Новосибирский Государственный Технический Университет

На правах рукописи

Топовский Антон Валерьевич

Построение точных решений с функциональными параметрами $(2+1)$-мерных нелинейных уравнений методом $\overline{\partial}$-одевания

01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2011

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО "Новосибирский Государственный Технический Университет" на кафедре прикладной и теоретической физики физико-технического факультета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор, Дубровский Владислав Георгиевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор, Шаповалов Александр Васильевич
	доктор физико-математических наук, профессор, Цвелодуб Олег Юрьевич
Ведущая организация:	Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН

Защита состоится 24 ноября 2011 г. в 14.30 час. на заседании диссертационного совета Д 212.267.07 при Томском Государственном Университете, расположенном по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета

Автореферат разослан 13 октября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.267.07,
д. ф.-м.н, с.н.с. Ивонин И.В.

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Физические законы выражаются, как правило, в форме дифференциальных уравнений. Известна исключительная роль линейных дифференциальных уравнений. Но многие физические явления нелинейны и требуют для своего описания нелинейных уравнений. Нелинейные дифференциальные уравнения встречаются во всех фундаментальных физических теориях: теории тяготения, квантовой теории поля, гидродинамики, теории упругости и т.д.

В 1967 году в работе американских ученых Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [1] был открыт новый метод точного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений – метод обратной задачи рассеяния (МОЗР). Вскоре после этого открытия последовало множество работ, в которых многие важные $(1 + 1)$-мерные, а затем $(2 + 1)$- и $(3 + 0)$-мерные нелинейные уравнения были проинтегрированы различными вариантами МОЗР. Одним из наиболее мощных подходов МОЗР является метод $\overline{\partial}$-одевания Захарова-Манакова [2–4]. Данный метод позволяет конструировать новые интегрируемые нелинейные уравнения вместе с соответствующими линейными вспомогательными задачами, вычислять их волновые функции и потенциалы, а также находить широкие классы точных решений нелинейных уравнений. Отметим, что метод $\overline{\partial}$-одевания применим и к линейным дифференциальным уравнениям в частных производных с переменными коэффициентами.

Развитие аналитических методов построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений, в частности метода $\overline{\partial}$-одевания, представляет собой весьма актуальную задачу современной математической и теоретической физики. Очень важным является также использование точных решений линейных и нелинейных уравнений для анализа конкретных физических ситуаций.

Цель диссертационной работы

Целью диссертационной работы является применение метода $\overline{\partial}$-одевания Захарова-Манакова к построению классов точных решений с функциональными параметрами некоторых $(2+1)$-мерных нелинейных интегрируемых уравнений. Более конкретно, в диссертации ставятся и решаются следующие задачи.

1. Построение с помощью метода $\overline{\partial}$-одевания класса новых точных решений с функциональными параметрами с ненулевым асимптотическим значением $-\epsilon$ на бесконечности для $(2+1)$-мерного интегрируемого нелинейного эволюционного уравнения Нижника-Веселова-Новикова (НВН).

2. Исследование частного случая класса точных решений с функциональными параметрами, а именно, подкласса многосолитонных решений уравнения НВН.

3. Физическая интерпретация стационарных состояний микрочастицы в потенциальных полях солитонного типа в соответствии с построенными с помощью метода $\overline{\partial}$-одевания точными волновыми функциями для двумерного стационарного уравнения Шредингера (первой вспомогательной задачи эллиптической версии уравнения НВН).

4. Построение с помощью метода $\overline{\partial}$-одевания класса новых точных решений с функциональными параметрами двумерных интегрируемых обобщений уравнений Савады-Котера (2DСК) и Каупа-Купершмидта (2DКК).

5. Построение для уравнения НВН нелинейных суперпозиций простых плосковолновых периодических решений (ниже, для краткости - про-

стых периодических решений); построение для уравнений 2DCK и 2DKK простых периодических решений.

6. Построение специальных "линейных" суперпозиций простых (односолитонных или простых периодических) решений уравнения НВН таких, что сумма некоторого числа простых решений со специально подобранными параметрами также является решением.

Научная новизна и практическая значимость

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем.

- Методом $\overline{\partial}$-одевания построены новые классы точных решений с функциональными параметрами известных интегрируемых нелинейных уравнений НВН, 2DCK и 2DKK.

- Построены новые специальные многосолитонные решения с ненулевым асимптотическим значением $-\epsilon \neq 0$ на бесконечности нестационарного и стационарного уравнений НВН, представляющиеся с точностью до константы, кратной ϵ, суммой соответствующих односолитонных решений.

- Построены новые классы простых периодических решений с тригонометрическими функциями $\sin\varphi_k(x,y,t) = \sin\varphi_k(a_k x + b_k y + c_k t)$ и $\cos\varphi_k(x,y,t) = \cos\varphi_k(a_k x + b_k y + c_k t)$ интегрируемых нелинейных уравнений НВН, 2DCK и 2DKK. Для нестационарного и стационарного уравнений НВН построены также специальные нелинейные суперпозиции простых периодических решений, представляющиеся с точностью до константы, кратной ϵ, суммой соответствующих простых периодических решений.

- Построены примеры специальных линейных суперпозиций односолитонных и простых периодических решений нестационарного и стационарного уравнений НВН.

- Для построенных методом $\overline{\partial}$-одевания прозрачных одно- и двухсолитонных потенциалов и волновых функций двумерного стационарного уравнения Шредингера дана физическая интерпретация соответствующих стационарных состояний микрочастицы.

Работа носит теоретический характер. Результаты, представленные в диссертации, являются актуальными и новыми на момент их публикации. Полученные результаты опубликованы в ведущих российских и зарубежных журналах, докладывались на международных конференциях и представлены в их публикациях. Научная и практическая ценность диссертации обусловлены возможностью применения полученных в ней результатов в дальнейших исследованиях по теории интегрируемых нелинейных уравнений и их приложений.

На защиту выносятся следующие основные результаты.

1. **Класс точных решений с функциональными параметрами с ненулевым асимптотическим значением $-\epsilon$ на бесконечности уравнения НВН [A1, A2].**

2. **Специальные классы многосолитонных решений нестационарного и стационарного уравнений НВН, как частные случаи класса решений с функциональными параметрами [A2, A3].**

3. **Физическая интерпретация стационарных состояний микрочастицы в поле построенных с помощью метода $\overline{\partial}$-одевания одно- и двухсолитонных потенциалов [A2, A3, A4, A5].**

4. **Класс точных решений с функциональными параметрами с**

нулевым асимптотическим значением на бесконечности уравнений 2DCK и 2DKK [A2, A6].

5. **Нелинейные суперпозиции простых периодических решений с тригонометрическими функциями** $\sin\varphi_k(x,y,t) = \sin\varphi_k(a_k x + b_k y + c_k t)$ **и** $\cos\varphi_k(x,y,t) = \cos\varphi_k(a_k x + b_k y + c_k t)$ **для уравнения НВН; простые периодические решения указанного выше типа для уравнений 2DCK и 2DKK [A2, A3, A6].**

6. **Специальные линейные суперпозиции произвольного числа односолитонных решений с нулевыми асимптотическими значениями на бесконечности и, аналогично, специальные линейные суперпозиции произвольного числа простых периодических решений уравнения НВН [A2, A3].**

Апробация работы

Результаты, полученные в диссертации, были доложены на международных конференциях "Nonlinear physics: theory and experiment VI" (23 июня - 3 июля 2010, Галлиполи, Италия) и "Мезоскопические структуры в фундаментальных и прикладных исследованиях" (20-26 июня, 2010 года, Эрлагол, Горный Алтай). Основные результаты диссертации докладывались также на теоретических семинарах в НГТУ, ТГУ, ТГПУ и ИМ СОРАН.

Публикации

Материалы диссертации опубликованы в четырех печатных работах [A1, A2, A4, A5], из них три статьи в рецензируемых журналах [A1, A2, A4] и одна статья в сборниках трудов конференций [A5], результаты диссертации также представлены в 2 электронных статьях в arxiv.org [A3, A6],

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 155 страниц и включает 18 рисунков и библиографию из 93 наименований на 9 страницах.

Содержание работы

Во **Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы цели и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту положения, описана структура работы по главам. Здесь же приведен краткий обзор основных моментов развития теории классических интегрируемых систем, изложены ингредиенты метода $\overline{\partial}$-одевания и сформулированы известные схемы метода $\overline{\partial}$-одевания для уравнений НВН, 2DKK и 2DCK.

В **первой** главе диссертации изучается симметричное двумерное обобщение уравнения Кортевега - де Фриза (КдФ) – $(2+1)$-мерное интегрируемое нелинейное уравнение Нижника-Веселова-Новикова (НВН):

$$u_t + \kappa_1 u_{\xi\xi\xi} + \kappa_2 u_{\eta\eta\eta} + 3\kappa_1(u\partial_\eta^{-1}u_\xi)_\xi + 3\kappa_2(u\partial_\xi^{-1}u_\eta)_\eta = 0, \qquad (1)$$

здесь $u(\xi, \eta, t)$ – скалярная функция и κ_1, κ_2 – некоторые константы; $\xi = x + \sigma y$, $\eta = x - \sigma y$ и $\sigma^2 = \pm 1$. Случаю $\sigma = 1$ и вещественных констант κ_1, κ_2 соответствует гиперболическая версия уравнения НВН или уравнение НВН-II, а случаю $\sigma = i$ $(\xi = \bar{\eta} = z = x + iy)$, $\kappa_1 = \overline{\kappa_2} = \kappa$ – эллиптическая версия уравнения НВН или уравнение НВН-I (известное также как уравнение Веселова-Новикова (ВН)).

Для обеих версий уравнения НВН методом $\overline{\partial}$-одевания построены классы новых точных решений с функциональными параметрами с постоянным асимптотическим значением $-\epsilon$ на бесконечности, т.е.

$$u(\xi, \eta, t) = \tilde{u}(\xi, \eta, t) + u_\infty = \tilde{u}(\xi, \eta, t) - \epsilon, \qquad (2)$$

где $\tilde{u}(\xi,\eta,t) \to 0$ при $\xi^2+\eta^2 \to \infty$. Простейший пример точного решения уравнения НВН-I из построенного класса имеет вид:

$$u(z,\bar{z},t) = -\epsilon + \frac{v_1\epsilon}{2\Delta}\left(|\alpha_{1z}|^2 - |\alpha_{1\bar{z}}|^2\right) - \frac{v_1^2\epsilon^2}{8\Delta^2}\left|\alpha_1\overline{\alpha}_{1\bar{z}} - \overline{\alpha}_1\alpha_{1\bar{z}}\right|^2, \qquad (3)$$

здесь $v_1 \in \mathbb{R}$ - произвольная константа и $\Delta = \left(1 - \frac{v_1\epsilon}{2}\partial_z^{-1}(\alpha_1\overline{\alpha}_{1z}) + \frac{v_1\epsilon}{4}|\alpha_1|^2\right)$. Функциональный параметр $\alpha_1(z,\bar{z},t)$, по определению, удовлетворяет линейным уравнениям $\alpha_{1z\bar{z}} = \epsilon\alpha_1$, $\alpha_{1t} + \kappa\alpha_{1zzz} + \overline{\kappa}\alpha_{1\bar{z}\bar{z}\bar{z}} = 0$. Результаты, представленные в первой главе диссертации, опубликованы в работах [A1, A2].

В качестве частных случаев решений с функциональными параметрами уравнения НВН во **второй** главе диссертации подробно рассмотрены подклассы многосолитонных решений, а также нелинейных суперпозиций простых периодических решений (с тригонометрическими функциями $\sin\varphi_k(x,y,t) = \sin\varphi_k(a_kx+b_ky+c_kt)$ и $\cos\varphi_k(x,y,t) = \cos\varphi_k(a_kx+b_ky+c_kt)$). Все построенные простые периодические решения и их суперпозиции являются сингулярными решениями.

Приведем примеры построенных односолитонных и простых периодических решений уравнения НВН-I. Односолитонное решение имеет вид:

$$u(z,\bar{z},t) = -\epsilon + \tilde{u}(z,\bar{z},t) = -\epsilon + \frac{|\lambda_1-\mu_1|^2}{2\cosh^2\frac{\varphi_1(z,\bar{z},t)+\phi_{01}}{2}}, \quad \epsilon = -\lambda_1\bar{\mu}_1, \qquad (4)$$

здесь $\phi_{01} \in \mathbb{R}$ - произвольная константа и $\varphi_1(z,\bar{z},t) = i\big[(\mu_1-\lambda_1)z-(\overline{\mu}_1-\overline{\lambda}_1)\bar{z}+ +\kappa(\mu_1^3-\lambda_1^3)t-\overline{\kappa}(\overline{\mu}_1^3-\overline{\lambda}_1^3)t\big]$. Пример простого периодического решения дается выражением:

$$u(z,\bar{z},t) = -\epsilon + \tilde{u}(z,\bar{z},t) = -\epsilon - \frac{|\lambda_1-\mu_1|^2}{2\cos^2\frac{\varphi_1(z,\bar{z},t)+\phi_{01}}{2}}, \quad \epsilon = \lambda_1\bar{\mu}_1, \qquad (5)$$

где $|\lambda_1| > |\mu_1|$, $\phi_{01} \in \mathbb{R}$ - произвольная константа и $\varphi_1(z,\bar{z},t) = (\mu_1-\lambda_1)z + +(\overline{\mu}_1-\overline{\lambda}_1)\bar{z} + \kappa(\mu_1^3-\lambda_1^3)t + \overline{\kappa}(\overline{\mu}_1^3-\overline{\lambda}_1^3)t$.

Построены специальные нелинейные суперпозиции двух простых (односолитонных или простых периодических) решений вида

$$u(\xi,\eta,t) = -\epsilon + \tilde{u}^{(1)}(\xi,\eta,t) + \tilde{u}^{(2)}(\xi,\eta,t) = \epsilon + u^{(1)}(\xi,\eta,t) + u^{(2)}(\xi,\eta,t), \quad (6)$$

где $u^{(n)}(\xi,\eta,t) = -\epsilon + \tilde{u}^{(n)}(\xi,\eta,t)$, $n = 1, 2$ односолитонные или простые периодические решения. Для всех построенных решений вычислены волновые функции линейных вспомогательных задач.

Помимо суперпозиций типа (6) построены также и специальные нелинейные суперпозиции большего числа простых решений $u^{(n)}$, $n = 1, \ldots, N > 2$ (односолитонных или простых периодических решений), удовлетворяющие уравнению НВН. Такие решения имеют вид

$$u(\xi,\eta,t) = -\epsilon + \tilde{u}^{(1)}(\xi,\eta,t) + \sum_{n=2}^{N} \tilde{u}^{(n)}(\xi,\eta) \quad (7)$$

и состоят из одного нестационарного $u^{(1)}(\xi,\eta,t) = -\epsilon + \tilde{u}^{(1)}(\xi,\eta,t)$ и $N-1$ стационарных (с независящими от времени фазами) простых решений $u^{(n)}(\xi,\eta) = -\epsilon + \tilde{u}^{(n)}(\xi,\eta)$. Показано также, что любая сумма $-\epsilon + \sum_{n=i}^{j} \tilde{u}^{(n)}$, $1 \leqslant i < j \leqslant N$, образованная из слагаемых решений (7), является также решением уравнения НВН, а суммы $-\epsilon + \sum_{n=i}^{j} \tilde{u}^{(n)}$, $1 < i < j \leqslant N$, являются также точными решениями стационарного уравнения НВН.

Приведем, в качестве примера, нелинейную суперпозицию односолитонных решений (4), удовлетворяющую уравнению НВН-I. Это решение имеет вид:

$$\begin{aligned} u(z,\overline{z},t) &= -\epsilon + \tilde{u}^{(1)}(z,\overline{z},t) + \sum_{n=2}^{N} \tilde{u}^{(n)}(z,\overline{z}) = \\ &= -\epsilon + \frac{|\lambda_1 - \mu_1|^2}{2\cosh^2 \frac{\varphi_1(z,\bar{z},t)+\phi_{01}}{2}} + \sum_{n=2}^{N} \frac{|\lambda_n - \mu_n|^2}{2\cosh^2 \frac{\varphi_n(z,\bar{z})+\phi_{0n}}{2}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где фазы $\varphi_1(z,\bar{z},t)$ и $\varphi_n(z,\bar{z})$ $(n = 2, \ldots, N)$ выражаются формулами:

$$\varphi_1(z,\bar{z},t) = i[(\mu_1 - \lambda_1)z - (\overline{\mu}_1 - \overline{\lambda}_1)\overline{z}] + 2(-1)^k|\kappa|(|\lambda_1|^3 - (-1)^m|\mu_1|^3)t,$$

$$\varphi_n(z,\bar{z}) = -[(\tau_n\mu_1 - \tau_n^{-1}\lambda_1)z + (\tau_n\overline{\mu}_1 - \tau_n^{-1}\overline{\lambda}_1)\overline{z}], \quad n = 2, \ldots, N$$

здесь $\tau_n \in \mathbb{R}$ и $\phi_{0n} \in \mathbb{R}$, $(n = 1, \dots, N)$ произвольные константы и $\arg \mu_1 - - \arg \lambda_1 = m\pi$, $m \in \mathbb{N}$. Параметры решения (8) удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} &\lambda_n = i\tau_n^{-1}\lambda_1, \quad \mu_n = i\tau_n\mu_1, \quad n = 2, \dots, N, \\ &\arg \lambda_1 = -\frac{1}{3}\left(\arg \kappa + \frac{(2k+1)\pi}{2}\right), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{9}$$

Решение (8) представляют собой решетку из $N-1$ неподвижно стоящих на плоскости (стационарных, с независящими от времени фазами) солитонов с паралаллельными линиями постоянных значений фаз и распространяющегося в плоскости поперек этой решетки движущегося солитона. Нелинейная суперпозиция простых периодических решений (5) имеет вид:

$$\begin{aligned} u = &-\epsilon + \tilde{u}^{(1)}(z, \overline{z}, t) + \sum_{n=2}^{N} \tilde{u}^{(n)}(z, \overline{z}) = \\ = &-\epsilon - \frac{|\lambda_1 - \mu_1|^2}{2\cos^2 \frac{\varphi_1(z,\bar{z},t)+\phi_{01}}{2}} - \sum_{n=2}^{N} \frac{|\lambda_n - \mu_n|^2}{2\cos^2 \frac{\varphi_n(z,\bar{z})+\phi_{0n}}{2}}, \end{aligned} \tag{10}$$

здесь $|\lambda_n| > |\mu_n|$, $(n = 2, \dots, N)$ и фазы $\varphi_1(z, \bar{z}, t)$, $\varphi_n(z, \bar{z})$, $(n = 2, \dots, N)$ выражаются формулами:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(z, \bar{z}, t) = [(\mu_1 - \lambda_1)z + (\overline{\mu}_1 - \overline{\lambda}_1)\overline{z}] - 2(-1)^k|\kappa|(|\lambda_1|^3 - (-1)^m|\mu_1|^3)t, \\ &\varphi_n(z, \bar{z}) = i[(\tau_n\mu_1 - \tau_n^{-1}\lambda_1)z - (\tau_n\overline{\mu}_1 - \tau_n^{-1}\overline{\lambda}_1)\overline{z}], \quad n = 2, \dots, N, \end{aligned}$$

где $\tau_n \in \mathbb{R}$ и $\phi_{0n} \in \mathbb{R}$, $(n = 1, \dots, N)$ произвольные константы и $\arg \mu_1 - - \arg \lambda_1 = m\pi$, $m \in \mathbb{N}$. Параметры решения (10) удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} &\lambda_n = i\tau_n^{-1}\lambda_1, \quad \mu_n = i\tau_n\mu_1, \quad n = 2, \dots, N \\ &\arg \lambda_1 = -\frac{1}{3}\left(\arg \kappa + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{11}$$

Показано, что в подходящим образом определенном пределе $-\epsilon \to 0$ ($\overline{\partial}$-одевание с нулевым асимптотическим значением) построенные нелинейные суперпозиции двух (6) или более (7) простых решений (односолитонных или простых периодических) превращаются в специальные линейные суперпозиции произвольного числа соответствующих простых решений. Таким образом, построен новый класс точных решений нестационарного и стационарного уравнений НВН в форме линейных суперпозиций произвольного числа простых решений $u^{(n)}$, $n = 1, \ldots, N$ так, что суммы $u = u^{(k_1)} + \ldots + u^{(k_m)}$, $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leqslant N$ произвольного числа решений из указанного множества также являются решениями.

Приведем, в качестве примера, специальную линейную суперпозицию односолитонных решений вида (4) с $\epsilon = 0$, удовлетворяющую уравнению НВН-I. Такое решение имеет вид:

$$u = u^{(1)}_{\epsilon=0}(z, \overline{z}, t) + \sum_{n=2}^{N} u^{(n)}_{\epsilon=0}(z, \overline{z}) = \frac{|\lambda_1|^2}{2\cosh^2 \frac{\varphi_1(z,\bar{z},t)+\phi_{01}}{2}} + \sum_{n=2}^{N} \frac{|\lambda_n|^2}{2\cosh^2 \frac{\varphi_n(z,\bar{z})+\phi_{0n}}{2}}, \tag{12}$$

здесь фазы $\varphi_1(z, \bar{z}, t)$, $\varphi_n(z, \bar{z})$ $(n = 2, \ldots, N)$ выражаются формулами:

$$\varphi_1(z, \bar{z}, t) = -i\big(\lambda_1 z - \overline{\lambda}_1 \overline{z}\big) + 2(-1)^k |\kappa||\lambda_1|^3 t, \quad \varphi_n(z, \bar{z}) = \tau_n\big(\lambda_1 z + \overline{\lambda}_1 \overline{z}\big),$$

где $\tau_n \in \mathbb{R}$ и $\phi_{0n} \in \mathbb{R}$, $(n = 1, \ldots, N)$ произвольные константы. Параметры решения (12) удовлетворяют условиям (9).

Специальная линейная суперпозиция простых периодических решений вида (5) с $\epsilon = 0$, удовлетворяющая уравнению НВН-I, дается выражением:

$$u = u^{(1)}_{\epsilon=0}(z, \overline{z}, t) + \sum_{n=2}^{N} u^{(n)}_{\epsilon=0}(z, \overline{z}) = -\frac{|\lambda_1|^2}{2\cos^2 \frac{\varphi_1(z,\bar{z},t)+\phi_{01}}{2}} - \sum_{n=2}^{N} \frac{|\lambda_n|^2}{2\cos^2 \frac{\varphi_n(z,\bar{z})+\phi_{0n}}{2}}, \tag{13}$$

здесь фазы $\varphi_1(z, \bar{z}, t)$, $\varphi_n(z, \bar{z})$, $(n = 2, \ldots, N)$ имеют вид:

$$\varphi_1(z, \bar{z}, t) = -\lambda_1 z - \overline{\lambda}_1 \overline{z} - 2(-1)^k |\kappa||\lambda_1|^3 t, \quad \varphi_n(z, \bar{z}) = -i\tau_n^{-1}\big(\lambda_1 z - \overline{\lambda}_1 \overline{z}\big),$$

где $\tau_n \in \mathbb{R}$ и $\phi_{0n} \in \mathbb{R}$, $(n = 1, \ldots, N)$ произвольные константы. Параметры решения (13) удовлетворяют условиям (11). Результаты, представленные во второй главе, опубликованы в работах [A1, A2, A3].

Первая вспомогательная задача уравнения НВН, при ненулевом значении потенциала на бесконечности (2), имеет вид

$$L_1\psi = \left(\partial^2_{\xi\eta} + \tilde{u}\right)\psi = \epsilon\psi. \tag{14}$$

В случае эллиптической версии уравнения (уравнение НВН-I), т.е. для комплексных ξ и η, задача (14) представляет собой 2D стационарное уравнение Шредингера с потенциалом $V_{\text{Schr}} = -2\tilde{u} = -2(u+\epsilon)$ и энергией $E = -2\epsilon$. В случае гиперболической версии уравнения НВН (уравнение НВН-II), т.е. для вещественных ξ и η, уравнение (14) является возмущенным телеграфным уравнением или уравнением Клейна-Гордона, а при $\epsilon = 0$ – уравнением струны. Таким образом, при построении решений нелинейного уравнения НВН, мы одновременно получаем точные потенциалы, а также соответствующие им волновые функции указанных выше линейных уравнений.

Представляет большой интерес выяснение физического смысла построенных методом $\overline{\partial}$-одевания потенциалов и волновых функций рассматриваемых линейных вспомогательных задач, в особенности для 2D стационарного уравнения Шредингера. Этому посвящена **третья** глава диссертации, где дана физическая интерпретация стационарных состояний микрочастицы с различными волновыми функциями в построенных односолитонном (4) и специальном двухсолитонном потенциале $V_{\text{Schr}} = V^{(1)}_{\text{Schr}} + V^{(2)}_{\text{Schr}}$, соответствующем решению вида (6).

Используемый в работе метод $\overline{\partial}$-одевания на фиксированном уровне энергии позволяет строить потенциал и некоторое достаточно "широкое" подпространство волновых функций (уровень энергии бесконечно вырожден), соответствующих различным стационарным состояниям микрочастицы, как связанным, так и состояниям свободного безотражательного движения микрочастицы в солитонном потенциальном рельефе. Одному и тому же уровню энергии могут соответствовать различные физические состояния микрочастицы. Например, в случае двухсолитонного потенциала $V_{\text{Schr}} = V_{\text{Schr}}^{(1)} + V_{\text{Schr}}^{(2)}$, микрочастица может находиться в связанном состоянии, при этом она локализована в поперечном, относительно минимума одного из потенциалов ($V_{\text{Schr}}^{(1)}$ или $V_{\text{Schr}}^{(2)}$), направлении и свободно движется в продольном. При увеличении полной энергии микрочастицы таких стационарных состояний она всегда остается локализованной в поперечном долине потенциала направлении. Для того же уровня энергии указанного двухсолитонного потенциала построены волновые функции, соответствующие также состояниям безотражательного движения частицы. В конце главы с использованием плотности тока вероятности доказывается безотражательность (прозрачность) построенных солитонных потенциалов. Показано также, что вероятности переходов из одного стационарного состояния микрочастицы в поле солитонных потенциалов в другие состояния равны нулю. Данная глава основана на работах [A4, A5].

В **четвертой** главе диссертации рассмотрены двумерные интегрируемые обобщения уравнений Каупа-Купершмидта (2DKK):

$$u_t + u_{xxxxx} + \frac{25}{2} u_x u_{xx} + 5uu_{xxx} + 5u^2 u_x + 5u_{xxy} - 5\partial_x^{-1} u_{yy} + 5uu_y + 5u_x \partial_x^{-1} u_y = 0; \tag{15}$$

и Савады-Котера (2DCK):

$$u_t + u_{xxxxx} + 5u_x u_{xx} + 5uu_{xxx} + 5u^2 u_x + 5u_{xxy} - 5\partial_x^{-1} u_{yy} + 5uu_y + 5u_x \partial_x^{-1} u_y = 0. \tag{16}$$

Первая вспомогательная задача, соответствующая уравнениям 2DKK и 2DCK, в общем положении имеет третий порядок относительно ∂_x и, следовательно, содержит несколько полевых переменных. Уравнения 2DKK и 2DCK являются различными редукциями нелинейной системы уравнений на эти полевые переменные. Использование метода $\overline{\partial}$-одевания в этой нестандартной ситуации, когда приходиться удовлетворять условиям редукции, которые на языке волновых функций вспомогательных задач имеют вид нелинейных выражений, представляет собой интерес с точки зрения развития самого метода $\overline{\partial}$-одевания в применении его к многомерным интегрируемым уравнениям.

С помощью метода $\overline{\partial}$-одевания построен класс новых точных решений с функциональными параметрами уравнений 2DKK и 2DCK. Приведем пример простейшего решения уравнения 2DKK из построенного класса. Это решение имеет вид:

$$u(x,y,t) = -\frac{3v_1}{2c_1\Delta^2}\left(\Delta\cdot\partial_x|\alpha_1|^2 + \frac{v_1}{2c_1}|\alpha_1|^4\right), \qquad (17)$$

где $v_1/c_1 \in \mathbb{R}$ – произвольная константа и $\Delta = \left(1 - \frac{v_1}{2c_1}\partial_x^{-1}|\alpha_1|^2\right)$. Функциональный параметр $\alpha_1(x,y,t)$, по определению, удовлетворяет линейным уравнениям $\alpha_{1\,y} + \alpha_{1\,xxx} = 0$, $\alpha_{1t} + \alpha_{1\,xxxxx} + 5\alpha_{1\,xxy} - 5\partial_x^{-1}\alpha_{1\,yy} = 0$.

В качестве частных случаев решений с функциональными параметрами рассмотрены примеры солитонных решений и простых плосковолновых периодических решений уравнений 2DKK и 2DCK с тригонометрическими функциями $\sin\varphi_k(x,y,t) = \sin\varphi_k(a_kx + b_ky + c_kt)$ и $\cos\varphi_k(x,y,t) = \cos\varphi_k(a_kx + b_ky + c_kt)$. Почти все построенные периодические решения сингулярны, но для уравнения 2DKK получены также и несингулярные простые периодические решения. Пример несингулярного простого периодического решения уравнения 2DKK имеет вид:

$$u(x,y,t) = \mp 12|\mu_1|\frac{\mu_{1R}^2}{\mu_{1I}}\frac{\cos\varphi \pm \frac{\mu_{1I}}{|\mu_1|}}{\left(\cos\varphi \pm \frac{|\mu_1|}{\mu_{1I}}\right)^2}, \qquad (18)$$

где $\varphi = (\mu_1 + \overline{\mu_1})x + (\mu_1^3 + \overline{\mu_1^3})y + (\mu_1^5 + \overline{\mu_1^5})t$. Данная глава основана на результатах, полученных в работах [A2, A6].

В **заключении** кратко перечислены основные результаты, полученные в диссертации.

Список публикаций

A1. В.Г.Дубровский, А.В.Топовский, М.Ю.Басалаев. Новые точные решения с функциональными параметрами уравнения Нижника-Веселова-Новикова с постоянными асимптотическими значениями на бесконечности // Теоретическая и математическая физика. 2010. Т. 165, № 2. С. 273–294.

A2. В.Г.Дубровский, А.В.Топовский, М.Ю.Басалаев. Новые точные решения двумерных интегрируемых уравнений НВН, 2DKK и 2DCK полученные с помощью метода $\bar{\partial}$-одевания // Теоретическая и математическая физика. 2011. Т. 167, № 3. С. 377–393.

A3. V.G.Dubrovsky, A.V.Topovsky, M.Yu.Basalaev. New exact solutions with constant asymptotic values at infinity of the NVN integrable nonlinear evolution equation via $\overline{\partial}$-dressing method // http://arxiv.org/abs/0912.2155v2. 2010. Pp. 1–43.

A4. V.G.Dubrovsky, A.V.Topovsky, M.Yu.Basalaev. 2D Stationary Schrödinger equation via the $\bar{\partial}$-dressing method: New exactly solvable potentials, wave functions and their physical interpretation // Journal of mathematical physics. 2010. Vol. 51, no. 9. Pp. 092106–092106–22.

A5. V.G.Dubrovsky, A.V.Topovsky, M.Yu.Basalaev. The construction of exact soliton potentials and corresponding wave functions of two-dimensional stationary Schrödinger equation via the $\bar{\partial}$-dressing method // Международная конференция с элементами научной школы для молодежи: Мезоскопические структуры в фундаментальных и прикладных исследованиях. 2010. С. 70–76.

A6. V.G.Dubrovsky, A.V.Topovsky, M.Yu.Basalaev. New exact solutions of two-dimensional integrable generalizations of Kaup-Kuperschmidt and Sawada-Kotera equations via the $\bar{\partial}$-dressing method // http://arxiv.org/abs/1011.5954v2. 2010. Pp. 1–18.

Цитированная литература

1. C.S.Gardner, J.M.Greene, M.D.Kruskal, R.M.Miura. Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Physical Review Letters. 1967. Vol. 19. Pp. 1095–1097.

2. В.Е.Захаров, С.В.Манаков. Многомерные нелинейные интегрируемые нелинейные системы и методы построения их решений // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1984. Т. 133. С. 281.

3. В.Е.Захаров, С.В.Манаков. Построение многомерных нелинейных интегрируемых систем и их решений // Функциональный анализ и его приложения. 1985. Т. 19, № 2. С. 11.

4. V.E.Zakharov. Commutating operators and nonlocal $\bar{\partial}$ - problem // Nonlinear and turbulent processes in Physics / Ed. by V.G.Bar'yakhtar, N.S.Erokhin, V.E.Zakharov et al. 1988.