На правах рукописи

Елизарова Мария Александровна

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ С *S*-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Специальность 01.01.01 – Вещественный, комплексный
и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск 2010

Работа выполнена на кафедре теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук
доцент **Малютина Александра Николаевна**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор **Стругов Юрий Федорович**
(Омский государственный университет)
доктор физико-математических наук,
профессор **Кармазин Александр Петрович**
(Сургутский государственный университет)

Ведущая организация: Институт математики им. С.Л.Соболева
Сибирского отделения РАН

Защита состоится 27 декабря 2010 г. в 14 : 00 часов на заседании диссертационного Совета Д 212.267.21 при ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, ауд. 304 корпус 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан 26 ноября 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного Совета Д 212.267.21
канд. физ.-мат. наук, доцент А.Н. Малютина

Актуальность темы. Главный объект исследования диссертационной работы – негомеоморфные пространственные отображения, заданные на произвольной области $D \subset \text{Ў}^n$, $n \geq 3$, называемые далее отображениями с s-усредненной характеристикой, – являются частью общей теории пространственных квазиконформных отображений и их обобщений, интенсивно развивающейся со средины 50-х годов XX века.

Впервые понятие пространственного гомеоморфного квазиконформного отображения было введено М.А. Лаврентьевым[1] в 1938 г. Интерес к изучению класса пространственных квазиконформных отображений связан с тем, что он достаточно широк по сравнению с классом конформных отображений, который, согласно известной теореме Лиувилля (1850 г.), исчерпывается лишь преобразованиями Мебиуса, т.е. суперпозициями конечного числа инверсий относительно сфер или плоскостей, что приводит к невозможности переноса техники получения свойств квазиконформных отображений в Ў^2 на изучение свойств пространственных квазиконформных отображений.

Интенсивное развитие теории пространственных отображений приходится на конец 50-х начало 60-х годов XX века. Наиболее существенный вклад в ее развитие в эти годы внесли М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, П.П. Белинский, Ю.Г. Решетняк, В.А. Зорич, Г.Д. Суворов, А.В. Сычев, И.П. Митюк, В.М. Гольдштейн, В.В. Кривов, В.М. Миклюков, С.Л. Крушкаль, Б.П. Куфарев, В.В. Асеев, С.К. Водопьянов, А.П. Копылов, Л. Альфорс, Ф. Геринг, Б. Фугледе, О. Мартио, С. Рикман, Ю. Вяйсяля, М. Вуоринен, Г. Андерсон, Р. Някки и др.

В начале 60-х годов, благодаря работам Ю. Вяйсяля[2], Ф. Геринга[3], Б.В. Шабата[4] и др., создается один из основных методов исследования свойств квазиконформных отображений, суть которого заключается в характеристическом свойстве квазиинвариантности конформных инвариантов (конформной емкости конденсатора и модуля семейства кривых или поверхностей) при квазиконформных отображениях пространственных областей. В эти же годы наряду с продолжающимся развитием теории квазиконформных отображений начинается и систематическое изучение квазиконформных отображений в пространстве Ў^n, $n \geq 3$, называемых отображе-

---

[1] Лаврентьев М.А. Об одном дифференциальном признаке гомеоморфности отображений трехмерных областей // ДАН СССР, 20, № 4. 1938. – С. 241-242.

[2] Väisälä J. Lectures on n-dimentional quasiconformal mappings. – Lectures and Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New-York, 1971. – 144 p.

[3] Gehring F.W. Quasiconformal mappings in Ў^n // Gehring F.W. and Lehto O. Lectures on quasiconformal mappings. – Maryland: Univ. Maryland, 1975. – p. 44-110.

[4] Шабат Б.В. Метод модулей в пространстве. // ДАН СССР, 1960. – Т. 130, № 6. – С. 1210-1215.

ниями с ограниченным искажением (или квазирегулярными отображениями). Аналитические методы исследования таких отображений были разработаны Ю.Г. Решетняком[5], а геометрический метод (как и в случае квазиконформных отображений) – метод модулей, основанный на свойстве квазиинвариантности конформной емкости конденсатора и модуля семейства кривых, был предложен Ю. Вяйсяля, О. Мартио, С. Рикманом[6] и Е.А. Полецким[7].

Естественным обобщением квазиконформных отображений являются гомеоморфные отображения, квазиконформные в среднем, поскольку в пространстве Ў^{n}, $n \geq 3$ существуют достаточно простые области, гомеоморфные шару, которые невозможно квазиконформно отображать на шар. При аналитическом определении таких отображений, ослабляя требование квазиконформности, предполагается ограниченность каких-либо интегральных средних от аналитических отклонений отображения. Различные классы отображений, квазиконформных в среднем, рассматривались в работах С.Л. Крушкаля[8], В.М. Миклюкова[9], Ю.Ф. Стругова[10].

Разнообразие классов пространственных квазиконформных отображений обусловлено, прежде всего, тем, что каждый класс отображений отражает то или иное качественное свойство, присущее исследуемому классу отображений, что, в свою очередь, порождает различные приемы и методы исследования их свойств.

Разработке же общих геометрических методов, использующих емкостную и модульную технику, и их применению при исследовании свойств отображений, квазиконформных в среднем, посвящен ряд статей В.И. Кругликова[11,12] и др. Эти методы отражают законы искажения емкостей конденсаторов при отображениях, квазиконформных в среднем, и по

---

[5] Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982. – 288 с.

[6] Martio O., Rickman S. Väisälä J. Definitions for quasiregular mappings. // Ann. Acad. Sci. Fenn., 448(1969).

[7] Полецкий Е.А. Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений. // Мат. Сборник – 1970. Т.83(125), № 2(10) С. 261-273.

[8] Крушкаль С.Л. Об отображениях, квазиконформных в среднем. // Докл. АН СССР. – 1964, 157, № 3. – С. 517-519.

[9] Миклюков В.М. Об искажении емкости при отображениях, квазиконформных в среднем // Материалы итог. науч. конф. по мат. и мех. за 1970 г. Т.1. – Томск: Изд-во Томск. ун-та. – 1970. – С. 43-45.

[10] Стругов Ю.Ф. Отображения, квазиконформные в среднем. Новосибирск: 1979. –39 с. (Препринт СО АН СССР. Ин-т математики).

[11] Кругликов В.И. Об одном характеристическом свойстве отображений, квазиконформных в среднем // Докл. АН СССР. – 1976, 205, № 6. – С. 1289-1291.

[12] Кругликов В.И. Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сборник. – 1986, 130, № 2. – С. 185-206.

своей значимости они подобны соответствующим геометрическим методам в теории квазиконформных отображений.

Первые попытки систематического исследования свойств негомеоморфных отображений, квазиконформных в среднем (называемых также отображениями с искажением, ограниченным в среднем), при помощи геометрических методов были предприняты в 80-х годах XX века. Общие геометрические методы, использующие емкостную технику при исследовании свойств отображений с искажением, ограниченным в среднем, получены в работах В.И. Кругликова[13], С.М. Борчук[14], модульную технику – в работах А.Н. Малютиной[15], А.В. Сычева[16] и др.

В последнее десятилетие XX века и до настоящего времени интенсивно изучаются различные отображения с конечным искажением[17,18,19,20] и др., естественным образом обобщающие конформные, квазиконформные и квазирегулярные отображения. Во всех этих обобщениях, как и в классической теории, модульная техника играет ключевую роль. Имея в виду такую значимость модульной техники, профессор О. Мартио предложил следующую общую концепцию – теорию Q-гомеоморфизмов, основы которой были заложены, начиная с работы[21] и др., а в работе[22] концепция Q-гомеоморфизмов была распространена на отображения с ветвлением, так называемые Q-отображения.

---

[13] Кругликов В.И., Пайков В.И. Некоторые геометрические свойства отображений с искажением, ограниченным в среднем. Донецк, Донецк ун-т, 1982, 43с. – (Деп. в ВИНИТИ 06.09.82 № 4747-82 Деп).

[14] Борчук С.М. Преобразование емкостей и граничное продолжение для отображений с искажением, ограниченным в среднем. – Донецк: Донец. ун-т, 1991. – 27 с. (Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 715 – Ук91).

[15] Малютина А.Н. Об отображениях с ограниченным в среднем искажением // Экстремальные задачи теории функций. 5 // Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986. – С. 24-31.

[16] Сычев А.В., Малютина А.Н. Об отображениях с ограниченным в среднем искажением // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 283, № 2. – С. 317-320.

[17] T. Iwaniec and V. Šverák On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), p. 181–188.

[18] Astala K., Iwaniec T., Koskela P. and Martin G. Mappings of BMO-bounded distortion // Math. Annalen 317 (2000), p. 703–726.

[19] Koskela P. and Onninen J. Mappings of finite distortion: capacity and modulus inequalities // Dept. Math. Stat., University of Jyväskylä, Preprint 257 (2002), p. 1–32.

[20] Игнатьев А.А., Рязанов В.И. Конечное среднее колебание в теории отображений // Український математичний вісник Том 2 (2005), № 3, С. 395 – 417.

[21] Мартио О., Рязанов В., Сребро У. и Якубов Э. К теории Q-гомеоморфизмов // ДАН России 381 (2001), No 1, 20–22.

[22] Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. Mappings with finite length distortion // J. d'Anal. Math. 93 (2004), 215–236.

Отображения с s-усредненной характеристикой – негомеоморфные пространственные отображения, введенные в работе[23], являются естественным обобщением класса отображений с искажением, ограниченным в среднем на случай произвольной области $D \subset \text{Ў}^n$, $n \geq 3$. В тоже время теорема об оценке модуля, доказанная в третьей главе диссертации, указывает на непосредственную связь исследуемых нами отображений с вышеназванными классами гомеоморфизмов.

Цель работы. Целью работы является: описание отображений с s-усредненной характеристикой; разработка общего геометрического метода исследования их свойств – метода модулей, базирующегося на оценках искажения модулей семейства кривых; установление, с использованием этого метода, геометрических свойств исследуемых отображений (поведение в окрестности изолированной особой точки), эквивалентности геометрического и аналитического определений, получение аналитических свойств и изучение взаимосвязей класса отображений с s-усредненной характеристикой с другими классами пространственных отображений, например, с классом отображений с искажением, ограниченным в среднем, с открытыми непрерывными изолированными отображениями классов BL^p, BL^n и др.

Методы исследования. Основные результаты доказаны с помощью методов вещественного, функционального анализа, методов теории функций с обобщенными производными.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

- Дано аналитическое описание класса отображений с s-усредненной характеристикой. Установлено, что класс исследуемых отображений не пуст, обобщает класс отображений с искажением, ограниченным в среднем на случай произвольной области $D \subset \text{Ў}^n$, $n \geq 3$, а в случае ограниченной области $D \subset \text{Ў}^n$, $n \geq 3$ такие классы совпадают.
- Показано (построен соответствующий пример), что отображения с s-усредненной характеристикой не являются отображениями с ограниченным искажением.
- Доказаны аналитические свойства отображений с s-усредненной характеристикой – полунепрерывность и дифференцируемость (достаточные условия того, что $f \in W^1_{n+\delta,\,\mathrm{loc}}(D)$).

---

[23] Малютина А.Н., Елизарова М.А. Дифференциальные свойства отображений с s-усредненной характеристикой. // Вестник ТГУ. Томск: Изд-во науч.-техн. лит. 2008. – № 4(8), С. 124-129.

- Проведено исследование взаимосвязей классов и подклассов отображений с s-усредненной характеристикой с открытыми непрерывными изолированными отображениями классов BL^p, BL^n, с классом отображений с искажением, ограниченным в среднем и др. Построены соответствующие примеры.
- Описан геометрический метод исследования свойств отображений с s-усредненной характеристикой – метод модулей: получены оценки модуля семейств кривых, установлены законы искажения модулей.
- Дано геометрическое определение отображений с s-усредненной характеристикой и доказана его эквивалентность аналитическому определению.
- Получена оценка искажения евклидовых расстояний и установлен порядок роста отображений с s-усредненной характеристикой в окрестности изолированной особой точки.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть полезны специалистам, работающим с отображениями, имеющими обобщенные производные; в области геометрической теории пространственных отображений и их обобщений.

Апробация работы. Основные результаты и положения работы были доложены на международных и Всероссийских конференциях в гг. Новосибирске и Томске:
– на научной конференции молодых ученых, аспирантов и студентов ММФ, посвященной трехсотлетию со дня рождения Леонарда Эйлера, г. Томск, 2007 г.
– на Всероссийской конференции по математике и механике, г. Томск, 2008 г.
– на молодежной научной конференции ТГУ в рамках Всероссийского фестиваля науки, г. Томск, 2009 г.
– на XLV и XLVIII международных научных студенческих конференциях «Студент и научно-технический прогресс», г. Новосибирск, 2007, 2010 гг.
– на конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», посвященной 110-летию академика М.А. Лаврентьева, ИГИЛ СО РАН. г. Новосибирск, 2010 г.
– на Всероссийской молодежной научной конференции «Современные проблемы математики и механики», проведенной в рамках Всероссийского фестиваля науки, г. Томск, 2010 г.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 7 статей и 3 тезиса докладов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка цитируемой литературы, содержащего 94 наименования. Первая глава состоит из четырех разделов, вторая – из двух разделов, третья – из трех разделов, второй из которых состоит из двух подразделов. Объем диссертации –120 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Ведение. Во ведении изложены краткие сведения из истории развития пространственных отображений, обзор результатов, связанных с тематикой исследования, сформулированы основные результаты.

Глава 1. В первой главе дано аналитическое определение отображений с s-усредненной характеристикой; представлены примеры таких отображений, которые подтверждают, что класс исследуемых отображений не пуст; произведено сравнение класса исследуемых отображений с другими классами пространственных отображений, например, с отображениями с ограниченным искажением, с отображениями с искажением, ограниченным в среднем и др., а также с открытыми, непрерывными, изолированными отображениями с конечным интегралом Дирихле.

Пусть D – область в Ў^n, $n \geq 3$ и отображение $f : D \to \text{Ў}^n$ – открытое, непрерывное, изолированное, $f \in W^1_{n,\,\mathrm{loc}}(D)$, $s > 1/(n–1)$. Якобиан отображения $J(x, f)$ сохраняет знак почти всюду в D (для определенности возьмем $J(x, f) > 0$).

Определение 1.2.1. Отображение f называется отображением с $K_{\mathrm{o,s}}$-усредненной характеристикой, если

1) $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_{n,\,\mathrm{loc}}(D)$;
2) Существует постоянная $K_{\mathrm{o,s}} \geq 0$ такая, что выполняется

$$K_{O,S}(f) = \left(\int_D K_O^s(x, f)\, d\sigma_x \right)^{1/s} \leq K_{O,S},$$

где $K_O(x, f) = L^n(x, f)\left|J(x, f)\right|^{-1}$ – внешняя дилатация отображения f в точке x, $L(x, f) = \left|f'(x)\right| = \max\limits_{|h|=1}\left|f'(x)h\right|$, $d\sigma_x = dx / \left(1 + |x|^2\right)^n$.

Определение 1.2.2. Отображение f называется отображением с $K^*_{O,S}$-усредненной характеристикой, если

1) $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_{n,\,\mathrm{loc}}(D)$;
2) Существует постоянная $K^*_{O,S} \geq 0$ такая, что выполняется

$$K_{O,S}^{*}(f)=\left(\int\limits_{D}K_{O}^{s}(x,f)J(x,f)\,d\sigma_x\right)^{1/s}\le K_{O,S}^{*}.$$

Аналогично определяются отображения с $K_{I,S}$ и с $K_{I,S}^{*}$--усредненными характеристиками, где $K_{I}(x,f)=|J(x,f)|\,l^{-n}(f,x)$ – внутренняя дилатация отображения f в точке x, $l(x,f)=l(f'(x))=\min\limits_{|h|=1}|f'(x)h|$, $d\sigma_x=dx/\left(1+|x|^2\right)^n$.

Известно[24, 25], что характеристики отображения связаны между собой следующими неравенствами

$$K_{I}(x,f)\le K_{O}^{n-1}(x,f),$$

$$K_{O}(x,f)\le n^{\frac{n}{2}}\lambda(x,f)\le n^{\frac{n}{2}}K_{O}(x,f)\le n^{\frac{n}{2}}K_{I}^{n-1}(x,f),$$

где $\lambda(x,f)=n^{-n/2}\,|\nabla f(x)|^{n}\,|J(x,f)|^{-1}$.

Поэтому при доказательстве основных результатов нам достаточно использовать одну из приведенных выше характеристик.

В разделе 1.3 приведен пример отображения с s-усредненной характеристикой, заданного на неограниченной области с пиком, за «остроту» которого отвечает параметр β.

Пример 1.3.1. Пусть $D\subset Ў^3$ – область, определенная следующим образом $D=\left\{x\in Ў^3; 0<|x_1|<\infty, 0\le x_2\le |x_1|^{\beta}, 0\le x_3\le 1\right\}$, где $0<\beta\le 2$.

Пусть $f:D\to D^{*}$, $f(x)=\left\{y\in \mathrm{R}^3; y_1=x_1, y_2=\dfrac{x_2}{|x_1|+1}, y_3=x_3\left(|x_1|+1\right)^{1-\alpha}\right\}$

где $D^{*}=\left\{y\in Ў^3; -\infty<y_1<+\infty, 1\le y_2<|x_1|^{\beta}, 1\le y_3\le +\infty\right\}$, $0<\alpha<1$.

Показано, что построенное отображение является отображением с s-усредненной характеристикой, следовательно, класс исследуемых отображений не пуст, и не является отображением с ограниченным искажением.

В разделе 1.4 исследованы взаимосвязи классов и подклассов отображений с s-усредненной характеристикой с открытыми, непрерывными изолированными отображениями с ограниченным интегралом Дирихле и др. Для удобства результаты также представлены в виде таблиц.

---

[24] Сычев А.В. Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983. – 152 с.

[25] Väisälä J. Lectures on n-dimentional quasiconformal mappings. – Lectures and Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New-York, 1971. – 144 p.

Пусть $D, D' \subset Ў^n$ – произвольные области, $f : D \to D'$ – отображение с $K_{O,S}$, $K_{I,S}$, $K^*_{O,S}$ или с $K^*_{I,S}$-усредненными характеристиками.

Определение 1.4.1. Будем говорить, что отображение f с $K_{O,S}$ и $K_{I,S}$-усредненными характеристиками принадлежит классу $\tilde{Q}^{o}_{s,K}$, $f \in \tilde{Q}^{o}_{s,K}$, если, соответственно, выполнено

$$K_{O,S}(f) = \left(\int_D K^s_O(x,f) d\sigma_x \right)^{1/s} \le K_{O,S} < K,$$

$$K_{I,S}(f) = \left(\int_D K^s_I(x,f) d\sigma_x \right)^{1/s} \le K_{I,S} < K.$$

Отображение $f : D \to D'$ принадлежит классу $\tilde{Q}^{o}_{s}$ в D, $f \in \tilde{Q}^{o}_{s}$, если $f \in \tilde{Q}^{o}_{s,K}$, для некоторого $0 < K < \infty$.

Определение 1.4.2. Будем говорить, что отображение f с $K^*_{O,S}$ и $K^*_{I,S}$-усредненными характеристиками принадлежит классу $\tilde{Q}^{o*}_{s,K}$, $f \in \tilde{Q}^{o*}_{s,K}$, если, соответственно, выполнено

$$K^*_{O,S}(f) = \left(\int_D K^s_O(x,f) \left| J(x,f) \right| d\sigma_x \right)^{1/s} \le K^*_{O,S} < K,$$

$$K^*_{I,S}(f) = \left(\int_D K^s_I(x,f) \left| J(x,f) \right| d\sigma_x \right)^{1/s} \le K^*_{I,S} < K < \infty .$$

Отображение $f : D \to D'$ принадлежит классу $\tilde{Q}^{o*}_{s}$ в D, $f \in \tilde{Q}^{o*}_{s}$, если $f \in \tilde{Q}^{o*}_{s,K}$ для некоторого $0 < K < \infty$.

Покажем, что для отображений с s-усредненной характеристикой имеет место монотонность $\tilde{Q}^{o}_{s}$ $\tilde{Q}^{o*}_{s}$ по s.

Предложение 1.4.4. Пусть области $D, D' \subset Ў^n$, $f\colon D \to D'$, $s < s'$. Тогда имеет место вложение $\tilde{Q}^{o}_{s'} \subset \tilde{Q}^{o}_{s}$, то есть, для любого $f \in \tilde{Q}^{o}_{s'}$ имеет место свойство класса $\tilde{Q}^{o}_{s}$.

Предложение 1.4.5. Пусть области $D, D' \subset Ў^n$ и $m(D') < \infty$. Пусть $f\colon D \to D'$, такое, что кратность отображения $N(f, D) < N < \infty$. Пусть $s < s'$. Тогда $\tilde{Q}^{o*}_{s'} \subset \tilde{Q}^{o*}_{s}$.

Для подклассов отображений с s-усредненной характеристикой, определенных ниже, имеют место включения:

Определение 1.4.6. Функцию $k(t):(0,\infty)\to[0,\infty)$ будем называть ядром, если она удовлетворяет следующим условиям

1) $k(t)$ непрерывна, не возрастает и $\lim\limits_{t\to 0+} k(t)=\infty$;

2) $\int\limits_0^\infty k(t)t^{n-1}dt<\infty.$

Определение 1.4.7. Пусть $f : D \to D'$ открытое, непрерывное, изолированное отображение, $f\in W^1_{n,\,\mathrm{loc}}(D)$, $J(x,f)>0$ почти всюду в D. Пусть функция $k(t)$ удовлетворяет определению 1.4.6. Если существует постоянная $0<K_{s,k}<\infty$ такая, что для любой точки $y\in D'$ выполняется

$$K_{s,k}(f)=\left(\int\limits_D \lambda^s(x,f)\,k^{s+1}\left(|x-y|\right)d\sigma_x\right)^{1/s}\le K_{s,k}<\infty,$$

тогда f называется отображением с $K_{s,k}(k)$-усредненной характеристикой.

Через $\tilde{Q}_s(k)$ обозначим класс таких отображений.

Предложение 1.4.8. Пусть $s<s'$, и ядро $k(t)$ удовлетворяет в области D условию $\int\limits_D k^{(s+1)s'/(s'-s)}\left(|x-y|\right)dx<\infty$ для любого $y\in D$. Тогда $\tilde{Q}_{s'}\subset\tilde{Q}_s(k)$.

Предложение 1.4.9. Пусть $s<s'$ и $\int\limits_D k\left(|x-y|\right)dx<\infty$ для любого $y\in D$. Тогда $\tilde{Q}_{s'}(k)\subset\tilde{Q}_s(k)$.

Предложение 1.4.10. Пусть $s<s'$ и $k_1\left(|x-y|\right)=k^{(s+1)s'/((s'+1)s)}\left(|x-y|\right)$ для любого $y\in D$. Тогда $\tilde{Q}_{s'}(k_1)\subset\tilde{Q}_s(k)$.

Представим полученные результаты в виде таблицы.

Здесь, если не оговорено особо, $D,D'\subset\mathbb{R}^n$ – неограниченные области, $s>1/(n–1)$ и $s'>s$.

Таблица 1.4.1

	$s'>s$	*дополнительные условия*
1.	$\tilde{Q}_{s'}\subset\tilde{Q}_s$	
2.	$\tilde{Q}^*_{s'}\subset\tilde{Q}^*_s$	$m(D')<\infty$
3.	$\tilde{Q}_{s'}\subset\tilde{Q}_s(k)$	$\int\limits_D k^{(s'+1)s/(s'-s)}\left(|x-y|\right)dx<\infty$
4.	$\tilde{Q}_{s'}(k)\subset\tilde{Q}_s(k)$	$\int\limits_D k\left(|x-y|\right)dx<\infty$
5.	$\tilde{Q}_{s'}(k_1)\subset\tilde{Q}_s(k)$	$k_1\left(|x-y|\right)=k^{(s+1)s'/((s'+1)s)}\left(|x-y|\right)$

В работе[26] найдены условия, при которых имеют место включения классов отображений с искажением, ограниченным в среднем, заданных на ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$ в классы отображений с ограниченным интегралом Дирихле. Найдем условия, при которых для открытых, непрерывных изолированных отображений f с ограниченным интегралом Дирихле следует, что f является отображением с s-усредненной характеристикой и при каких условиях – наоборот.

Определим еще один подкласс отображений с s-усредненной характеристикой.

Определение 1.4.11. Пусть области $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, Будем говорить, что отображение f принадлежит классу $\tilde{Q}^{0}_s(D')$, $f \in \tilde{Q}^{0}_s(D')$, (или соответственно $f \in \tilde{Q}^{*0}_s(D')$), если мера Лебега области D' конечна, $m(D') < \infty$, и кратность отображения $N(f, D) < N < \infty$.

Далее определим класс отображений с ограниченным интегралом Дирихле[27].

Определение 1.4.12. Пусть D – произвольная область, $D \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что отображение $f: D \to D'$, $f = \{f_1, f_1, ..., f_n\}$, принадлежит классу BL_k^p, $f \in BL_k^p$, если f непрерывно в D и имеет в области D первые обобщенные производные по $x_1, ..., x_n$ в смысле С.Л. Соболева, для которых выполнено

$$\int_D \left|\nabla f(x)\right|^p dx < k < \infty,$$

где $\left|\nabla f(x)\right| = \left[\sum_{i,j=1}^{n} \left(df_i / dx_j\right)^2\right]^{1/2}$. Отображение $f: D \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу BL^p в D, $f \in BL^p$, если $f \in BL_k^p$ для некоторого $k < \infty$.

Доказано, что для открытых, непрерывных, изолированных отображений имеют место следующие утверждения.

Предложение 1.4.13. Пусть области $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ и $m(D') < \infty$. Пусть $f \in \tilde{Q}^{*0}_s(D')$, $s > 1$ и $\int_D \left|J(x,f)\right| \left(1 + |x|^2\right)^{n/(s-1)} dx < M < \infty$. Тогда интеграл Дирихле отображения f конечен, $\int_D \left|\nabla f(x)\right|^n dx < \infty$.

---

[26] Малютина А.Н.Классы отображений с ограниченным в среднем искажением. // Вестник ТГУ. Томск, Изд. ТГУ, 2000, № 269, С.51-55.

[27] Суворов Г.Д. Обобщенный «принцип длины и площади» в теории отображений. — Киев: Наук. думка. 1985. – 280 с.

Предложение 1.4.14. Пусть области $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ и $m(D') < \infty$. Пусть $\int\limits_D |\nabla f(x)|^n \, dx < \infty$, $N(f, D) < N < \infty$ и $1/(n-1) < s < 1$. Тогда $f \in \mathring{Q}_s(D')$.

Приведем примеры, показывающие, что пересечение классов BL^n и $\mathring{Q}_s(D')$ не пусто для $1/(n-1) < s < 1$.

Пример 1.4.15. Рассмотрим множество

$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \ 0 \le x_i \le 1, \ i = \overline{1, n-1}, \ 1 \le x_n < \infty\}$ и отображение

$$f : D \to D', \ f(x) = \left\{ \frac{x_1 x_n^{1-\beta}}{1-\beta}, \frac{x_2 x_n^{1-\beta}}{1-\beta}, \ldots, \frac{x_{n-1} x_n^{1-\beta}}{1-\beta}, \frac{x_n^{1-\beta}}{1-\beta} \right\}, \ \beta > (n+1)/n .$$

Доказано, что при $f \in BL^n$ при $\beta > (n+1)/n$ и установлено, что для $\beta > (n+1)/n$, $1/(n-1) < s < 2n+1$ отображение $f \in \mathring{Q}_s(D')$.

Пример 1.4.16. Пусть в области $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \ 0 \le x_i \le 1, \ i = \overline{1, n}\}$ задано отображение $f : D \to D', \ f(x) = \left\{ \frac{x_1 x_n^{1-\beta}}{1-\beta}, \frac{x_2 x_n^{1-\beta}}{1-\beta}, \ldots, \frac{x_{n-1} x_n^{1-\beta}}{1-\beta}, \frac{x_n^{1-\beta}}{1-\beta} \right\}, \ \beta < 1$.

Показано, что при $\beta < (n-n^2-1)/n < 1/n$, $1/(n-1) < s < n-1$ из сходимости интеграла $\int\limits_D |\nabla f(x)|^n \, dx$ следует, что отображение $f \in \mathring{Q}_s(D')$.

Таким образом, мы установили, что пересечение классов $BL^n \cap \mathring{Q}_s(D')$ не пусто. В примере 1.4.15 область D имеет вид неограниченного сверху n-мерного параллелепипеда, в примере 1.4.16 – замкнутого n-мерного куба с ребром равным 1.

Заметим, что не всегда конечность интеграла Дирихле отображения f влечет за собой принадлежность f к классу $\mathring{Q}_s(D')$. Действительно, тот же пример 1.4.16 дает нам, что при $1/n < \beta < (n - n^2-1)/n$, $1/(n-1) < s < n-1$, $f \in BL^n$, но $f \notin \mathring{Q}_s(D')$.

Пример 1.4.23. Рассмотрим множество

$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \ 0 \le x_i \le 1, \ i = \overline{1, n-1}, \ 1 \le x_n < \infty\}$ и отображение

$f : D \to D', \ f(x) = \{f_1, f_2, \ldots f_n\}$, где $f_i = \frac{1}{\beta} x_i x_n^{-\beta}$, $i = 1, \overline{n-1}$, $f_n = \frac{1}{\beta} x_n^{-\beta}$.

Вычислив, находим, что при $p > n$, $1/(n-1) < s < p/n$ из сходимости интеграла Дирихле отображения f следует, что $f \in \mathring{Q}_s(D')$.

Если в этом же примере при $p > n$ и $\beta > 1/p$ положить $p/n < s$, тогда интеграл $\int\limits_D |\nabla f(x)|^p \, dx < \infty$, но $f \notin \mathring{Q}_s(D')$.

Пример 1.4.23 показывает, что если $p > n$ и $\int\limits_D |\nabla f(x)|^p \, dx < \infty$, тогда при $1/(n-1) < s < p/n$ отображение $f \in \mathring{Q}_s^0(D')$, однако если взять $p > n$, $p/n < s$, тогда из сходимости интеграла Дирихле построенного отображения не следует, что $f \in \mathring{Q}_s^0(D')$ является отображением с s-усредненной характеристикой.

Приведенные в разделе 1.4 результаты, предложения 1.4.13, 1.4.14, 1.4.17 – 1.4.22, можно сформулировать в виде включений и оформить в таблице.

Здесь области $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $m(D') < \infty$ и $N(f, D) < N < \infty$, отображение $f : D \to D'$ – открытое, непрерывное, изолированное, $f \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$.

Таблица 1.4.2

				дополнительные условия
1.	$BL^n \subset \mathring{Q}_s^*(D')$		$1/(n-1) < s < 1$	
2.	$BL^p \subset \mathring{Q}_s^*(D')$	$p > n$	$1/(n-1) < s < 1$	
3.	$\mathring{Q}_s^*(D') \subset BL^n$		$1 < s$	
4.	$\mathring{Q}_s^*(D') \subset BL^p$	$p < n$	$1 < s < p/(n-p)$	$m(D) < \infty$
5.	$BL^n \subset \mathring{Q}_s^0(D')$		$1/(n-1) < s < 1$	$\int\limits_D \lvert J(x,f)\rvert^{s/(s-1)} \, d\sigma_x < \infty$
6.	$BL^p \subset \mathring{Q}_s^0(D')$	$p > n$	$1/(n-1) < s < p/n$	$\int\limits_D \left[\lvert J(x,f)\rvert^s \left(1+\lvert x\rvert^2\right)^n \right]^{p/(ns-p)} dx < \infty$
7.	$\mathring{Q}_s^0(D') \subset BL^n$		$1 < s$	$\int\limits_D \left[\lvert J(x,f)\rvert^s \left(1+\lvert x\rvert^2\right)^n \right]^{1/(s-1)} dx < \infty$
8.	$\mathring{Q}_s^0(D') \subset BL^p$	$p < n$	$p/(n-p) < s$	$m(D) < \infty$

Сравнение классов отображений с искажением, ограниченным в среднем[28] Q_s и Q_s^* с классами отображений с s-усредненной характеристикой на ограниченной области D дает нам следующие результаты (таблица 1.4.3).

Здесь $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченные области, $f : D \to D'$, $m(D) < \infty$, $m(D') < \infty$.

---

[28] Малютина А.Н. Классы отображений с ограниченным в среднем искажением. // Вестник ТГУ. Томск: Изд. ТГУ. – 2000, № 269, С. 51-55.

Таблица 1.4.3.

1.	$Q_s = \tilde{Q}_s$	
2.	$Q_s^* = \tilde{Q}_s^*$	
3.	$Q_{s'} \subset \tilde{Q}_s$	$s' > s$
4.	$Q_{s'}^* \subset \tilde{Q}_s^*$	
5.	$\tilde{Q}_{s'} \subset Q_s$	
6.	$\tilde{Q}_{s'}^* \subset Q_s^*$	

Результаты первой главы позволяют распространить соответствующие свойства и теоремы, доказанные для классов отображений с ограниченным интегралом Дирихле, классов отображений с искажением, ограниченным в среднем и др., на класс отображений с s-усредненной характеристикой, а также изучить возможность применения методов исследования этих классов, например, обобщенный «принцип длины и площади» в теории отображений пространственных областей с ограниченными интегралами Дирихле, емкостную технику, широко используемую для изучения отображений с искажением, ограниченным в среднем, для исследования рассматриваемых нами отображений.

Глава 2. Во второй главе изучаются аналитические свойства отображений с s-усредненной характеристикой.

В разделе 2.1 доказаны две теоремы о дифференцируемости. Показано, теоремы 2.1.1, 2.1.2, что если компоненты отображения $f^{i_k} \in W^1_{n+\varepsilon_k,\,\mathrm{loc}}(D)$, тогда отображение $f \in W^1_{n+\delta,\,\mathrm{loc}}(D)$ при некоторых условиях на δ.

Теорема 2.1.1. Пусть область $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^n$, $f = \left(f^1, f^2, \ldots, f^n\right)$ – отображение с s-усредненной характеристикой, такое, что $f^{i_k} \in W^1_{n+\varepsilon_k,\,\mathrm{loc}}(D)$, $\varepsilon_k > 0$. Пусть $a = \left[1 + \sum_{k=1}^{n} \left(n + \varepsilon_k\right)^{-1} - mn^{-1}\right]^{-1}$, $1 \le k \le m < n,\ \ s > a\left(a-1\right)^{-1}$, $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le n$.

Тогда $f \in W^1_{n+\delta,\,\mathrm{loc}}(D)$, $\delta = n\left(s\left(a-1\right) - a\right)\left(s+a\right)^{-1}$.

Теорема 2.1.2. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $f : D \to \mathbb{R}^n$, $f = \left(f^1, f^2, \ldots, f^n\right)$ – отображение с s-усредненной характеристикой, такое, что $f^{i_k} \in W^1_{n+\varepsilon_k,\,\mathrm{loc}}(D)$, $\varepsilon_k > 0$. Пусть $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le n$ $1 \le k \le m < n$, $s > 1$, $a = \left[1 + \sum\limits_{k=1}^{m} \left(n + \varepsilon_k\right)^{-1} - mn^{-1}\right]^{-1}$.

Тогда $f \in W^1_{n+\delta,\,\mathrm{loc}}\left(D\right)$, $\delta = n\left(s-1\right)\left(a-1\right)\left(s+a-1\right)^{-1}$.

В разделе 2.2 мы доказываем, что отображения с s-усредненной характеристикой являются полунепрерывными снизу.

Теорема 2.2.1. Пусть $D_m \subset D'$, $m = 0,1,2...$, – ограниченные области, $|D'| \le R < \infty$. Пусть $f_m : D \to D_m$ – последовательность отображений с s-усредненной характеристикой, $s > (n-1)^{-1}$ и последовательность $\{f_m\}$ сходится равномерно внутри D к непрерывному отображению f, $f : D \to \mathbb{R}^n$.

Тогда

$$K_{\mathrm{O},S}\left(f\right) = \left(\int\limits_D K^s_{\mathrm{O}}\left(x,f\right) d\sigma_x\right)^{1/s} \le \underline{\lim}_{m\to\infty} K_{\mathrm{O},S}(f_m).$$

Теорема 2.2.2. Пусть $D_m \subset D^*$, $m = 0,1,2...$, – ограниченные области, $|D^*| \le R < \infty$. Пусть $f_m : D \to D_m$ – последовательность отображений с s-усредненной характеристикой, $s \ge 1$ и последовательность $\{f_m\}$ сходится равномерно внутри D к непрерывному отображению f, $f : D \to \mathbb{R}^n$.

Тогда

$$K^*_{\mathrm{O},S}\left(f\right) = \left(\int\limits_D K^s_{\mathrm{O}}\left(x,f\right) J\left(x,f\right) d\sigma_x\right)^{1/s} \le \underline{\lim}_{m\to\infty} K^*_{\mathrm{O},S}(f_m).$$

Для отображений квазиконформных в среднем см. работу Ю.Ф. Стругова[29], для отображений с искажением, ограниченным в среднем – работу С.М. Борчук[30].

Глава 3. В третьей главе описан геометрический метод для изучения свойств отображений с s-усредненной характеристикой, основанный на приводимом здесь специальном характеристическом законе искажения модуля семейств кривых. С применением этого метода получены некоторые геометрические свойства исследуемых отображений.

В разделе 3.1 приведено определение модуля семейства кривых для отображений с s-усредненной характеристикой и некоторые его свойства, доказана теорема об оценке модуля, теорема 3.1.6.

---

[29] Стругов Ю.Ф. Отображения, квазиконформные в среднем. Новосибирск: 1979. –39 с. (Препринт СО АН СССР. Ин-т математики).

[30] Борчук С.М. О полунепрерывности интегральных средних от аналитических отклонений пространственных отображений. – Донецк: Донец. ун-т, 1991. – 47 с. (Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 43 – Ук91).

Определение 3.1.2 Пусть $\Gamma \subset \text{Ў}^n$ – некоторое семейство кривых. Функцию $\rho : \text{Ў}^n \to \text{Ў}^1$ будем называть допустимой метрикой для Γ и обозначать $\rho \wedge \Gamma$, если она неотрицательна, измерима по Борелю и $\int_\gamma \rho ds_x \geq 1$ для $\forall\, \gamma \in \Gamma$, где $ds_x = ds/(1+|x|^2)$.

Определение 3.1.3 Для произвольного *l*, $1 \leq l < \infty$, определим модуль порядка *l* семейства кривых Γ, как нижнюю грань

$$M_l\left(\Gamma\right) = \inf \int\limits_{\text{Ў}^n} \rho^l(x) d\sigma_x ,$$

где $d\sigma_x = dx / \left(1+|x|^2\right)^n$, инфимум берется над классом всевозможных метрик $\rho \wedge \Gamma$. Часто, если не приведет к разночтениям, индекс *l* мы будем опускать.

Теорема 3.1.6 (об оценке модуля) Пусть $f : D \to \text{Ў}^n$ – отображение с $K_{\mathrm{I},S}$-усредненной характеристикой. Тогда выполняется неравенство

$$M\left(\Gamma^*\right) \leq \inf_{\rho\wedge\Gamma} \int\limits_D \left(\rho\left(x\right)\right)^n K_{\mathrm{I}}\left(x, f\right) d\sigma_x , \qquad (1.3.6.1)$$

где Γ – некоторое семейство кривых, в области *D*, Γ^* – образ семейства Γ при отображении f.

На основании полученной оценки, в разделе 3.2 §§ 3.2.1, 3.2.2, доказаны теоремы о поведении исследуемых отображений в окрестности изолированной особой точки. Получены оценка искажения евклидовых расстояний, теорема 3.2.1.5, и теорема 3.2.2.1 о порядке роста.

Необходимо отметить, что неравенство вида 1.3.6.1 является ключевым условием в определении более общего класса пространственных отображений, уже упоминавшегося выше, – класса *Q*-гомеоморфизмов[31].

Теорема 3.2.1.5 Пусть $f : D \to D^*$ – отображение с *s*-усредненной характеристикой. Тогда для всякой точки $x_0 \in D$ и точки $x \in B^n\left(x_0, d\right)$, $d = \rho\left(x_0, \partial D\right)$ справедлива следующая оценка

$$\left|f\left(x\right) - f\left(x_0\right)\right| \leq \lambda R^* e^{-t\left(x, x_0\right)},$$

где $R^* = R\Big(f\left(x_0\right), f\left[B^n\left(x_0, d\right)\right]\Big)$, λ – некоторая величина, зависящая толь-

[31] Martio O., Ryazanov V., U. Srebro and Yakubov E. On *Q*-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. 30 (2005), No 1, 1–21.

ко от $t\left(x,x_0\right)=\left[\omega_{n-1}^{-1}\int\limits_D r^n\left(\left|x-x_0\right|,y\right)K_1\left(y,f\right)d\sigma_x\right]^{1/(1-n)}$, и $r\left(t,y\right)$ – произвольная метрика, допустимая для семейства $\Gamma\left(\left[0,t\right],S^n\left(s_0,d\right);B^n\left(x_0,d\right)\right)$, $0<t<d$.

Теорема 3.2.2.1 Пусть f – отображение с $K_{1,S}$-усредненной характеристикой, f отображает шар B^n на себя, $f\left(0\right)=0$ и $K_{I,f}\left(0,t\right)\leq\left(\ln c/t\right)^{\alpha(n-1)}$, где $0<\alpha<1$, $0<t<1$, постоянная $c\geq e$. Тогда

$$\left|f\left(x\right)\right|\leq\lambda\left|x\right|^{g\left(c,|x|\right)},$$

где $g\left(c,|x|\right)=\left[\beta\left(\ln 1/|x|\right)^{-1}\left(\left(\ln c/|x|\right)^{\beta}-\left(\ln c\right)^{\beta}\right)\right]^{1/(n-1)}$, $\beta=\alpha\left(n-1\right)+1$.

В разделе 3.3 мы вводим геометрическое определение (3.3.6) отображений с s-усредненной характеристикой и описываем геометрический метод для изучения свойств исследуемых отображений, использование которого позволяет нам установить эквивалентность геометрического и аналитического определений исследуемых отображений, теорема 3.3.9.

Теорема 3.3.1. Пусть D, DЃ⊂ ЎЊ – области, f: $D \to D'$ – отображение с $K^*_{O,S}$-усредненной характеристикой, $s>1$. Пусть $A\subset D$ – борелевское множество такое, что $N(f, A) < \infty$. Тогда существует ограниченная, неотрицательная, аддитивная, абсолютно непрерывная функция $\Phi^*_{O,S}$ борелевских множеств в D такая, что для любого семейства кривых $\Gamma\subset A$ выполнено неравенство

$$M_n^s(\Gamma)\leq N^{s-1}\left(f,A\right)\cdot\Phi^*_{O,S}(A)\cdot M^{s-1}_{ns/(s-1)}\left(f\Gamma\right).$$

Теорема 3.3.2. Пусть $D\subset$ Ў^n – ограниченная область, DЃ⊂ ЎЊ – область. Пусть f: $D \to D'$ – отображение с $K^*_{1,S}$-усредненной характеристикой, $s > 1/(n–1)$. Пусть $G\subset D$ – борелевское множество такое, что $N(f, G) < \infty$. Тогда существует ограниченная, неотрицательная, аддитивная, абсолютно непрерывная функция $\Phi^*_{1,S}$ борелевских множеств в D такая, что для любого семейства кривых $\Gamma\subset G$ выполнено неравенство

$$M_n^s(\Gamma)\geq c^{-ns}(D,R)\cdot{\Phi^*_{1,S}}^{-1}(G)\cdot M^{s+1}_{ns/(s+1)}(f\Gamma),$$

где c (D, R) – константа, зависящая от области D.

Теорема 3.3.5 Пусть $D\subset$ Ў^n – нормальная область, DЃ⊂ ЎЊ – область. Пусть f : $D \to D'$ отображение с $K_{O,S}$ и $K_{I,S}$-усредненными характеристиками, $s > n–1$. Пусть $\Gamma\subset D$ – семейство кривых, причем любая кривая $\gamma^*\in f\Gamma$ имеет, по крайней мере, m существенно различных поднятий, принадлежащих Γ. Тогда справедливы неравенства

$$M_n^s(f\Gamma) \le K_{\mathrm{I},S}^s \cdot M_{n\beta}^{s/\beta}(\Gamma)\,,$$

$$M_n^s(f\Gamma) \le K_{\mathrm{O},S}^s \cdot M_{n\beta}^{s/\beta}(\Gamma),$$

где $\beta = s/(s-1)$.

Под геометрическим определением отображений с s-усредненной характеристикой будем понимать следующее.

Определение 3.3.6. Скажем, что открытое изолированное непрерывное отображение f:

– принадлежит классу $\widetilde{\mathbf{Q}}_s^{*}(D)$, где $1/(n-1) \le s < \infty$, если существует ограниченная квазиаддитивная функция $\Phi_{\mathrm{I},S}^*$, заданная на открытых множествах области D, такая, что для любого семейства кривых Γ из D и произвольного борелевского множества $G \subset D$, содержащего все кривые из Γ, выполняется неравенство

$$M_{ns/(s+1)}^{s+1}(\Gamma') \le \Phi_{\mathrm{I},S}^*(G)\, M_n^s(\Gamma)\,;$$

– принадлежит классу $\widetilde{\mathbf{Q}}_{s'}(D')$, где $(n-1) \le s' < \infty$, если существует ограниченная квазиаддитивная функция $\Psi_{S'}$, заданная на открытых множествах области D', такая, что для любого семейства кривых Γ' из D' и произвольного борелевского множества $G' \subset D'$, содержащего все кривые из Γ', выполняется неравенство

$$M_n^s(\Gamma') \le \left[\Psi_{S'}(G')\right]^s \cdot M_{n\beta}^{s/\beta}(\Gamma)\,,$$

где $G' = f(G)$, $\Gamma' = f(\Gamma) = \{f(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$, $\beta = s/(s-1)$;

– принадлежит классу $\widetilde{\mathbf{Q}}_{s,s'}(D)$, где $(n-1) \le s, s' < \infty$, если выполняются оба закона (3.3.6.1), (3.3.6.2) искажения модулей любых семейств кривых Γ из D и Γ' из D'.

Через $q_s(D)$, $q_{s'}(D')$, $q_{s,s'}(D)$ обозначим, соответственно подклассы $q_s(D) \subset \widetilde{\mathbf{Q}}_s^{*}(D)$, $q_{s'}(D') \subset \widetilde{\mathbf{Q}}_{s'}(D')$, $q_{s,s'}(D) \subset \widetilde{\mathbf{Q}}_{s,s'}(D)$ отображений, для которых вышеопределенные функции $\Phi_{\mathrm{I},S}^*$, $\Psi_{S'}$ являются абсолютно непрерывными функциями борелевских множеств.

Теорема 3.3.9. Пусть $f : D \to D'$ – непрерывное открытое изолированное отображение, $s > n-1$, $s' > n-1$. Следующие условия эквивалентны:

(1) f – отображение с $K_{\mathrm{I},S}$-усредненной характеристикой и

$$\int_D K_{\mathrm{O}}^{s'}(x, f)\, d\sigma_x < \infty\,;$$

(2) $f \in \widetilde{W}_{n,\mathrm{loc}}^1(D \setminus B_f)$, $f \in W_{n,\mathrm{loc}}^1(D)$ – невырожденные в своих областях задания отображения и следующие интегралы конечны

$$\int_D K_1^s(x,f)\left|J(x,f)\right|d\sigma_x, \qquad \int_{V^*\setminus f(B_f\cap V_j)} K_1^{s'}(y,f_j^{-1})\left|J(y,f_j^{-1})\right|d\sigma_y;$$

(3) $f \in \tilde{Q}_{s,s'}(D)$;

(4) $f \in q_{s,s'}(D)$.

Для гомеоморфных отображений с искажением, ограниченным в среднем, эквивалентность аналитического и геометрического определений доказана в работе В.И. Кругликова[32], для негомеоморфных отображений с искажением, ограниченным в среднем – в работе А.Н. Малютиной[33].

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю доценту Малютиной Александре Николаевне за постановку задач и полезные обсуждения.

Перечень работ автора по теме диссертации

1. Елизарова М.А. Дифференциальные свойства отображений с s-усредненной характеристикой / Малютина А.Н., Елизарова М.А. // **Вестник ТГУ.** № 300 (I). – 2007 г. – С. 124-129.
2. Елизарова М.А. Теоремы о полунепрерывности снизу отображений с s-усредненной характеристикой. / Малютина А.Н., Елизарова М.А. // Вестник ТГУ. Математика и механика. № 4 (8). – 2009 г. – С. 46-52.
3. Елизарова М.А. Оценки искажения модулей для отображений с s-усредненной характеристикой. / Малютина А.Н., Елизарова М.А. // **Вестник ТГУ. Математика и механика.** № 2 (10). – 2010 г. – С. 5-15.
4. Елизарова М.А. О связи классов отображений с s-усредненной характеристикой с некоторыми классами пространственных отображений. / Малютина А.Н., Елизарова М.А. // **Вестник ТГУ. Математика и механика.** № 4(12). – 2010 г. (в печати).
5. Елизарова М.А. О дифференцируемости отображений с s-усредненной характеристикой // Материалы XLV международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (МНТК-45): Математика / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2007 г. – 323 с.
6. Елизарова М.А. Пример отображения с s-усредненной характеристикой // Тезисы докладов Всероссийской конференции по математике и механике. Томск, ТГУ, 2008 г. – С. 74.

---

[32] Кругликов В.И., Пайков В.И. Некоторые геометрические свойства отображений с искажением, ограниченным в среднем. Донецк, Донецк ун-т, 1982, 43с. – (Деп. в ВИНИТИ 06.09.82 № 4747-82 Деп).

[33] Малютина А.Н. Об эквивалентности геометрического и аналитического определений отображений с ограниченным в среднем искажением // Экстремальные задачи теории функций 8. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990. – С. 64-70.

7. Елизарова М.А. Теоремы о дифференцируемости отображений с *s*-усредненной характеристикой // Молодежная научная конференция ТГУ в рамках Всероссийского фестиваля науки, 2009 г.: Труды Томского государственного университета. Т.273. Сер. общенаучная. Томск: Изд-во Том. ун-та, вып.2, 2010 г. Проблемы естествознания. 495 с.
8. Елизарова М.А. Геометрические свойства отображений с *s*-усредненной характеристикой // Материалы XLVIII международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (МНТК-48): Математика Новосиб. гос. ун.-т. Новосибирск, 2010 г. – С. 84.
9. Елизарова М.А. Граничные свойства отображений с *s*-усредненной характеристикой / Малютина А.Н., Елизарова М.А. // Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», 2010 г.: Тезисы докладов, ИГИЛ СО РАН. – Новосибирск, 2010 г. – С. 32.
10. Елизарова М.А. О граничных свойствах отображений с *s*-усредненной характеристикой // Материалы Всероссийской молодежной научной конференции «Современные проблемы математики и механики» в рамках Всероссийского фестиваля науки в Томске, 2010 г.: Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010 г. – С. 77-79.