно конечный) кардинал, такой, что $1 \leqslant \sigma \leqslant \lambda$.

Главным результатом главы II является следующая теорема.

Теорема 6.1. Для любых двух бесконечных отрезков ординалов $[1, \alpha]$ и $[1, \beta]$, где $\alpha \leqslant \beta$, следующие условия эквивалентны:

(1) группы $F^{[n]}[1, \alpha]$ и $F^{[n]}[1, \beta]$ топологически изоморфны;

(2) группы $A^{[n]}[1, \alpha]$ и $A^{[n]}[1, \beta]$ топологически изоморфны;

(3) пространства $C_p\big([1, \alpha], \mathbb{Z}_n\big)$ и $C_p\big([1, \beta], \mathbb{Z}_n\big)$ линейно гомеоморфны;

(4) пространства $L_p\big([1, \alpha], \mathbb{Z}_n\big)$ и $L_p\big([1, \beta], \mathbb{Z}_n\big)$ линейно гомеоморфны;

(5) не существует ординала $\delta \in \Delta_S$ такого, что $\alpha < \delta \leqslant \beta$.

Автор выражает признательность своему научному руководителю профессору Гулько Сергею Порфирьевичу за постановку задач, внимание к работе и помощь в оформлении диссертации.

Автор благодарит Хмылёву Татьяну Евгеньевну за помощь в работе над диссертацией, ценные советы и поддержку.

Литература

[1] Архангельский А.В. Топологические пространства и непрерывные отображения. Замечания о топологических группах. М.: Изд-во МГУ, 1969.

[2] Гулько С.П. Пространства непрерывных функций на ординалах и ультрафильтрах // Мат. заметки. 1990. Т. 47. № 4. С. 26–34.

[3] Гулько С.П. О равномерных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций // Тр. МИАН СССР, 1992. Т. 193. С. 82–88.

[4] Гулько С.П. Свободные топологические группы и пространства непрерывных функций на ординалах // Вестн. Томского гос. ун-та. 2003. Т. 280. С. 34–38.

[5] Гулько С.П., Оськин А.В. Изоморфная классификация пространств непрерывных функций на вполне упорядоченных бикомпактах // Функц. анализ и прил. 1975. Т. 9. № 1. С. 61–62.

[6] Кисляков С.В. Изоморфная классификация пространств непрерывных функций на ординалах // Сиб. матем. журн. 1975. Т. 16. С. 293–300.

[7] Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.

[8] Милютин А.А. Изоморфность пространств непрерывных функций над компактами континуальной мощности // Теория функций, функц. анализ и прил. № 2. Харьков, 1966. С. 150–156.

[9] Пестов В.Г. Совпадение размерностей dim l-эквивалентных топологических пространств // Докл. АН СССР, 1982. Т. 266. № 3. С. 553—556.

[10] Сипачева О.В. Описание топологии свободных топологических групп без использования универсальных равномерных структур. В сб. Общая топология. Отображения топологических пространств. М.: Изд-во МГУ, 1986. С. 122–130.

[11] Сипачева О.В. Топология свободной топологической группы // Фундаментальная и прикладная математика, 2003. Т. 9. № 2. С. 99–204.

[12] Bessaga C., Pełczyński A. Spaces of continuous functions (IV). On isomorphic classification of spaces of continuous functions // Studia Math. 1960. V. 19. P. 53–62.

[13] Semadeni Z. Banach spaces non-isomorphic to their Cartesian squares // Bull. Acad. Pol. sci. ser. math., astron. et phys., 1960. № 8. P. 81–84.

Работы автора по теме диссертации

[14] Гулько С.П., Гензе Л.В. О классификации пространств непрерывных функций и свободных топологических групп // Международная конференция по математике и механике: Тезисы докладов. Томск, 2003. С. 66.

[15] Гензе Л.В. Свободные булевы топологические группы // Материалы XLIII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. Новосибирск, 2005. С. 64.

[16] Гензе Л.В. Явное описание топологии свободных булевых топологических групп тихоновских пространств // Вестн. Томского гос. ун-та: Общенаучный периодический журнал. Бюллетень оперативной научной информации. 2005. № 54. С. 23–30.

[17] Гензе Л.В., Гулько С.П. О свойствах свободной булевой топологической группы // Международная топологическая конференция «Александровские чтения», посв. 110-летию со дня рожд. акад. П.С. Александрова: Тезисы докладов. М.: МГУ, 2006. С. 11.

[18] Гензе Л.В. Свободные булевы топологические группы // Вестн. Томского гос. ун-та. 2006. № 90. С. 11–13.

[19] Хмылёва Т.Е., Гензе Л.В. Пространства функций первого класса Бэра, наделенные топологией поточечной сходимости, и их l-эквивалентность // Всероссийская конференция по математике и механике: Тезисы докладов. Томск, 2008. С. 112–113.

[20] Гензе Л.В., Гулько С.П., Хмылева Т.Е. Классификация свободных булевых топологических групп на ординалах // Вестн. Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2008. № 1(2). С. 23–31.

[21] Хмылева Т.Е., Гензе Л.В. Пространства функций первого класса Бэра, наделенные топологией поточечной сходимости и их l-эквивалентность // Вестн. Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2008. № 3(4). С. 35–41.

[22] Гензе Л.В., Гулько С.П., Хмылева Т.Е. Классификация пространств бэровских функций на отрезках ординалов // Проблемы теоретической и прикладной математики: Тезисы 41-й Всероссийской молодежной конференции. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2010. С. 103–109.

[23] Гензе Л.В., Гулько С.П., Хмылева Т.Е. Классификация пространств бэровских функций на отрезках ординалов // Труды института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 3. С. 61–66.

[24] Гензе Л.В. Свободные n-периодические топологические группы // Вестн. Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2010. № 3(11). С. 23–28.

[25] Genze L.V., Gul'ko S.P., Khmyleva T.E. Classification of continuous n-valued function spaces and free periodic topological groups for ordinals // Top. Proc. 2011. V. 38. P. 1-15. (E-published on June 30, 2010. URL: http://topology.auburn.edu/tp/reprints/v38/)

Тираж 100 экз.

Отпечатано в ООО «Позитив-НБ»

г. Томск, пр. Ленина, 34а